CAPÍTULO IV.

ANÁLISIS INDETERMINADO DEL PRIMER GRADO.

Introduccion. Cuando el enunciado de un problema suministra ménos ecuaciones que incógnitas hay en él, el problema se llama *indeterminado*, en el sentido de que (núm. 55) sus ecuaciones pueden satisfacerse por una infinidad de sistemas de valores atribuidos á las incógnitas. Pero sucede muchas veces que la naturaleza de la cuestion exige que los valores de las incógnitas estén espresados en *números enteros*; en cuyo caso una de las incógnitas, á la cual se podria desde luego dar un valor arbitrario, no debe ya recibir mas que valores enteros y tales que el valor correspondiente de la otra incógnita ó de cada una de las otras, se halle igualmente espresado en números enteros. Esta condicion, pues, reduce mucho el número de las soluciones, sobre todo sino se quiere tener cuenta mas que de las *soluciones directas*, es decir, de las soluciones en las cuales los valores de todas las incógnitas son positivos y enteros á un mismo tiempo.

El objeto del ANÁLISIS INDETEMINADO DEL PRIMER GRADO, es el de resolver en números enteros las cuestiones que conducen á ecuaciones del primer grado.

§ I. ECUACIONES Y PROBLEMAS INDETERMINADOS DEL PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

122. Toda ecuacion del primer grado con dos incógnitas (número 67) puede reducirse á la forma

$$ax+by=c;$$

en que a, b, c, designan números enteros, positivos ó negativos.

Sentado esto, observemos ante todo que *si los coeficientes* a *y* b *tuviesen un factor* m *comun, que no divida al segundo miembro* c, *la ecuacion no puede ser satisfecha por números.*

Porque sea $a=ma'$, $b=mb'$; la ecuacion se convierte en

$$ma'x+mb'y=c; \text{ de donde } a'x+b'y=\frac{c}{m};$$

y esta no puede ser satisfecha por *ningun sistema de valores enteros* de x y de y, miéntras c no sea divisible por m.

Supondremos, pues, que a y b son números *primeros entre sí*; pues si tuviesen un factor comun seria preciso para que la ecuacion fuese posible en *números enteros*, que c fuese igualmente divisible por este factor; y entónces se le podria suprimir en ambos miembros.

123. Para mayor claridad trataremos primeramente de las ecuaciones particulares, generalizando en seguida la cuestion.

PRIMERA CUESTION. *Dividir* 159 *en dos partes, de las que la una sea divisible por* 8 *y la otra por* 13.

Designemos por x é y los cocientes respectivos de la division de las dos partes buscadas por los números 8 y 13; es claro que $8x$ y $13y$ espresan estas dos partes; y se tiene la ecuacion

$$(1) \qquad 8x+13y=159,$$

que segun el enunciado debe resolverse en *números enteros y positivos* para x y para y.

Se deduce primeramente de esta ecuacion,

$$x=\frac{159-13y}{8},$$

ó efectuando la division en cuanto sea posible,

$$x=19-y+\frac{7-5y}{8}.$$

Observemos ahora que el valor de x será entero si se da á y un valor tal que $\frac{7-5y}{8}$ sea un número entero. Ademas es necesaria esta condicion; así que *es preciso y basta* que $\frac{7-5y}{8}$ sea igual á un número

entero cualquiera. Sea t este número entero (t se llama una *indeterminada*) y resulta

$$(2) \qquad \frac{7-5y}{8}=t, \text{ de donde } 5y+8t=7,$$

y el valor de x se convierte en $x=19-y+t$.

Todo valor entero de t que sustituido en la ecuacion (2) dé otro semejante para y, satisfará la condicion de que sea *entero* $\frac{7-5y}{8}$; de modo que los dos valores de x y de y correspondientes serán enteros y satisfarán ademas (núm. 66) á la ecuacion propuesta, que resulta evidentemente de la eliminacion de t entre las dos ecuaciones

$$\frac{7-5y}{8}=t, \quad x=19-y+t.$$

Queda pues reducida la cuestion á resolver en números enteros la ecuacion (2), cuyos coeficientes son mas simples que los de la ecuacion (1).

Se saca de la ecuacion (2). . . . . $y=\frac{7-8t}{5}$,

ó, efectuando la division en parte . . $y=1-t+\frac{2-3t}{5}$.

Todo valor entero de t que haga á $2-3t$ un múltiplo de 5, dará tambien para y un número entero y será por consiguiente conveniente: por otro lado, la condicion de que $2-3t$ sea un múltiplo de 5 es necesaria. De modo que es preciso poner $\frac{2-3t}{5}=t'$ (en que t' es una segunda indeterminada); lo que da (3) $3t+5t'=2$; y el valor de y se reduce á

$$y=1-t+t'.$$

(La ecuacion (2) resulta ademas de la eliminacion de t' entre estas dos últimas.)

La cuestion queda pues reducida á resolver en números enteros la ecuacion (3), de la cual se saca

$$t=\frac{2-5t'}{3}=-t'+\frac{2-2t'}{3}.$$

Supongamos $\frac{2-2t'}{3}=t''$; resulta (4) $2t'+3t''=2$,

y por consiguiente $\qquad t=-t'+t''$.

De la ecuacion (4) se deduce $t'=\frac{2-3t''}{2}=1-t''-\frac{t''}{2}$;

y poniendo $\frac{t''}{2}=t'''$, se saca (5) $t''=2t'''$,

y por consiguiente $\qquad t'=1-t'-t'''$.

Como en la ecuacion (5) el coeficiente de t'' es igual á la *unidad*, se sigue que todo valor entero atribuido á t''' dará otro semejante para t''. Ademas las dos incógnitas principales x é y, como las indeterminadas t, t', t'', y t''', están ligadas entre sí por las cinco ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= 19-y+t, \\ y &= 1-t+t' \\ t &= \quad -t'+t''. \\ t' &= 1-t''-t''', \\ t'' &= 2t''' \end{aligned}$$

Así dando á t''' un valor entero cualquiera, y subiendo de la última de estas ecuaciones á las dos primeras, se obtendrán para x é y valores enteros correspondientes que verificarán necesariamente la ecuacion propuesta; porque, con arreglo á los razonamientos que hicimos mas arriba, resulta esta ecuacion de la eliminacion de t, t', t'', t''', entre las cinco ecuaciones que acabamos de establecer.

Pero á fin de no atribuir á t''' mas que valores á que correspondan otros enteros y positivos para x é y, conviene espresar á x é y como funciones *inmediatas* (núm. 108) de la indeterminada t''', con ayuda de las cinco ecuaciones anteriores.

Pero la espresion de t', cuando se reemplaza t'' por un valor en t''', se convierte en $t'=1-2t'''-t'''$, ó $t'=1-3t'''$;
subiendo á la espresion de t, $t=-t'+t''=-1+3t'''+2t'''$;
ó reduciendo, $\qquad t=-1+5t'''$.

Se hallará igualmente $\qquad y=1-(-1+5t''')+1-3t'''$,
de donde $\qquad y=3-8t'''$.

En fin,

$$x=19-(3-8t''')+(-1+5t'''), \text{ ó } x=15+13t'''.$$

Es fácil comprobar que estas dos últimas ecuaciones reproducen la ecuacion propuesta, por la eliminacion de t'''. En efecto, si se multiplica la primera ecuacion por 13, y la segunda por 8, y se suman los resultados, sale

$$13y+8x=159.$$

Hagamos sucesivamente $t'''=0, 1, 2, 3\ldots$, ó bien $t'''=-1, -2, -3\ldots$; las fórmulas *precedentes* darán todos los valores de x y de y en números enteros, ya positivos ya negativos, propios para verificar la propuesta; pero si, como lo exige el enunciado, no hay que tener cuenta sino con las *soluciones enteras y positivas*, t''' solo puede recibir valores que hagan á $3-8t'''$ y $15+13t'''$ positivos. No existen pues evidentemente mas que $t'''=0$ y $t'''=-1$ que satisfagan á esta condicion: porque todo valor positivo de t''' hace á y negativo; y todo valor negativo, *numéricamente* mayor que 1, hace á x negativo.

Si se hace sucesivamente $t'''=0$, $t'''=-1$,

resulta $\left\{\begin{matrix} y=3 \\ x=15 \end{matrix}\right\}$, despues $\left\{\begin{matrix} x=11 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$.

Luego $x=15$ é $y=3$, $x=2$ y $y=11$,

son los únicos pares de números *positivos* que verifican la ecuacion

$$8x+13y=159.$$

En cuanto á la cuestion de que esta ecuacion es la traduccion algebráica: como $8x$ y $13y$ representan las dos partes buscadas, se sigue que 8×15 ó 120, y 13×3 ó 39, forman *la primera solucion*; que 8×2 ó 16, y 13×11 ó 143, forman *la segunda solucion*; es decir que 159 puede dividirse, ya sea en $120+39$, ya en $16+143$.

124. Sea por segundo ejemplo, la ecuacion

(1) $$17x-49y=-8.$$

Dedúcese de ella desde luego $x=\frac{49y-8}{17}=2y+\frac{15y-8}{17}$.

Para que á un valor entero de y corresponda un valor entero de x es *preciso y basta* que $15y-8$ sea un múltiplo de 17.

Sea pues $\frac{15y-8}{17}=t$, en que t es indeterminada; resulta de ella

(2) $$15y-17t=8,$$

y $$x=2y+t.$$

[La eliminacion de t entre estas dos ecuaciones reproducirá la ecuacion (1).]

Dedúcese de la ecuacion (2), $y=\frac{8+17t}{15}=t+\frac{8+2t}{15}$; y la nueva espresion, $\frac{8+2t}{15}$, debe ser un número entero (esta es por otra parte una condicion suficiente).

Suponiendo $\frac{8+2t}{15}=t'$, se obtiene (3) $2t-15t'=-8$,

y por consiguiente $$y=t'.$$

La ecuacion (3) da $t=\frac{15t'-8}{2}=7t'-4+\frac{t'}{2}$;

y si se pone $\frac{t'}{2}=t''$, de donde $t'=2t''$,

se halla $$t=7t'-4+t''.$$

Ahora para espresar x é y como funcion de la indeterminada t'', reunamos las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} x&=2y+t, \\ y&=t+t', \\ t&=7t'-4+t'', \\ t'&=2t'', \end{aligned}$$

y subamos de la última á las precedentes.

Se tiene primeramente $t=7.\,2t''-4+t''$, ó $t=15t''-4$;
subiendo á la segunda $y=15t''-4+2t''$, ó $y=17t''-4$;
despues á la primera $x=2(17t''-4)+15t''-4$,
ó bien $x=49t''-12$.

Estas dos fórmulas reproducen la ecuacion propuesta por la eliminacion de t''; porque si se multiplica la primera por 49, la segunda por 17 y se restan uno de otro los resultados, sale

$$17x-49y=-204+196=-8.$$

Se ve ademas que dando á t'' valores positivos cualesquiera, se

obtendrán para x é y valores positivos; pero no se puede suponer á t'' negativo.

Sea $t''=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots;$
se halla $y=13,\ 30,\ 47,\ 64,\ldots,$
$x=37,\ 86,\ 135,\ 184,\ldots.$

Es pues infinito el número de los sistemas de *soluciones* enteras y positivas de la ecuacion propuesta; y el sistema de los menores es

$$x=37,\ y=13.$$

Este par de valores verifica la ecuacion, porque se tiene

$$17\times37-49\times13=629-637=-8.$$

Estamos dispensados en este ejemplo de reproducir todos los razonamientos que hicimos en el primero para dar cuenta de todas las operaciones; pero es fácil á los principiantes repetirlos, siguiendo paso á paso las transformaciones.

125. Puede reasumirse de este modo el método precedente:

Sea (1) $ax+by=c$ la ecuacion que se trata de resolver. *Sáquese de esta ecuacion el valor de la incógnita que tiene el menor coeficiente; de* x, por ejemplo, *y efectúese la division en cuanto sea posible;* se obtendrá una espresion de x en y, compuesta de una parte entera y de otra de forma fraccionaria que se ha de procurar hacer entera. *Iguálese esta segunda parte á una primera indeterminada* t; *resultará una nueva ecuacion en* y *y* t, que puede llamarse la ecuacion (2), y cuyos coeficientes son mas simples que los de la ecuacion (1); *el valor de* x *se halla por otra parte espresado como funcion entera de* y *y* t, *y la ecuacion propuesta resulta de la eliminacion de* t *entre la ecuacion* (2) *y la que da el valor de* x *en* y t.

Sáquese de la ecuacion (2) *el valor de* y, *y efectúese la division en cuanto sea posible. Iguálese la parte fraccionaria á una segunda indeterminada* t'; *de donde resulta una ecuacion* (3) *en* t *y* t' *mas simple que las ecuaciones* (1) *y* (2). *El valor de* y *se halla de este modo espresado como funcion entera de* t *y* t'; *y la propuesta resulta de la eliminacion de* t *y* t' *entre la ecuacion* (3) *y las dos ecuaciones que dan* x *como funcion entera de* y *y* t, *y luego* y *como funcion entera de* t *y* t'.

Opérese sobre la ecuacion (3) *como sobre las ecuaciones* (1) *y* (2), *y continúese esta serie de operaciones hasta que en fin se llegue á una ecuacion entre dos indeterminadas de las cuales una tenga por coeficiente la* UNIDAD.

Súbase en seguida de esta última ecuacion á las precedentes; y procúrese por sustituciones sucesivas espresar x *é* y *como funciones de la última indeterminada.*

Se obtendrán de este modo dos fórmulas con ayuda de las cuales, dando á la indeterminada restante valores enteros cualesquiera, se hallarán todos los sistemas de *valores* enteros, *asi positivos como negativos*, propios para verificar la ecuacion $ax+by=c$.

Si se quieren solamente valores enteros y positivos para x é y, las dos fórmulas indican, por su composicion, *entre qué límites deben estar comprendidos los valores de la última indeterminada*, para que se llene esta condicion.

PRIMERA OBSERVACION. El procedimiento que se acaba de indicar debe siempre conducir á una ecuacion en que el coeficiente de una de las indeterminadas sea igual á la *unidad*.

En efecto, en la primera operacion llegamos á dividir el mayor coeficiente de las dos incógnitas por el menor; en la segunda el menor coeficiente por la resta de su division; en la tercera, la primera resta por la segunda, y así sucesivamente; es decir que se aplica á los dos coeficientes el procedimiento del máximo comun divisor. Luego, pues que por hipótesis los dos coeficientes son primeros entre sí (número 122), se llegará finalmente á una resta igual á 1, que servirá de coeficiente á la penúltima de las *indeterminadas* introducidas en el curso del cálculo.

De aquí puede concluirse que la ecuacion $ax+by=c$ *admite un número infinito de soluciones enteras* [positivas ó negativas], miéntras los coeficientes a y b son primeros entre sí.

SEGUNDA OBSERVACION. Cuando se aplica el procedimiento á una ecuacion en que los coeficientes de las dos incógnitas tienen un factor comun que no se halla en el segundo miembro [en cuyo caso la ecuacion es *imposible* en números enteros], la serie de los cálculos hace reconocer esta imposibilidad, si es que ántes no se habia advertido.

Sea por ejemplo la ecuacion $49x-35y=11.$

(El factor 7 es comun á los coeficientes de x é y, y no entra en el segundo miembro.)

De aquí se deduce $y=\frac{49x-11}{35}=x+\frac{14x-11}{35}.$

Suponiendo $\frac{14x-11}{35}=t$, de donde $y=x+t$.

se tiene $x=\frac{35+11}{14}=2t+\frac{7t+11}{14}$.

Suponiendo $\frac{7t+11}{7}=t'$, de donde $x=2t+t'$,

se halla $t=\frac{14t'-11}{7}=2t'-1-\frac{4}{7}$.

Esta última ecuacion es evidentemente *imposible en números enteros para* t *y* t', pues que $\frac{4}{7}$ es esencialmente una fraccion. Luego tambien la propuesta es imposible en números enteros para x é y.

Nota. El denominador 7 de la fraccion á que se llega es precisamente el factor comun á ambos coeficientes de la propuesta; lo que resulta necesariamente de la naturaleza del método empleado.

126. Por lo demas el anterior procedimiento es susceptible de muchas *simplificaciones* que es importante introducir en la práctica.

Tomemos otra vez la ecuacion ya tratada $17x-49y=-8$;

se deduce primeramente de ella $x=\frac{49y-8}{17}$.

Observemos ahora que 49 es igual á $17\times2+15$.

ó bien, tambien, igual á $17\times3-2$; luego, $\frac{49y}{17}=3y-\frac{2y}{11}$;

de modo que el valor de x toma la forma $x=3y-\frac{(2y+8)}{17}$,

quedando la cuestion reducida á encontrar para y un número entero que haga entera la espresion $\frac{2y+8}{17}$. Esta espresion, pues, se convierte en $\frac{2(y+4)}{17}$; pero los dos números 17 y 2 son *primeros entre sí.*

Así para que $\frac{2(y+4)}{17}$ sea entero, *es preciso y basta* que $y+4$ sea divisible por 17.

Supongamos, pues, $\frac{y+4}{17}=t$, en que t es un número entero completamente arbitrario; resulta. . . . $y=17t-4$,
y el valor de x se convierte en. . . $x=3y-2t$,
ó, sustituyendo por y su valor en t, $x=49t-12$.

Estas fórmulas dan igualmente todas las soluciones enteras de la propuesta; porque la eliminacion de t entre estas dos ecuaciones reproduce la ecuacion $17x-49=-8$.

Haciendo á $t=1$, 2, 3, 4,..., se hallarán valores enteros y positivos para x é y; pero no se puede suponer á t negativo ó igual á 0 : porque entónces x é y serian negativos.

Es fácil conocer la importancia de las modificaciones precedentes, pues que por su medio no se ha introducido en el curso del cálculo sino *una sola indeterminada.*

Estas modificaciones se encuentran en casi lodos los ejemplos, aunque no pueden esplicarse fácilmente mas que sobre ecuaciones particulares; esta es la razon porque trataremos aun las cuestiones siguientes :

127. Segunda cuestion. *Pagar* 78 *fr. con piezas de á* 5 *fr.* y *de* 3 *fr. sin ninguna otra moneda.*

Sea x el número de piezas de 5 fr. y y el de las piezas de 3 fr.; se tiene la ecuacion $5x+3y=78$, que no admite mas que valores enteros y positivos como soluciones de la cuestion.

Esta resuelta respecto á y, da $y=\frac{78-5x}{3}$

ó efectuando la division. . . . $y=26-x-\frac{2x}{3}$,

ó bien. . . . . $y=26-2x+\frac{x}{3}$.

Considerando la primera forma del valor de y, se ve que el valor de y correspondiente á un valor entero de x no puede ser tal entero sino miéntras se tenga $\frac{2x}{3}$ igual á un número entero; y como 2 es primero con 3, es preciso y basta que x sea divisible por 3.