Sea, pues, ... $x=3t$;

resulta $y=26-x-2t$, ó bien $y=26-5t$.

Si se considera el segundo valor, se ve en seguida que x debe ser un múltiplo de 3, lo que da $x=3t$, de donde resulta tambien $y=26-2x+t$, ó $y=26-5t$.

Estas dos fórmulas manifiestan que t debe ser positivo y no puede tener un valor mayor que $\frac{26}{5}$, ó $5\frac{1}{5}$ si se quieren obtener *soluciones positivas* para x é y.

Sea, pues,	$t=0$,	1,	2,	3,	4,	5;
resulta	$x=0$,	3,	6,	9,	12,	15,
	$y=26$,	21,	16,	11,	6,	1.

De modo que se puede satisfacer á la cuestion de seis modos diferentes, á saber: con 26 piezas de 3 fr. sin ninguna pieza de 5 fr.; con 21 piezas de 3 fr. y 3 piezas de 5 fr.; con 16 piezas de 3 fr. y 6 de 5; y así sucesivamente.

NOTA. Hágase en ambas fórmulas, $t=6$; sale $x=18$, $y=-4$; lo que significaria que si por una parte se dan 18 piezas de 5 fr., es preciso que se reciban en cambio 4 piezas de 3 fr., para que se efectúe el pago con estas dos especies de moneda.

Se halla en efecto $5\times18-3\times4=90-12=78$.

De modo que valores positivos para x, y negativos para y, ó *reciprocamente*, darian tambien *soluciones* de la cuestion, en el sentido de que se verificase el pago mediante *un cambio* de piezas de 5 fr. y de 3 fr.

TERCER PROBLEMA. *Hallar un número que dividido por* 39 *dé la resta* 16, *y dividido por* 56 *la resta* 27.

Sea N el número buscado. Llamemos ademas x é y los cocientes enteros de N dividido sucesivamente por 39 y 56. Se tienen las dos ecuaciones

$$N=39x+16 \text{ y } N=56y+27;$$

lo que da $39x+16=56y+27$,

ó, reduciendo (1) $39x-56y=11$.

La cuestion queda pues reducida á resolver esta ecuacion en números enteros.

Se deduce de ella $x=\frac{56y+11}{39}=y+\frac{17y+11}{39}$;

ó bien, $x=2y-\frac{(22y-11)}{39}=2y-\frac{11(2y-1)}{39}$.

(Se toma aquí el cociente por esceso, porque se advierte que el factor 11 puede ponerse en evidencia en el numerador de la fraccion.)

Como en la espresion $\frac{11(2y-1)}{39}$ el factor 11 es primero con 39, para que esta espresion sea un número entero es preciso y basta que $2y-1$ sea divisible por 39.

Supongamos, pues, $\frac{2y-1}{39}=t$,

resulta

(2) $2y-39t=1$,

y por consiguiente $x=2y-11t$.

La ecuacion (2) da $y=\frac{39t+1}{2}=19t+\frac{t+1}{2}$; suponiendo $\frac{t+1}{2}=t'$, se obtiene la ecuacion $t=2t'-1$;

y $y=19t+t'$, de donde $y=39t'-19$.

Trasportando este valor de y y el de t á la espresion de x, se hallaria $x=56t'-27$. Pero es inútil esta sustitucion; porque como N es la incógnita principal del problema (x é y no son aquí mas que *incógnitas auxiliares*) y se tiene $N=56y+27$, basta reemplazar en esta ecuacion á y por su valor; lo que da

$$N=56(39t'-19)+27, \text{ ó reduciendo, } N=2184t'-1037.$$

Se reconoce con la simple inspeccion de esta fórmula, que t' puede tener un valor positivo cualquiera; pero no puede ser negativo si se quiere que N sea positivo.

Sea $t=1$; resulta $N=2184-1037=1147$.

Este número 1147 es el menor de todos los números enteros positivos susceptibles de satisfacer al enunciado.

Observemos por otra parte que desde el momento en que se ha reconocido que 1147 satisface al enunciado, se está cierto de que todos los demas valores de N que corresponden á $t'=2, 3, 4...$, lo satisfacen igualmente. En efecto, en la fórmula $N=2184t'-1037$, como el número 2184 es igual á 39×56, las hipótesis $t'=2, 3, 4,...$ darán para N múltiplos de 2184, ó de 39 y de 56, aumentados en 1147; de donde se sigue que estos valores de N, divididos respectivamente por 39 y 56, deben dar las mismas restas que 1147.

Nota. Los artificios de cálculo á que hemos recurrido en la resolucion de las cuestiones precedentes, abrevian mucho la determinacion de los valores de x y de y; pero suponen mucha práctica, razon por la cual nunca recomendaremes bastante su uso.

128. Si se comparan las fórmulas propias para dar todos los sistemas de valores de x y de y en las diversas cuestiones que hemos tratado hasta ahora, con las ecuaciones de estos problemas, se puede reconocer fácilmente que gozan de la siguiente propiedad comun : *Los coeficientes de la indeterminada* que entra en estas fórmulas *son* recíprocamente *los mismos* (con diferencia del signo en uno de ellos) *que los coeficientes de que están afectadas las incógnitas* x *é* y *en la ecuacion propuesta*; es decir que en el valor de x, el coeficiente de la indeterminada es igual *al coeficiente de que está afectada* y *en la ecuacion*, y en el valor de y el coficiente de la indeterminada es igual *al coeficiente de* x *en la ecuacion, tomado como signo contrario* ó *recíprocamente* (en cuanto á los signos de ambos coeficientes).

Para dar de esta propiedad una demostracion enteramente independiente del método que se ha seguido, tomemos otra vez la ecuacion general :

$$(1) \qquad ax+by=c;$$

y supongamos que por un medio cualquiera se haya encontrado

$$y=\beta,\ x=\alpha,$$

para *una primera solucion* en números enteros (positivos ó negativos); digo que todas las demas soluciones se hallan comprendidas en las dos fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} y=\beta+at \\ x=\alpha-bt \end{array}\right\} \text{ ó bien } \left\{\begin{array}{l} y=\beta-at \\ x=\alpha+bt: \end{array}\right.$$

en que t designa un número entero completamente arbitrario.

En efecto, pues que α y β forman un sistema de valores de x y de y, en números enteros; se tiene la igualdad

$$(2) \qquad a\alpha+b\beta=c.$$

Restando esta igualdad, miembro á miembro, de la ecuacion (1), lo cual equivale á poner por c su valor $a\alpha+b\beta=c$, se obtiene

$$(3) \qquad a(x-\alpha)+b\,(y-\beta)=c,$$

ecuacion que puede reemplazar *claramente* á la propuesta.

La ecuacion pues se convierte en esta :

$$x-\alpha=-\frac{b\,(y-\beta)}{a},$$

y para que el valor de x correspondiente á uno entero de y sea tambien entero es preciso y basta que $b(y-\beta)$ sea divisible por a; pero se sabe (núm. 122) que los coeficientes a y b son primeros entre sí (de otro modo no se resolveria la ecuacion en números enteros); luego en virtud del principio establecido en *aritmética*, es preciso y basta que $y-\beta$ sea un múltiplo de a.

Supongamos pues $\qquad y-\beta=at,$
resulta $\qquad x-\alpha=-\beta t;$

y de estas dos ecuaciones se deduce evidentemente

$$y=\beta+at,\ x=\alpha-bt.$$

Como el signo de t es completamente indeterminado, puede cambiarse t en $-t$ en estas fórmulas, lo que da igualmente

$$y=\beta-at,\ x=\alpha+bt.$$

Es fácil reconocer que, cualquiera que sea el valor de t en números enteros, los valores $y=\beta+at$, $x=\alpha-bt$ satisfacen á la propuesta.

En efecto, si se los sustituye en esta ecuacion, se encuentra $a(\alpha-bt)+(\beta+at)=c$, ó reduciendo, $a\alpha+b\beta=c$, igualdad comprobada, pues que α y β forman por hipótesis una solucion de la propuesta.

129. *Consecuencia.* Si en las fórmulas

$$y=\beta+at,\ x=\alpha-bt,$$

se hace sucesivamente

$$t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ \text{y}\ t=-1,\ -2,\ -3,\ldots,$$

se convierten en

$$\left.\begin{array}{l} y=\beta,\ \beta+a,\ \beta+2a,\ \beta+3a,\ldots, \\ x=\alpha,\ \alpha-b,\ \alpha-2b,\ \alpha-3b,\ldots, \end{array}\right\}\ \text{y}\ \left\{\begin{array}{l} y=\beta-a,\ \beta-2a,\ \beta-3a,\ldots, \\ x=\alpha+b,\ \alpha+2b,\ \alpha+3b,\ldots, \end{array}\right.$$

Por lo que se ve que todas las soluciones enteras de la propuesta, positivas ó negativas, forman *dos progresiones por diferencia; cuya razon es para los valores* x, *el coeficiente de que se halla afectado* y *en la ecuacion, y para los valores de* y *el coeficiente de que se halla afectado* x *en la misma.*

130. Otro método para resolver la ecuacion

$$ax+by=c.$$

Segun lo que quedó demostrado en el número 129, toda la dificultad para resolver completamente esta ecuacion consiste en hallar *una solucion*, pues que se obtienen en seguida todas las demas por medio de las fórmulas

$$y=\beta+at,\ x=\alpha-bt.$$

Se puede, pues, obtener siempre una solucion fundándose en las propiedades elementales de las *fracciones continuas.*

En efecto, supongamos primeramente que sea la ecuacion

$$(1)\qquad ax-by=c,$$

en que a y b son dos números absolutos, aunque c puede ser positivo ó negativo.

Convirtamos en fraccion continua la fraccion $\frac{a}{b}$, que debe ser irreducible (número 122), y formemos las reducidas consecutivas.

La última será $\frac{a}{b}$; si se llama $\frac{m}{m'}$ á la penúltima, se obtendrá, con arreglo á las propiedades conocidas, la relacion

$$a\times m'-b\times m=\pm 1;$$

á saber: $+1$ si la reducida $\frac{a}{b}$ es de órden par, y -1 si de impar.

Admitamos por un momento que sea de lugar par; resulta la *igualdad conocida*. . . . . $a\times m'-b\times m=+1$;
multipliquemos estos dos miembros por c;
sale. . . . . $a\times m'c-b\times mc=c$,
resultado que no difiere de la ecuacion $ax-by=c$,

sino en que x é y están reemplazadas por $m'c$ y mc.

Luego $x=m'c$, $y=mc$ forman *una solucion* de la ecuacion.

Si la reducida $\frac{a}{b}$ es de órden impar, se tiene $a\times m'-b\times m=-1$; de donde multiplicando por $-c$, $a\times(-m'c)-b\times(-mc)=c$.

Comparando esta igualdad conocida con la ecuacion $ax-by=c$, se concluye con $x=-m'c$, $y=-mc$, por *solucion.*

Si la ecuacion es de la forma. . . . $ax+by=c$,
es decir, si los coeficientes a y b son del mismo signo, se la puede modificar y escribir así. . . . . $ax-b\times(-y)=c$.

Y entónces formando como ántes la igualdad. . . . . $a\times m'c-b\times mc=c$,
ó bien esta otra. . . . . $a\times(-m'c)-b\times(mc)=c$,
se podrá concluir que $x=m'c$, $y=-mc$, ó

$x=-m'c$, $y=mc$, forman una solucion de la ecuacion.

De modo que sea la que quiera la ecuacion propuesta se puede siempre, por medio de las fracciones continuas, obtener una *primera solucion* de esta ecuacion; y las fórmulas $y=\beta+at$, $x=\alpha-bt$, dan en seguida todas las demas.

131. Apliquemos este método á la ecuacion siguiente:

$$29x+17y=250.$$

La fraccion $\frac{29}{17}$ convertida en fraccion continua da para las reducidas consecutivas, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{29}{17}$.

De donde resulta la *igualdad* $29\times 7-17\times 12=-1$.

(Aquí la reducida $\frac{29}{17}$ es de órden impar.)

Multipliquemos ambos miembros de esta igualdad por —250· saldrá

$$29\times(-1750)-17\times(-3000)=250;$$

pero la propuesta puede escribirse así :

$$29\times x-17\times(-y)=250;$$

por donde se ve que, $x=-1750$, $y=3000$, forman una *solucion*.

Las fórmulas se convierten entónces en $\begin{cases} y=\ \ 3000+29t; \\ x=-1750-17t. \end{cases}$

Si no se quiere tener cuenta mas que con las soluciones en números enteros y positivos, es preciso suponer á t negativo; de esta manera cambiando el signo de t, se obtiene $y=3000-29t$, $x=-1750+17t$; y es evidente que los valores de x y de y no serán positivos sino en tanto que se tenga

$$\begin{cases} 17t>1750, \\ 29t<3000, \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} t>\frac{1750}{17}, \\ t<\frac{3000}{29}, \end{cases}$$

ó efectuando las divisiones $t>102\frac{16}{17}$, pero $<103\frac{13}{29}$.

Luego $t=103$ es el único valor de la indeterminada que hace positivos á x é y.

Para $t=103$, se halla $x=1$, $y=13$, valores que sustituidos en la ecuacion dan

$$29\times1+17\times13=29+221=250.$$

Se ve pues con qué precision da todas las soluciones de la ecuacion el método precedente.

132. En algunas circunstancias se puede obtener la *primera solucion* sin necesidad de convertir $\frac{a}{b}$ *en fraccion continua.*

1º. Si uno de los coeficientes a y b es un *submúltiplo* exacto de la cantidad ya conocida c, la ecuacion da en el acto dicha solucion.

Sea por ejemplo la ecuacion $5x+3y=78$; el coeficiente 3 divide á 78 y da por cociente 26.

Luego si se pone $x=0$ y $y=26$ queda satisfecha la ecuacion; porque se convierte en $5\times0+3\times26=78$; las otras soluciones se hallan con arreglo á las fórmulas $\begin{cases} x=3t, \\ y=26-5t. \end{cases}$

Sea aun la ecuacion $12x+35y=156.$

Como 156 es divisible por 12 y da 13 por cociente, se sigue que $y=0$, $x=13$, forman la *primera solucion;* y se tiene para fórmulas relativas á la ecuacion propuesta,

$$x=13-35t,\ y=12t.$$

2º. Siempre que por la inspeccion de la ecuacion se conoce que la suma ó la diferencia de los coeficientes a y b, multiplicados respectivamente por dos números enteros convenientes, da un submúltiplo del segundo miembro, se obtiene tambien en el acto la primera solucion.

Sea por ejemplo la ecuacion, $25x-16y=12.$
Como haciendo $x=2,\ y=3,$
se encuentra $25\times2-16\times3=2,$

multiplicamos ambos miembros de esta igualdad evidente por 6, cociente de 12 por 2; y sale $25\times12-16\times18=12;$
lo que prueba que $x=12$, $y=18$, satisfacen á la propuesta;
de donde las dos fórmulas son $x=12+16t$, $y=18+25t$.

Sea tambien la ecuacion $13x-47y=0;$
queda evidentemente satisfecha por $x=0,\ y=0.$
De modo que las fórmulas generales son $x=47t,\ y=13t.$

Por lo demas estos medios de hallar la primera solucion no son sino medios aplicables á ciertas ecuaciones, miéntras que la conversion en fraccion continua es un medio seguro de conseguirlo.

Aconsejamos á los principiantes que se ejerciten igualmente en los métodos que hemos espuesto, y que son los mas simples de todos los conocidos.

133. A la sola inspeccion de los signos de la ecuacion

$$ax+by=c,$$

se reconoce si el *número* de las soluciones en números enteros y positivos es *limitado* ó *infinito*.

1º. Cuando b es positivo (puede siempre suponerse tal á a), el número de las soluciones es *limitado*.

En efecto, de la propuesta se deduce $x=\frac{c-by}{a}$.

Pero si c es negativo, sea el que se quiera el valor positivo que se dé á y, será negativo el valor correspondiente de x; de suerte que en este caso la ecuacion *no admite solucion alguna*.

Si c es positivo, no se pueden dar á y valores positivos mayores que $\frac{c}{b}$: de lo contrario seria x negativo; por otra parte al mayor valor de y corresponde el menor para x, y recíprocamente : luego, etc.

2º. Cuando b es negativo, sea el que quiera el signo de c el número de las soluciones *es ilimitado*.

En efecto, las fórmulas $x=\alpha-bt,\ y=\beta+at$

se convierten, puesto en evidencia el signo de b, en

$$\begin{cases} x=\alpha+bt, \\ y=\beta+at. \end{cases}$$

En el caso mas desfavorable, pues, en que α y β son dos números negativos, basta, para que sean positivos x é y, suponer á t valores positivos, numéricamente mayores que los de $\frac{\alpha}{b}$ y $\frac{\beta}{a}$. De modo que se pueden dar á t valores enteros cualesquiera sobre los de los dos cocientes.

134. En la hipótesis de que sean positivos á la vez a, b, c, se pueden siempre fijar los límites dentro de los cuales deben comprenderse los valores de la indeterminada.

Para ello, en las dos fórmulas que son entónces

$$y=\beta+at,\quad x=\alpha-bt,$$

basta suponer las desigualdades $\beta+at>0$, $\alpha-bt>0$,

de donde se deduce (núm. 105) $t>-\frac{\beta}{a}$; pero $t<\frac{\alpha}{b}$.

Cuando no se concilian estas dos desigualdades, es una prueba de que la ecuacion no admite ninguna solucion en *números enteros y positivos;* pero si se concilian, el número de los valores enteros que se pueden atribuir á t entre ambos límites $-\frac{\beta}{a}$ y $\frac{\alpha}{b}$, espresa *el número total* de las soluciones.

Nota. Como la diferencia entre el límite superior $\frac{\alpha}{b}$ y el inferior $-\frac{\beta}{a}$, es $\frac{a\alpha+b\beta}{ab}$ ó $\frac{c}{ab}$ (á causa de la relacion $a\alpha+b\beta=c$), se sigue que $\frac{c}{ab}$ ó $q+1$ (q espresa la parte entera del cociente de c por ab) es el máximum del número total de las soluciones.

---

§ II. DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DE TRES Ó MAS INCÓGNITAS.

135. Consideremos primeramente el caso de *dos ecuaciones con tres incognitas.*

Sea por primer ejemplo el sistema de las dos ecuaciones

$$\begin{array}{ll} (1) & 5x+4y+z=272, \\ (2) & 8x+9y+3z=656, \end{array}$$

en una de las cuales la incógnita z se halla afectada de un coeficiente igual á la unidad.

Comencemo por eliminar z.

Multipliquemos al efecto la primera ecuacion por 3, y restemos la segunda del resultado; sale

$$(3) \qquad 7x+3y=160,$$

ecuacion que puede reemplazar á la ecuacion (2).

Aplicando á la ecuacion (3) el primer método, se encuentran las dos formulas $\left\{\begin{array}{l} x=1-3t \\ y=51+7t \end{array}\right\}$.