se reconoce si el *número* de las soluciones en números enteros y positivos es *limitado* ó *infinito*.

1º. Cuando b es positivo (puede siempre suponerse tal á a), el número de las soluciones es *limitado*.

En efecto, de la propuesta se deduce $x=\frac{c-by}{a}$.

Pero si c es negativo, sea el que se quiera el valor positivo que se dé á y, será negativo el valor correspondiente de x; de suerte que en este caso la ecuacion *no admite solucion alguna*.

Si c es positivo, no se pueden dar á y valores positivos mayores que $\frac{c}{b}$: de lo contrario seria x negativo; por otra parte al mayor valor de y corresponde el menor para x, y recíprocamente : luego, etc.

2º. Cuando b es negativo, sea el que quiera el signo de c el número de las soluciones *es ilimitado*.

En efecto, las fórmulas $x=\alpha-bt,\ y=\beta+at$

se convierten, puesto en evidencia el signo de b, en

$$\begin{cases} x=\alpha+bt, \\ y=\beta+at. \end{cases}$$

En el caso mas desfavorable, pues, en que α y β son dos números negativos, basta, para que sean positivos x é y, suponer á t valores positivos, numéricamente mayores que los de $\frac{\alpha}{b}$ y $\frac{\beta}{a}$. De modo que se pueden dar á t valores enteros cualesquiera sobre los de los dos cocientes.

134. En la hipótesis de que sean positivos á la vez a, b, c, se pueden siempre fijar los límites dentro de los cuales deben comprenderse los valores de la indeterminada.

Para ello, en las dos fórmulas que son entónces

$$y=\beta+at,\quad x=\alpha-bt,$$

basta suponer las desigualdades $\beta+at>0$, $\alpha-bt>0$,

de donde se deduce (núm. 105) $t>-\frac{\beta}{a}$; pero $t<\frac{\alpha}{b}$.

Cuando no se concilian estas dos desigualdades, es una prueba de que la ecuacion no admite ninguna solucion en *números enteros y positivos;* pero si se concilian, el número de los valores enteros que se pueden atribuir á t entre ambos límites $-\frac{\beta}{a}$ y $\frac{\alpha}{b}$, espresa *el número total* de las soluciones.

Nota. Como la diferencia entre el límite superior $\frac{\alpha}{b}$ y el inferior $-\frac{\beta}{a}$, es $\frac{a\alpha+b\beta}{ab}$ ó $\frac{c}{ab}$ (á causa de la relacion $a\alpha+b\beta=c$), se sigue que $\frac{c}{ab}$ ó $q+1$ (q espresa la parte entera del cociente de c por ab) es el máximum del número total de las soluciones.

---

§ II. DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DE TRES Ó MAS INCÓGNITAS.

135. Consideremos primeramente el caso de *dos ecuaciones con tres incognitas.*

Sea por primer ejemplo el sistema de las dos ecuaciones

$$\begin{array}{ll} (1) & 5x+4y+z=272, \\ (2) & 8x+9y+3z=656, \end{array}$$

en una de las cuales la incógnita z se halla afectada de un coeficiente igual á la unidad.

Comencemo por eliminar z.

Multipliquemos al efecto la primera ecuacion por 3, y restemos la segunda del resultado; sale

$$(3) \qquad 7x+3y=160,$$

ecuacion que puede reemplazar á la ecuacion (2).

Aplicando á la ecuacion (3) el primer método, se encuentran las dos formulas $\left\{\begin{array}{l} x=1-3t \\ y=51+7t \end{array}\right\}$.

Trasportando estas dos espresiones de x y de y á la primera ecuacion, se obtiene

$$5(1-3t)+4(51+7t)+z=272,$$

ó reduciendo, $$z=63-13t.$$

Las tres incógnitas se hallan ahora espresadas *como funciones enteras* de la indeterminada t. Dando, pues, á t valores enteros cualesquiera, se obtendrán otros semejantes para x, y, z; y estos valores satisfarán á ambas ecuaciones propuestas; porque, segun lo que acabamos de decir, el sistema de las tres fórmulas *equivale á las dos ecuaciones.*

Si se piden valores enteros y positivos para x, y, z, es evidente que t no puede ser positivo, porque seria x negativo; pero se puede suponer $t=0, -1, -2, \ldots$, hasta $t=-\frac{51}{7}$ ó $-7\frac{2}{7}$, es decir, -7, pues que t debe ser entero.

Haciendo, pues,

$$t=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,$$

se encuentra
$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x=1, & 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & 19, & 22, \\ y=51, & 44, & 37, & 30, & 23, & 16, & 9, & 2, \\ z=63, & 76, & 89, & 102, & 115, & 128, & 141, & 154; \end{array}\right.$$

por donde se ve que el problema es susceptible de *ocho soluciones* diferentes.

Sean, como nuevo ejemplo, las ecuaciones

$$(1)\qquad 6x+7y+4z=122,$$
$$(2)\qquad 11x+8y-6z=145.$$

Para eliminar z entre estas ecuaciones, multipliquemos la primera por 3 y la segunda por 2, y sumemos luego los resultados miembro á miembro; sale

$$(3)\qquad 40x+37y=656,$$

ecuacion para la cual se hallan, segun el primer método,

$$\left\{\begin{array}{l} x=37t+9 \\ y=8-40t \end{array}\right\}.$$

Trasportando estos valores á la ecuacion (1) se obtiene

$$6(37t+9)+7(8-40t)+4z=122,$$

ó reduciendo
$$(4)\qquad 2z-29t=6.$$

Aquí no está la incógnita z, como las otras dos x é y, espresada como funcion entera de la indeterminada t. De modo que es preciso aun aplicar á la ecuacion (4) uno de los dos métodos conocidos.

Se tiene, segun una de las observaciones del núm. 132, para las fórmulas relativas á esta ecuacion,

$$t=2t',\ z=29t'+3.$$

Como por otra parte todo valor entero de t, sustituido en las espresiones de x y de y dará otras semejantes para estas incógnitas, se sigue que si se introduce $2t'$ en lugar de t, se obtendrán las fórmulas.

$$x=74t'+9,$$
$$y=8-80t',$$
$$z=29t'+3,$$

que comprenderán todos los *sistemas de valores enteros* de x, y, z, á propósito para verificar las ecuaciones propuestas.

Si se quieren solamente soluciones *directas*, es visible que t' no puede ser positivo, pues que entónces seria y negativo; y t' no puede ser negativo, pues que z y x serian negativos.

Pero la hipótesis $t'=0$ da $x=9$, $y=8$, $z=3$; luego este sistema es el único que satisface á las dos ecuaciones.

136. Reasumiendo la marcha precedente, se concluye de ella la regla siguiente general:

1°. *Elimínese una de las incógnitas entre las ecuaciones propuestas, y búsquense para la ecuacion resultante de esta eliminacion las fórmulas que dan las dos incógnitas que entran en ella, como* FUNCION ENTERA *de una indeterminada* t.—2°. *Sustitúyanse estas espresiones en una de las ecuaciones propuestas, lo que da una nueva ecuacion que no encierra ya mas que* t *y la incógnita que se habia eliminado al principio.* —3°. *Determínense para esta nueva ecuacion las dos fórmulas que dan las espresiones de las dos incógnitas que entran en ella, como* FUNCION ENTERA *de una segunda indeterminada* t'.—4°. *Sustitúyase en fin la espresion de* t *en las de las dos primeras incógnitas.*

Los valores de las tres incógnitas se hallan de esta manera espresados como funcion entera de t'; y no se trata ya, despues de esto,

sino de determinar para t los límites entre los cuales deben encontrarse estos valores para que los de las incógnitas principales sean enteros y positivos.

NOTA. Siempre que una de las incógnitas tiene por coeficiente la unidad en una de las ecuaciones, es mas sencillo eliminar esta incógnita, porque despues de haber espresado las otras dos como *funcion entera* de una misma indeterminada, si se transportan estos valores á la ecuacion en que la tercera incógnita se halla afectada de un coeficiente igual á la unidad, se obtiene inmediatamente dicha tercera incógnita como *funcion entera* de la misma indeterminada; de modo que en este caso basta una sola operacion. Pueden servir de ejemplo las dos ecuaciones del núm. 135.

137. Hé aquí la marcha que debe seguirse para tres ecuaciones con cuatro incógnitas: *Despues de haber eliminado una de las incógnitas, se espresan con ayuda de las dos ecuaciones resultantes, y con arreglo á lo que se acaba de decir, las otras tres incógnitas como* FUNCION ENTERA *de una misma indeterminada; y se sustituyen estos valores en una de las ecuaciones propuestas. Si en la nueva ecuacion, los coeficientes de las dos incógnitas que entran en ella son diferentes de la unidad, se establecen dos fórmulas que dan estas incógnitas como* FUNCION ENTERA *de una segunda indeterminada; se reemplaza despues en las espresiones de las tres primeras incógnitas el valor de la primera indeterminada como funcion de la segunda, y se obtienen de este modo las cuatro incógnitas primitivas como* FUNCION ENTERA *de la segunda indeterminada.*

El mismo razonamiento se haria para cuatro ecuaciones con cinco incógnitas, etc.

138. Propondremos como ejercicio las cuestiones siguientes:

PRIMERA CUESTION. *Un monedero tiene tres clases de plata. Sobre 1 kilógramo, la primera contiene* $\frac{7}{8}$ *de plata, la segunda* $\frac{11}{16}$ *y la tercera* $\frac{9}{16}$. *Desea hacer una liga de 30 kilógramos, que sobre 1 kilógramo contenga* $\frac{3}{4}$ *de plata. ¿Cuántos kilógramos* (en números enteros) *debe tomar de cada clase?*

$$\left\{ \text{Respuesta.} \left\{ \begin{array}{lllll} x=10, & 12, & 14, & 16, & 18, \\ y=20, & 15, & 10, & 5, & 0, \\ z=\ 0, & 3, & 6, & 9, & 12, \end{array} \right. \right.$$

es decir, *cinco* soluciones, admitiendo 0 para valores de y y de z.

SEGUNDA CUESTION. *Hallar tres números enteros tales que la suma de sus productos respectivos por los números 3, 5, 7, sea igual á 560, y que la suma de sus productos por los cuadrados 9, 25, 49 sea igual á 2920.*

$$\left(\textit{Respuesta.} \left\{ \begin{array}{ll} x=51, & 50, \\ y=82, & 40, \\ z=15, & 30, \end{array} \right\} \text{ es decir } \textit{dos} \text{ soluciones.} \right)$$

TERCERA CUESTION. *Hallar un número entero N que dividido por 11, dé la resta 3; dividido por 19 la resta 5; y dividido por 29 la resta 10.*

(*Respuesta.* $N=4128+6061t$, en que t es entero; de manera que 4128 es el menor número entero absoluto que satisface al enunciado.)

CUARTA CUESTION. *Hallar para* x *un número tal que las espresiones* $\frac{3x-10}{7}$, $\frac{11x+8}{17}$, $\frac{16x-1}{5}$, *sean números enteros.*

(*Respuesta.* $x=211+695t$.)

139. *Observacion importante.* Si en la última cuestion se designan por y, z y v, los cocientes $\frac{3x-10}{7}$, $\frac{11x+8}{17}$, $\frac{16x-1}{5}$, se tiene para las ecuaciones del problema,

$$3x-10=7y,\ 11x+8=17z,\ 16x-1=5v;$$

ó bien... $3x-7y=10$, $11x-17z=-8$, $16x-5v=1$.

Seria preciso aplicar la marcha indicada en el número precedente para tres ecuaciones de cuatro incógnitas. Pero vamos á desarrollar un medio mucho mas sencillo de determinar el valor de x que es aquí la incógnita principal. Medio que es aplicable por otra parte á todas las cuestiones del mismo género.

Primeramente, si consideramos la tercera espresion, $\frac{16x-1}{5}$, cuyo denominador es el mas simple, se convierte en

$$3x+\frac{x-1}{5};$$

de suerte que para que sea entera es preciso y basta que $x-1$ sea un múltiplo de 5.

Supongamos, pues, $\frac{x-1}{5}=t$; resulta $x=1+5t$.

Todo valor entero de t, sustituido en esta última ecuacion dará para x un número que satisfará á la tercera condicion del enunciado.

Sustituyamos en la primera espresion, $\frac{3x-10}{7}$ el valor de x que se acaba de obtener, y se cambia en

$$\frac{15t-7}{17}, \text{ ó reduciendo, } 2t-1+\frac{t}{7}.$$

Se ve que este será entero si se supone $t=7t'$; por otro lado esta condicion es necesaria. De modo que para que sean enteras la primera y la tercera de las espresiones propuestas, es preciso y basta que se tenga. . . . . $x=1+5t$,
siendo t de la forma $t=7t'$, lo que da. . . . . $x=1+35t'$.

Llevemos á la segunda espresion, $\frac{11x+8}{17}$, este nuevo valor de x; sale

$$\frac{385t+19}{17}, \quad \text{ó} \quad 23t'+1+\frac{2(11-3t')}{17}.$$

Pero 2 es primero con 17; luego para que la segunda espresion sea un número entero, es preciso y basta que $1-3t'$ sea divisible por 17.

Suponiendo $\frac{1-3t'}{17}=t''$, se saca. . . . . $t'=\frac{1-17t''}{3}$,

ó, efectuando la division. . . . . $t'=-6t''+\frac{t''+1}{3}$.

Sea $\frac{t''+1}{3}=t'''$, se obtiene. . . . . $t''=3t'''-1$,

de donde $t'=-6(3t'''-1)+t'''$, ó. . . . . $t'=-17t'''+6$.

Trasportando este valor á la espresion $x=1+35t'$, se obtiene, hecha la reduccion,

$$x=211-595t'''.$$

Tal es la fórmula á propósito para dar todos los valores de x susceptibles de satisfacer al enunciado.

Sea $t'''=0$, se halla $x=211$; este es el menor de todos los números buscados.

Suponiendo á t''' valores negativos cualesquiera, se obtendrian las demas soluciones [en números positivos].

Nota. Observaremos que 595, coeficiente de t''' en la fórmula, es el producto $7\times17\times5$ de los denominadores de las tres espresiones propuestas. Seria fácil darse cuenta de esta propiedad, que se modifica cuando los denominadores no son primeros entre sí; porque en este caso el coeficiente es igual *al menor múltiplo de los denominadores.*

140. Nos falta aun hablar de los problemas llamados *mas que indeterminados*, es decir, de aquellos en que el número de las ecuaciones es menor en *dos* ó *mas unidades* que el número de las incógnitas.

Sea primeramente la ecuacion de tres incógnitas, $ax+by+cz=d$. Si se hace pasar el término cz al segundo miembro, sale

$$ax+by=d-cz, \quad \text{ó} \quad ax+by=c',$$

(en que c' designa la cantidad $d-cz$, que se mira por de pronto como conocida).

Sentado esto, *se deducen para la ecuacion* $ax+by=c$,

las dos fórmulas $x=\alpha-bt$, $y=\beta+at$.

Hecho lo cual, *se reemplaza* en α y β, c' *por su valor* $d-cz$; y entónces x é y se hallan espresados *como funcion entera de la indeterminada* t, *y de la tercera incógnita* z.

Supongamos, por ejemplo, que se haya propuesto *pagar* 187 *francos con piezas* de 5 fr., 6 fr., y 20 fr., *sin ninguna otra moneda.*

Designemos por x, y, z, los tres números de piezas que es preciso dar de cada clase; se tiene la ecuacion

$$5x+6y+20z=187,$$

que se convierte en $5x+6y=187-20z=c'$.

Sacando de esta ecuacion el valor de x

se tiene. . . . . $x=\frac{c'=6y}{5}$.

ó bien. . . . . $x=-y+\frac{c'-y}{5}$.

Suponiendo $\frac{c'-y}{5}=t$, se deduce $y=c'-5t$,

de donde. . . . . $x=-c'+6t$.

Reemplazando en estas dos fórmulas c' por su valor $187-20z$, se

encuentra en fin. . . . . $\begin{cases} y=\ 187-20z-5t, \\ x=-187+20z+6t. \end{cases}$

Miéntras se admitan para x é y números enteros, positivos ó negativos, se podrán dar á z y á t valores enteramente arbitrarios; pero si se quiere satisfacer directamente al enunciado, la forma misma de la ecuacion propuesta, $5x+6y+20z=187$, prueba que z no debe recibir valores mayores que $\frac{187}{20}$ ó $9\frac{7}{20}$; porque de lo contrario x ó y seria negativo.

Hagamos, pues, sucesivamente $z=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ 8,\ 9.$

Si se hace $z=0$, los valores de x y de y

se convierten en. . . . . $\begin{cases} x=-187+6t, \\ y=\ 187-5t; \end{cases}$

fórmulas que prueban que t debe ser $>\frac{187}{6}$, pero $<\frac{187}{5}$, ó $>31\frac{1}{6}$, pero $<37\frac{2}{5}$. Luego t puede recibir seis valores, á saber 32, 33, 34, 35, 36 y 37.

Así es que para $z=0$, se tiene. . . $\begin{cases} t=32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37, \\ x=\ 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ 35, \\ y=27,\ 22,\ 17,\ 12,\ 7,\ 2. \end{cases}$

Sea $z=1$; se encuentra. . . . . $\begin{cases} x=-167+6t, \\ y=\ 167-5t; \end{cases}$

de donde $t>\frac{167}{6}$ ó $27\frac{5}{6}$, pero $<\frac{167}{5}$ ó $33\frac{2}{5}$, lo que da tambien los seis valores 28, 29, 30, 31, 32 y 33.

De modo que para $z=1$, se tiene. . $\begin{cases} t=28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33, \\ x=\ 1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31, \\ y=27,\ 22,\ 17,\ 12,\ 7,\ 2, \end{cases}$

Para $z=2$ se hallaria. . . . . $\begin{cases} t=25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29, \\ x=\ 3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27, \\ y=22,\ 17,\ 12,\ 7,\ 2, \end{cases}$

Para $z=3$. . . . . $\begin{cases} t=22,\ 33,\ 24,\ 25, \\ x=\ 5,\ 11,\ 17,\ 23, \\ y=17,\ 12,\ 7,\ 2, \end{cases}$

. . . . . .

. . . . . .

Para $z=8$, las fórmulas serian. . . $\begin{cases} t=-27+6t, \\ y=\ 27-5t; \end{cases}$

de donde $t>\frac{27}{6}$ ó $4\frac{1}{2}$, pero $<\frac{27}{5}$ ó $5\frac{2}{5}$. Entónces t no puede recibir mas que el valor $t=5$; lo cual da $z=3$, $y=2$.

En fin, á la hipótesis $z=9$ no corresponde ninguna *solucion*; porque las fórmulas se convierten en $x=-7+6t$, $y=7-5t$, de donde $t>\frac{7}{6}$ ó $1\frac{1}{6}$, pero $t<\frac{7}{5}$ ó $1\frac{2}{5}$; resultados contradictorios.

141. Se echa de ver claramente lo que habria que practicar para dos ecuaciones de cuatro incógnitas, para tres de cinco, etc. Sin embargo, daremos tambien la resolucion completa de una cuestion de este género, para mostrar de qué manera, con ayuda de algunas consideraciones particulares, se llega muchas veces á simplificar los cálculos.

QUINTA CUESTION. *Un labradar compra 100 cabezas de ganado por 100 luises, á saber: bueyes á 10 luises la res, vacas á 5 luises, terneras á 2 luises y carneros á medio luis cada uno. ¿Cuántos animales ha comprado de cada especie?*

Sean x, y, z, u, los números buscados; se tienen las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z+\ \ u=100 \\ 10x+5y+2z+\frac{1}{2}u=100 \end{array}\right\} \text{ ó } \left\{\begin{array}{r} x+\ \ y+\ z+u=100 \\ 20x+10y+4z+u=200 \end{array}\right.$$

Restando la primera ecuacion
de la segunda se obtiene. . . . . $19+9y+3z=100$,

ecuacion que se tendria que tratar como en el número precedente.

Pero observemos ante todo que es preferible espresar y y z como *funciones enteras* de x, 1°. porque es evidente que x no debe tener ningun valor mayor de $\frac{100}{19}$ ó $5\frac{5}{19}$, 2°. porque los coeficientes de y y de z tienen un factor comun; lo que llevará necesariamente consigo una condicion propia para determinar los valores convenientes de x.

Segun estas consideraciones traspongamos el término $19x$; sale $9x+3x=100-19x$, ó bien, $3y+z=\frac{100-19x}{3}$.

Ahora bien; pues que se piden para x, y, z, u, números enteros y positivos, es preciso que $\frac{100-9x}{3}$ sea entero y positivo; pero no hay mas que $x=1$ y $x=4$, que puedan evidentemente satisfacer á esta doble condicion.

De modo que ya x no puede tener por valores mas que $x=1$ y $x=4$.

Sea $x=1$, resulta $3y+z=27$, ó . . . . $z=27-3y$.

Sustituyendo estos valores de x y de z en la primera de las ecuaciones propuestas, se halla. . . . . $u=72+2y$.

La primera de estas dos fórmulas muestra que y no puede ser >9; así

$$\text{para } x=1\text{, se tiene } \begin{cases} y=0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9; \\ z=27, & 24, & 21, & 18, & 15, & 12, & 9, & 6, & 3, & 0; \\ u=72, & 74, & 76, & 78, & 80, & 82, & 84, & 86, & 88, & 90. \end{cases}$$

Sea $x=4$; sale $3y+z=8$, de donde $z=8-3y$;
$u=88+2y$.

La espresion de z prueba que y no puede ser >2;

$$\text{así para } x=4\text{, se halla } \begin{cases} y=0, & 1, & 2; \\ z=8, & 5, & 2; \\ u=88, & 90, & 92. \end{cases}$$

Por donde se ve que la cuestion propuesta no es susceptible mas que de *trece* soluciones, y de *diez* si se esceptúan las soluciones 0.

NOTA. El medio de simplicacion que se acaba de indicar se convierte algunas veces en una modificacion indispensable del método espuesto en el núm. 140.

Esto es lo que se verificaria, por ejemplo, para la ecuacion

$$6x+10y-15z=11,$$

en la cual se reconoce que los tres coeficientes considerados dos á dos tienen un factor comun.

142. El *análisis indeterminado del segundo grado* tiene por objeto, así como el del primero, resolver en números enteros los problemas que dan lugar á un número de ecuaciones menor que el de las incógnitas. Pero como en general una ecuacion del segundo grado de dos incógnitas da la una de ellas *como funcion irracional* de la otra, se sigue que la cuestion consiste, 1°. en determinar, para una de las incógnitas valores racionales que tengan la propiedad de dar otros semejantes para la segunda; 2°. en escoger entre los valores de la primera incógnita los valores enteros que dén otros semejantes para la segunda. Se concibe pues, que el análisis indeterminado del segundo grado debe ofrecer mayores dificultades que el del primer grado. En efecto, esta es una de las teorías mas difíciles del análisis algebráico; y sale ya completamente de la esfera de unos elementos. Remitimos sobre la materia á la *Teoría de los números* de Legendre y al *Álgebra* de M. Lhuillier, obra de donde hemos ya tomado los enunciados de un gran número de problemas, y en que se hallan tratadas una serie de cuestiones del segundo grado de dos incógnitas, cuyas ecuaciones no encierran mas que el rectángulo ó producto de las incógnitas.