CAPÍTULO V.

FORMACION DE LAS POTENCIAS Y ESTRACCION DE RAÍCES DE UN GRADO CUALQUIERA.

Introduccion. Así como la resolucion de las ecuaciones del segundo grado supone conocidos los procedimientos de la estraccion de la raíz cuadrada, así tambien la resolucion de las ecuaciones del tercero, cuarto..... grado, exige que se sepa estraer la raíz tercera, cuarta..... de una cantidad, ya sea numérica, ya algebráica. (Véase el núm. 2 para la definicion de las voces *potencia* y *raíz.*)

La elevacion á potencias, la estraccion de las raíces de grado cualquiera y el cálculo de los radicales serán el objeto principal de este nuevo capítulo, que con el primero y una parte del tercero, constituye el todo de las operaciones que puede ofrecerse efectuar sobre números espresados algebráicamente.

Aunque puede obtenerse una potencia cualquiera de un número segun las reglas de la multiplicacion, ya sea aritmética ya algebráica, sin embargo, la formacion de dicha potencia se halla sujeta á una *ley* que es preciso conocer cuando se quiere *pasar de la potencia á la raíz.* Pero como la ley de composicion del cuadrado de una cantidad numérica ó algebráica está fundada (núm. 86) sobre la espresion del cuadrado de un binomio, así tambien la ley relativa á una potencia de grado cualquiera se deduce de la espresion de una potencia del mismo grado de un binomio. Por la determinacion *del desarrollo de una potencia cualquiera de un binomio* debemos, pues, empezar esta nueva teoría.

§ I. BINOMIO DE NEWTON, Y CONSECUENCIAS QUE SE DERIVAN DE ÉL.

143. *Introduccion.* Si se efectúa el producto de muchos binomios iguales $x+a$, se llega á los resultados siguientes:

$$(x+a)^1=x+a,$$
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3,$$
$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4,$$
$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

Echando una ojeada á estos diferentes desarrollos se reconoce fácilmente *una ley* segun la cual proceden en cuanto á los esponentes de x y de a; pero no sucede lo mismo con los coeficientes. Sin embargo, Newton llegó á descubrir una por cuyo medio, dado el grado de una potencia de un binomio, puede formarse esta potencia sin necesidad de pasar ántes por todas las potencias inferiores. No ha dejado vestigio alguno de los razonamientos que pudieran conducirle á dicha ley; pero posteriormente se ha demostrado de una manera rigorosa su existencia. De todas las demostraciones conocidas la mas elemental es la fundada sobre la *teoría de las combinaciones.* Sin embargo, como aun esta es bastante complicada, comenzaremos por simplificar su esposicion para resolver algunos problemas relativos á las combinaciones; de donde será fácil en seguida deducir el desarrollo de una potencia cualquiera de un binomio, ó en otros términos, *la fórmula del binomio.*

Teoría de las combinaciones.

144. Vimos ya (núm. 16) que el producto de un número n de factores $a, b, c, d, \ldots$, no cambia, cualquiera que sea el órden en que se efectúe su multiplicacion. Supongamos, pues, que se quiera determinar el *número total* de las maneras con que estas diferentes letras pueden disponerse unas detras de las otras. Los resultados que corresponden á cada disposicion que se hace esperimentar á estas letras se llaman *permutaciones.*

Así es como dos letras, a y b dan un producto único ab, aunque suministran las dos permutaciones ab y ba.

Del mismo modo las tres letras *a, b, c,* dan un producto único *abc*, aunque suministran las seis permutaciones *abc, acb, cab, bac, bca, cba;* y así sucesivamente.

Sea ahora un número *m* de letras *a, b, c, d, e,...*; si se colocan las unas detras de las otras, 2 á 2, 3 á 3, 4 á 4,..., de todos los modos posibles, cuidando, sin embargo, que en cada resultado el número de las letras sea menor que el de las letras dadas, se puede pedir la espresion del *número total* de los resultados que se obtienen así. Estos resultados son lo que se llaman *combinaciones.*

Así, *ab, ac, ad,..., ba, bc, bd,..., ca, cb, cd,...*, son *combinaciones* 2 á 2 de las *m* letras.

Igualmente, *abc, abd,...., bac, bad,...., acb, acd,....*, son *combinaciones* 3 á 3.

En fin cuando se disponen de este modo las letras; 2 á 2, 3 á 3, 4 á 4,..., puede exigirse que dos cualesquiera de los resultados que se forman no se hallen compuestos de las mismas letras, es decir que difieran entre sí al ménos por una de ellas; pudiéndose pedir entónces el número total de los resultados que se obtienen de esta manera. En este caso los resultados toman el nombre de *productos diversos.*

Así, *ab, ac, bc,..... ad, bd,.....* son *productos* 2 á 2, enteramente distintos los unos de los otros, pues que dos cualesquiera de los resultados difieren al ménos por una de las letras.

Del mismo modo, *abc, abd..... acd, bcd.....* son productos 3 á 3.....

Existe, pues, una diferencia esencial en la significacion de las palabras *permutacion, combinacion* y *producto.*

1°. Se da el nombre de PERMUTACIONES *á los resultados que se obtienen disponiendo las unas detras de las otras, y en todas las maneras posibles, en una misma linea, un número determinado de letras, de suerte que entren todas en cada resultado, y que cada una entre solo una vez.*

2°. El nombre de COMBINACIONES *se aplica á los resultados que se obtienen disponiendo las unas detras de las otras, de todos los modos posibles, en una misma linea,* 2 á 2, 3 á 3, 4 á 4.... *n* á *n*, un número *m* de letras, siendo $m<n$.

Sin embargo, se puede suponer $n=m$; en cuyo caso se convierten en simples permutaciones las colocaciones *n* á *n*.

3°. En fin llámanse PRODUCTOS *los grupos de combinaciones, que difieren entre sí al ménos por una de las letras que entran en ellos.*

Importa que los discípulos se penetren bien de estas definiciones, para entender la resolucion de los problemas siguientes.

145. PRIMER PROBLEMA. *Determinar el número total de las* PERMUTACIONES *de que* n *letras son susceptibles.*

Las dos letras *a* y *b* dan evidentemente desde luego las dos permutaciones *ab* y *ba*. Así *el número de las permutaciones de dos letras es* 2, ó 1×2.

Sean ahora 3 letras, *a, b, c*. Pongamos aparte una cualquiera de estas letras, *c*, por ejemplo, y escribamos á la derecha de las dos colocaciones *ab* y *ba* que dan las otras dos, la letra *c;* resultarán las dos permutaciones de tres letras, *abc, bac*. Pero como se puede de esta manera poner aparte cada una de las tres letras, se sigue que el *número total de las permutaciones* de tres letras es igual á 2×3, ó $1\times2\times3$.

En general sea un número *n* de letras, *a, b, c, d....*, y supongamos ya conocido el *número total de las permutaciones de* (n—1) *letras*, número que designaremos por Q.

Consideremos aparte una de las *n* letras, y escribámosla á la derecha de cada una de las Q permutaciones que dan las otras $(n-1)$ letras; y resultan Q permutaciones de *n* letras, terminadas por la letra que se habia aislado al principio. Ahora bien; como de este modo se puede poner aparte cada una de las *n* letras, se sigue que el *número total de las permutaciones de* n *letras* es igual á.... $Q\times n$.

Sea $n=2$; Q designa entónces el número de las permutaciones que puede dar una sola letra; luego $Q=1$, y sale, en este caso particular,

$$Q\times n=1\times2.$$

Sea $n=3$; Q espresa entónces el número de las permutaciones de $(3-1)$, ó de 2 letras, y es igual á 1×2.

Así,
$$Q\times n=1\times2\times3.$$

Sea $n=4$; Q designa, en este caso, el número de las permutaciones de 3 letras, y es igual á $1\times2\times3$. Luego

$$Q\times n=1\times2\times3\times4.$$

Se ve, pues, que la fórmula $Q\times n$ encierra todos los casos particulares del problema propuesto. De modo que recordando de nuevo los razonamientos anteriores puede resolverse inmediatamente el caso general, salvo deducir de ellos en seguida todos los casos particulares.

146. SEGUNDO PROBLEMA. *Dado un número* m *de letras* a, b, c, d.... *determinar el número total de las combinaciones* n *á* n, *que se pueden formar con estas* m *letras, suponiendo á* m *mayor que* n.

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

Para resolver al instante esta cuestion general, supongamos ya conocido el número total de las *combinaciones* $(n-1)$ á $(n-1)$ que se pueden hacer con las m letras; y designemos este número por P.

Considerando una cualquiera de estas combinaciones, escribamos á su derecha cada una de las letras que no entran en ella y cuyo número es necesariamente $m-(n-1)$ ó $(m-n+1)$; es evidente que se formará de este modo un número $(m-n+1)$ de combinaciones de n letras, diferentes todas entre sí por la última letra.

Consideremos una nueva combinacion de $(n-1)$ letras, y escribamos á su derecha las $(m-n+1)$ letras que no forman parte de ella; obtendremos tambien un número $(m-n+1)$ de combinaciones de n letras, que se diferenciarán todas entre sí y de las precedente al ménos por la disposicion de una de las $(n-1)$ primeras letras. Como por otra parte se puede considerar aisladamente cada una de las P combinaciones $(n-1)$ á $(n-1)$, y escribir sucesivamente á su derecha las otras $(m-n+1)$ letras, se sigue que el número total de combinaciones de m letras n á n está espresado por P $(m-n+1)$.

Se quieren ahora hallar como casos particulares, los números de combinaciones de m letras, 2 á 2, 3 á 3, 4 á 4...?

Hagamos $n=2$, de donde $m-n+1=m-1$; P espresa en este caso el número total de las combinaciones $(2-1)$ á $(2-1)$, ó 1 á 1, y es por consiguiente, igual á m;
luego la fórmula se convierte en $m(m-1)$.

Sea $n=3$, de donde $m-n+1=m-2$; P espresa entónces el número de las combinaciones 3 á 3, ó es igual á $m(m-1)(m-2)$; luego la fórmula se convierte en $m(m-1)(m-2)$, y así sucesivamente.

Nota. Segun el modo con que han sido deducidos de la fórmula general P $(m-n+1)$ los casos particulares, puede concluirse que esta fórmula, desarrollada, se convierte en

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1);$$

es decir *que se compone del producto de los* n *números consecutivos, decreciendo desde* m *inclusive hasta* m−(n−1) ó (m−n+1) *tambien inclusive.*

Por otra parte es fácil deducir de esta fórmula desarrollada la del número precedente, es decir el valor de $Q\times n$ tambien desarrollada.

En efecto, vimos (número 144) que las combinaciones se convierten en permutaciones cuando se supone el número de las letras que entran en cada combinacion igual al número total de las letras consideradas.

Así para pasar del número total de las combinaciones de m letras

n á n, al número de permutaciones de n letras no hay mas que hacer en el desarrollo anterior, $m=n$; lo que da

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 1.$$

Invirtiendo el órden de los factores y observando que por ser el último de ellos 1, el penúltimo es 2, el precedente 3... se obtiene, para el desarrollo de $Q\times n$,

$$1,\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots(n-2)(n-1)n,$$

espresion cuyos factores no son otra cosa que los *números enteros consecutivos, comprendidos desde* 1 *inclusive hasta* n *inclusive.*

147. Tercer problema. *Determinar el número total de los productos diferentes que se pueden formar con* m *letras tomadas* n *á* n.

Designemos por X el número total de las *combinaciones* n á n que pueden formarse con m letras, por Y el número de las *permutaciones* de que n letras son susceptibles, y en fin por Z el número total de los *productos diferentes* n á n, número que se trata de determinar.

Es evidente que para obtener todas las combinaciones posibles de m letras n á n, bastaria hacer esperimentar á las n letras de cada uno de los Z *productos*, todas las permutaciones de que son susceptibles estas letras. Pero un solo producto de n letras da por hipótesis, Y permutaciones; luego Z productos de n letras deben dar $Y\times Z$ combinaciones n á n; y como por otra parte se ha designado por X el número total de las combinaciones, se sigue que las tres cantidades, X, Y, Z, están ligadas entre sí por la relacion $X=Y\times Z$; de donde se deduce $Z=\frac{X}{Y}$.

Pero se encuentra (núm. 146),

$$X=P\,(m-n+1),$$

y (núm. 145) $Y=Q\times n$.

Luego en fin, $Z=\frac{P\,(m-n+1)}{Q\times n}=\frac{P}{Q}\times\frac{m-n+1}{n}$.

Como P espresa el número total de las combinaciones $(n-1)$ á $(n-1)$ y Q el número total de las permutaciones de $(n-1)$ letras, se sigue

que $\frac{P}{Q}$ espresa el número de los productos diferentes de m letras $(n-1)$ á $(n-1)$.

Segun esto, supongamos que se pidan, como casos particulares, los productos de 2 á 2, 3 á 3, 4 á 4...

Hagamos $n=2$, en cuyo caso $\frac{P}{Q}$, por espresar el número de los productos $(2-1)$ á $(2-1)$, ó 1 á 1, es igual á m;

la fórmula anterior se convierte en $m \times \frac{m-1}{2}$ ó $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

Hagamos $n=3$, en cuyo caso $\frac{P}{Q}$ espresa el número de los productos 2 á 2, es igual á $\frac{m(m-1)}{2}$;

la fórmula se convierte en $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$.

Se hallaria tambien $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$

para el número de los productos 4 á 4, etc.....; y en general para el número de las combinaciones n á n, se tiene

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4.5\ldots(n-1)n};$$

que es la espresion $\frac{P(m-n+1)}{Q \times n}$ desarrollada.

Nota. Esta última espresion no tiene significacion alguna cuando se supone en ella $n=1$; lo que depende de que no da cierto número desconocido de productos sino como *funcion* de otro número de productos ya determinado; pero los productos mas simples son los productos de *una* á *una* cuyo número es m. Solo, pues, á partir de $n=2$ es aplicable la fórmula.

Demostracion de la fórmula del binomio.

148. Para descubrir mas fácilmente la ley del desarrollo de la potencia m del binomio $x+a$, empezaremos por observar la ley del producto de varios binomios $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$,.... que tienen su primer

término comun, y diferentes los segundos. (Este artificio tiene por objeto impedir la reduccion de los términos semejantes.)

$$\begin{array}{lllll}
 & x+a & & & \\
 & x+b & & & \\
\hline
1^{er}.\ \text{producto}\ldots & x^2+a & +ab & & \\
 & b & & & \\
 & x+c & & & \\
\hline
2^{o}.\ldots\ldots\ldots & x^3+a & x^2+ab & x+abc & \\
 & +b & +ac & & \\
 & +c & +bc & & \\
 & x+d & & & \\
\hline
3^{o}.\ldots\ldots\ldots & x^4+a & x^2+ab & x^2+abc & x+abcd \\
 & +b & +ac & +abd & \\
 & +c & +ad & +acd & \\
 & +d & +bc & +bcd & \\
 & & +bd & & \\
 & & +cd & &
\end{array}$$

Efectuadas estas multiplicaciones segun las reglas ordinarias de la multiplicacion algebráica, se reconoce en los tres productos que preceden la ley siguiente:

1°. En cuanto á los esponentes, el de x es desde luego igual al número de binomios multiplicados. Este esponente disminuye en seguida una unidad del un término al siguiente, hasta el último, en que es igual á cero.

2°. En cuanto á los coeficientes de las diversas potencias de x, el del primer término es la unidad; el del segundo término es igual á la suma de los segundos términos de los binomios; el del tercer término es igual á la suma de los productos diferentes de estos mismos segundos términos multiplicados dos á dos; el coeficiente del cuarto término es igual á la suma de los productos diferentes de tres á tres. Dejándonos llevar de la *analogía* podemos decir que el coeficiente de un término que tiene otros n delante de sí, es igual á la suma de los productos diferentes n á n de los segundos términos de los binomios. En fin, el último término es igual al producto de los segundos términos de los binomios.

Para estar seguros de que es general esta ley supongamos que se haya encontrado verdaderamente para el *producto de un número m* de

binomios, y veamos si tiene tambien lugar cuando se introduce un nuevo factor en el producto.

Sea, pues

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + Mx^{m-n+1} + Nx^{m-n} + \ldots\ldots + U$$

el producto de m factores binomios (en que Nx^{m-n} representa un término que tiene á n delante de sí, y Mx^{m-n+1} el que le precede inmediatamente.

Sea por otra parte $x+l$ el nuevo factor introducido; se tiene para el producto ordenado

$$\begin{array}{c|c|c|c} x^{m+1}+A & x^m+B & x^{m-1}+C\,x^{m-2}+\ldots\ldots+N & x^{m-n+1}+\ldots \\ +l & +Al & +Bl \qquad\qquad +Ml & +Ul. \end{array}$$

Ya *la ley de los esponentes* es evidentemente la misma.

En cuanto á los coeficientes, 1º..... el del primer término es *la unidad.*

2º... $A+l$, ó el coeficiente de x^m, es tambien *la suma de los segundos términos de los* $(m+1)$ *binomios.*

3º. B es por hipótesis igual á la suma de los productos diferentes de los segundos términos de los m primeros binomios 2 á 2; Al espresa la suma de los productos de cada uno de los segundos términos de los m primeros binomios, multiplicada por el nuevo segundo término l; luego, $B+Al$ es tambien la suma de los productos diferentes dos á dos de los segundos términos de los $(m+1)$ *binomios...*

Y en general como N espresa la suma de los productos n á n de los segundos términos de los m primeros binomios, y como Ml representa la suma de los productos $(n-1)$ á $(n-1)$ de estos segundos términos, multiplicados por el *nuevo segundo término* l, se sigue que $N+Ml$ ó el coeficiente que en el polinomio de grado $(m+1)$ tiene n términos delante de sí, es igual al producto de los $(m+1)$ segundos términos.

Así la ley de composicion, supuesta verdadera para el producto de un número m de binomios, lo es tambien para un número $(m+1)$; luego es general.

Concibamos ahora que en el producto efectuado de m factores

binomios, $\quad x+a,\ x+b,\ x+c,\ x+d,\ldots,$

se haga $\quad a=b=c=d\ldots;$

la espresion de este producto $\quad (x+a)(x+b)(x+c)\ldots.$

se cambia en $\quad (x+a)^m.$

En cuanto á su desarrollo, siendo los coeficientes

$$a+b+c+d+\ldots,\ ab+ac+ad+\ldots,\ abc+abd+acd+\ldots,$$

1º. El coeficiente de x^{m-1} se convierte en $a+a+a+\ldots$, es decir a tomado tantas veces como letras $a, b, c,\ldots$ hay, y se reduce por consiguiente á ma.

2º. El coeficiente de x^{m-2} se reduce á $a^2+a^2+a^2\ldots$ ó bien á tantas veces a^2 como productos diferentes pueden formarse con m letras multiplicadas 2 á 2, ó bien en fin (núm. 147) á

$$m.\frac{m-1}{2}a^2.$$

3º. El coeficiente de x^{m-3} se reduce al producto de a^3 multiplicado por el número de productos diferentes de m letras tomadas 3 á 3, ó bien á $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3\ldots\ldots$

En general si se designa por Nx^{m-n} el término que tiene otros n delante de sí, el coeficiente N, que en la hipótesis en que son diferentes los segundos términos de los binomios, es igual á la suma de sus productos n á n, se reduce, cuando se los supone á todos iguales, á a^n multiplicado por el número de los productos diferentes que pueden dar m letras tomadas n á n.

Así (núm. 147) $\qquad N=\frac{P(m-n+1)}{Q\times n}a^n$.

Luego en fin se tiene la fórmula

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}$$

$$+m\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{2}a^2x^{m-3}\ldots + \frac{P(m-n+1)}{Q.\,n}a^n\,x^{m-n}\ldots + a^m.$$

149. Por poco que se examinen los diferentes términos de este desarrollo se reconoce una *ley simple* con arreglo á la cual se forma un coeficiente de órden cualquiera por medio del coeficiente precedente.

El *coeficiente de un término de órden cualquiera se forma multiplicando el coeficiente del término precedente por el esponente de* x *en este término, y dividiendo el producto por el número de los términos que preceden al que se considera.*

En efecto, tomemos el *término*, $\frac{P(m-n+1)}{Q.\,n}a^n\,x^{m-n}$ (llamado

término general porque haciendo sucesivamente $n=2, 3, 4,...$ pueden deducirse de él todos los demas); el término que le precede en un lugar es evidentemente $\frac{P}{Q} a^{n-1}x^{m-n+1}$, porque $\frac{P}{Q}$ espresa el número de las combinaciones $(n-1)$ á $(n-1)$.

Se ve, pues, que el coeficiente $\frac{P(m-n+1)}{Q.n}$ es igual al coeficiente $\frac{P}{Q}$ que le precede, multiplicado por $(m-n+1)$ esponente de a en este término, y dividido por n, número de los términos que preceden al que se considera. En esta ley, debida á Newton, es en lo que consiste principalmente la *fórmula del binomio*. Sirve para desarrollar una potencia particular, sin necesidad de echar mano de la fórmula general.

Supongamos por ejemplo, que se haya propuesto desarrollar $(x+a)^6$. Se hallará, segun esta ley,

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

Formados los dos primeros términos, lo cual no ofrece dificultad alguna en vista de los términos de la fórmula general $x^m+max^{m-1}+.$, se multipla 6, coeficiente del segundo término, por 5, esponente de x en este término, y se divide despues el producto por 2, lo que da 15 por coeficiente del tercer término. Para obtener el del cuarto, se multiplica 15 por 4, esponente de x en el tercer término, y se divide el producto por 3, número de los términos que preceden al cuarto, lo que da 20; y así sucesivamente para todos los demas términos.

Se hallaria del mismo modo

$$(x+a)^{10}=x^{10}+10ax^9+45a^2x^8+120a^2x^7+210a^5x^6$$

$$+252a^7x^5+210a^6x^4+120a^7x^3+45a^8x^2+10a^9x+a^{10}$$

Volveremos mas adelante á tratar del modo de desarrollar las potencias de las espresiones algebráicas.

Consecuencias de la fórmula del binomio y de la teoría de las combinaciones.

150. *Primera consecuencia.* Como la espresion $(x+a)^m$ está compuesta de la misma manera en a y en x, debe verificarse otro tanto para su desarrollo; luego si este desarrollo encierra un término de la

forma $Ka^n\ x^{m-n}$, debe tener otro igual á $Kx^n\ a^{m-n}$ ó $Ka^{m-n}x^n$. Estos dos términos están aquí evidentemente á igual distancia de ambos estremos, porque como el número de los términos que preceden á un término cualquiera está marcado por el esponente de a en este término, se sigue que el término $Ka^n\ x^{m-n}$ tiene n delante de sí, y que el término $Ka^{m-n}\ x^n$ tiene $m-n$ delante de sí, por consiguiente, n detras de sí (pues que el número total de los términos es $m+1$).

De modo, que *en el desarrollo de toda potencia* de un binomio, *los coeficientes de los términos igualmente distantes de ambos estremos son iguales entre sí.*

Nota. En los términos $Ka^n\ x^{m-n}$, $Ka^{m-n}\ x^n$, los dos coeficientes espresan los números de productos diferentes n á n y $(m-n)$ á $(m-n)$, que se pueden formar con m cantidades; de modo que puede concluirse tambien que *el número de los productos diferentes de* m *cantidades* n *á* n, *es igual al número de productos de á* (m—n) *de estas mismas cantidades.*

Por ejemplo, *doce* cantidades combinadas 5 á 5 dan el *mismo número* de productos que dichas *doce* cantidades combinadas (12—5) á (12—5), ó 7 á 7.

Cinco cantidades combinadas 2 á 2, dan el mismo número que *cinco* cantidades combinadas (5—2) á (5—2), ó 3 á 3.

151. *Segunda consecuencia.* Si en la fórmula general

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}+\text{ etc.},$$

se supone $x=1$, $a=1$, se convierte en

$$(1+1)^m \text{ ó } 2^m=1+m+m\frac{m-1}{2}+m\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}+\text{ etc.};$$

es decir que la *suma de los coeficientes de los diferentes términos de la fórmula del binomio es igual á la potencia de* 2, *del grado marcado por* m.

Así en la fórmula particular

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5,$$

la suma $1+5+10+10+5+1$ de los coeficientes es igual á 2^5 ó 32.

En la décima potencia (núm 149) la suma equivale á 2^{10} ó 1024.

152. Tercera consecuencia. *El producto de* p *números enteros consecutivos, comprendidos desde* (m—p+1) *hasta* m *inclusive, es divisible*