por el producto de todos los números enteros desde 1 *hasta* p; es decir que se tiene

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-p+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots p.}$$

igual á un número entero. En efecto, resulta de lo dicho en el número 147, que esta espresion representa el número de los productos diferentes p á p, que se pueden formar con m letras. Pero este número de productos debe ser entero por su naturaleza; luego la espresion anterior es necesariamente un número entero.

Invitamos á los discípulos á deducir de esta propiedad una demostracion independiente de la teoría de las combinaciones ó de la fórmula del binomio, advirtiéndoles sin embargo, que aunque es fácil de tratar la cuestion para las primeras espresiones

$$\frac{m(m-4)}{1.\ 2},\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3},$$

ofrece alguna mayor dificultad en el caso general.

---

§ II. ESTRACCION DE RAÍCES DE LOS NÚMEROS PARTICULARES.

Espuestos ya largamente en nuestra *aritmética* los procedimientos particulares de la estraccion de la raíz cuadrada y de la raíz cúbica de un número, nos limitaremos aquí á desarrollar el de la estraccion de las raíces en general, procedimiento que será fácil aplicar en seguida á los casos particulares de estraccion de la raíz 4ª, 5ª,...

153. *Procedimiento para la raiz* n *de un número entero.*

Designemos por N un número entero cualquiera, y por n el grado de la raíz que se quiere estraer de él.

Primeramente como la n potencia de 10, ó 10^n está espresada por la unidad seguida de n ceros y representa el número menor de $n+1$ cifras, se sigue que si N no tiene mas de n cifras, su raíz tiene *solo una;* bastando para obtenerla, formar las n potencias de los *diez* primeros números 1, 2, 3...., 9, 10; el número menor de los dos que comprendan á N, será la raíz pedida.

Pero cuando N está compuesto de mas de n cifras, su raíz tiene mas de una cifra, y puede entónces decirse que no encierra mas que decenas y unidades. Representando pues por a las decenas y por b las unidades, se tiene (número 148)

$$N=(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots,$$

es decir que el número propuesto contiene la *n potencia de las decenas*, mas *n veces el producto de la* (n—1) *potencia de las decenas por las unidades*, mas una serie de otras partes que es inútil enumerar.

Sentado esto, como la n potencia de las decenas no puede dar unidades de un órden inferior á la unidad seguida de n ceros, las n últimas cifras de la derecha no pueden formar parte de ella; siendo por lo tanto preciso separarlas y estraer la raíz de la mayor n potencia contenida en la parte de la izquierda: esta raíz espresa las decenas de la raíz buscada.

Si esta parte de la izquierda encerrase aun mas de n cifras, nos veríamos conducidos á separar de ella las n últimas cifras de la derecha y á estraer la raíz de la mayor n potencia contenida en la nueva parte de la izquierda; y así sucesivamente.

Regla general. *Despues de haber dividido de este modo el número* N *en grupos de* n *cifras* [el período último á la izquierda puede sin embargo tener ménos de n cifras], *se estrae la raiz de la mayor* n *potencia contenida en este primer periodo de la izquierda;* lo que da la cifra de las unidades del órden mas elevado de la raíz total, ó la de las decenas de ta raíz del número formado por los dos primeros períodos de la izquierda. *Restando la* n *potencia de esta cifra del primer periodo de la izquierda* se obtiene una resta, la cual, seguida del segundo período, contiene todavía n veces el producto de la $(n-1)$ potencia de la cifra hallada (que se supone espresar decenas) por la cifra siguiente, mas una serie de otros productos. Pero este primer producto no puede evidentemente dar unidades de un órden inferior á 10^{n-1}; de manera que no pueden formar parte de él las $(n-1)$ últimas cifras del segundo período. Basta, pues, *bajar al lado de la resta correspondiente al primer período, la primera cifra del segundo; y si despues de haber formado* n *veces la* (n—1) *potencia de la primera cifra de la raiz, se divide por este resultado la resta seguida de la primera cifra del segundo periodo,* el cociente espresará la segunda cifra de la raíz, ó un número mayor. Para probar esta cifra, *se escribirá á la derecha de las primeras, despues se elevará el conjunto de estas dos cifras á la* n *potencia, y se sustraerá,* si es posible, *la potencia obtenida del conjunto de los primeros periodos,* lo cual dará una nueva

resta *al lado de la cual se bajará la primera cifra del tercer período, dividiendo en seguida el número así formado por* n *veces la* (n—1) *potencia del conjunto de las dos cifras halladas ya en la raíz*, lo que dará la tercera cifra de esta.

Se continuará esta serie de operaciones hasta que se hayan bajado todos los períodos.

154. *Sea propuesto*, por ejemplo, estraer la quinta raíz de 550731776.

$$\left.\begin{array}{l}5507.31776\\3125\\23823\end{array}\right\}\frac{5}{3125}.$$

Despues de haber separado las cinco últimas cifras de la derecha del número propuesto, se reconoce que $(5)^5$, ó 3125, y $(6)^5$, ó 7776, comprenden á 5507; luego 5 espresa las decenas de la raíz buscada.

Sustrayendo 3125 de 5507, se obtiene el número 2382 por resta, á cuyo lado se baja la cifra 3 del segundo período de la derecha, lo cual da 23323, número que se divide por 5 veces la 4ª potencia de 5, ó por 3125. El cociente es 7, pero elevando 57 á la 5ª potencia se obtiene 601692057, número mas crecido que el propuesto. Ensayando 56, se encuentra

$$(56)^5=550731776;$$

de modo que 56 es la raíz pedida.

Se obtendrian del mismo modo

$$\sqrt[5]{924055}=18, \text{ con la resta } 200887;$$

$$\sqrt[6]{11167913618807}=407 \text{ exactamente};$$

$$\sqrt[7]{94931877133}=37 \text{ exactamente}.$$

155. *Observacion.* Siempre que el grado de la raíz que se ha de estraer es un número múltiplo de otros dos ó mas, como 4. 6....., *puede obtenerse la raiz por una serie de estracciones de raíces de grados mas simples.*

Para darnos cuenta de estas modificaciones, observemos que

$$(a^3)^4=a^3\times a^3\times a^3\times a^3=a^{3+3+3+3}=a^{3\times4}=a^{12},$$

y que en general,

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times a^m\ldots\ldots=a^{m\times n} \text{ (número 16).}$$

Luego la *n potencia de la* m *potencia de un número es igual á la* mn *potencia de este número.*

Recíprocamente, *la raiz* mn *de un número es igual á la raiz* n *de la raiz* m *de este número*, ó algebráicamente digo que se tiene

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

En efecto sea $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=a'$;

elevemos ambos miembros á la *n* potencia; sale

$$\sqrt[m]{a}=a'^n;$$

[porque segun la definicion de una raíz (número 2), se tiene

$$(\sqrt[n]{K})^n=K].$$

Elevando de nuevo ambos miembros á la *m* potencia, se obtiene $a=(a'^n)^m={}'^{mn}$;

de donde, estrayendo la raíz *mn* de ambos miembros $\sqrt[mn]{a}=a'$;

pero se tiene ya $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=a'$; luego $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$

Nota. Como $(a^m)^n$ y $(a^n)^m$ dan igualmente a^{mn}, puede concluirse

de aquí que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$

Se hallará, segun este principio,

$$\sqrt[4]{256}=\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt{16}=4;$$

$$\sqrt[6]{2985984}=\sqrt[3]{\sqrt{2985984}}=\sqrt{1728}=12;$$

$$\sqrt[6]{1771561}=\sqrt[3]{\sqrt{1771561}}=11;$$

$$\sqrt[8]{1679616}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{1679616}}}=\sqrt{\sqrt{1296}}=\sqrt{36}=6.$$

NOTA. Aunque pueden estraerse las raíces sucesivas en un órden cualquiera, es preferible estraer primeramente la raíz del grado menor, porque entónces la estraccion de la raíz del grado mayor, que es una operacion mas complicada, se hace sobre un número que tiene muchas ménos cifras que el número propuesto. Esto es lo que hemos hecho en el segundo y tercer ejemplo anteriores. (Véase ademas la primera nota de este número.)

Estraccion de tas raíces por aproximacion.

156. Cuando el número entero cuya raíz n se pide no es una *potencia perfecta*, el procedimiento del núm. 153 no da mas que la parte entera de la raíz, ó la raíz con diferencia de una unidad. Por lo que toca á la fraccion que debe completar la raíz, no puede obtenerse exactamente; pues sabemos que si a y b designan los dos términos de una fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ a^n y b^n, son tambien primeros entre sí; de modo que $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ ó $\frac{a^n}{b^n}$ no puede producir un número entero N, es decir que $\sqrt[n]{N}$ no podia espresarse por un número fraccionario exacto $\frac{a}{b}$. Pero se puede determinar la raíz en el grado de aproximacion que se quiera.

Supongamos que se haya propuesto en general estraer la raíz n de un número cualquiera, entero ó fraccionario, a, con diferencia de ménos de una fraccion $\frac{1}{p}$; es decir de suerte que el error cometido sea menor que $\frac{1}{p}$.

Observemos que a puede ponerse bajo la forma $\frac{a \times p}{p^n}$. Si se designa por r la raíz de $a\,p^n$ obtenida con diferencia de ménos de una unidad, el número $\frac{a \times p^n}{p^n}$, ó a, se halla entónces comprendido entre $\frac{r^n}{p^n}$ y $\frac{(r+1)^n}{p^n}$; luego tambien, $\sqrt[n]{a}$ se halla comprendido entre las raíces de estos dos últimos números, es decir entre $\frac{r}{p}$ y $\frac{r+1}{p}$. Luego

en fin, $\frac{r}{p}$ es la raíz pedida, con diferencia de ménos de una fraccion $\frac{1}{p}$.

REGLA GENERAL. *Para estraer la raíz* n *de un número cualquiera con diferencia de casi una fraccion,* $\frac{1}{p}$, *multiplíquese el número por* p^n; *estráigase del producto la raíz* n *con diferencia de una unidad, y divídase despues el resultado por* p.

Remitimos para las aplicaciones de esta regla general á nuestra *Aritmética*, en donde espusimos con toda la estension conveniente los diferentes modos de aproximacion, así para la raíz cuadrada como para la cúbica.

Sin embargo nos parece útil dar aquí algunos desarrollos acerca de la manera de valuar en decimales las espresiones que contienen radicales dobles, tales como

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}},\quad \sqrt{a+\sqrt{b}},\ \text{etc.}$$

157. Supongamos que se haya propuesto *estraer la raíz sesta* de 23, con diferencia casi de 0, 01.

Aplicando á este ejemplo la regla del número 156, es preciso multiplicar 23 por $(100)^6$ ó escribir *doce* ceros á la derecha de 23, estraer despues la sesta raíz del número resultante, con diferencia de una unidad, y dividir esta raíz por 100, ó separar dos cifras decimales hácia la derecha.

Pero se tiene (núm. 155), $\sqrt[6]{23 \times (100)^6} = \sqrt[3]{\sqrt{23 \times (100)^6}}$; de modo que despues de haber estraido la raíz cuadrada de $23 \times (100)^6$ con diferencia de una unidad, se estraerá la raíz cúbica del resultado; se dividirá en seguida el nuevo resultado por 100, ó se separarán dos cifras decimales á la derecha.

Se halla de esta suerte $\sqrt[6]{23} = 1,68$, con diferencia de 0,01.

Tomemos, por segundo ejemplo, la espresion $\sqrt[4]{29,437}$ ó $\sqrt{\sqrt{29,437}}$, cuyo valor se pide con diferencia de casi 0,001.

Como segun la regla del número 156, se debe multiplicar 29,437

por $(1000)^4$, esto equivale á suprimir primeramente la vírgula y á escribir despues *nueve* ceros á la derecha, lo que da 29.437,000,000,000.

Estrayendo ahora la raíz cuadrada de este resultado con diferencia de una unidad, se halla 5425587, número del que es preciso estraer otra vez la raíz cuadrada, obteniéndose 2329.

Luego en fin $\sqrt[4]{29,437}=2,329$ con diferencia de ménos de 0,001.

De otro modo. Estraigamos primero la raíz cuadrada de 29,437 con diferencia de 0,000001; sale 5,425887.

Estrayendo tambien la raíz cuadrada de este resultado, se obtiene 2,329; luego $\sqrt[4]{29,347}=2,329$ con diferencia de casi 0,001.

Propóngase ahora valuar $\sqrt[3]{5+3\sqrt{2}}$ con diferencia de 1,01.

Se podria, 1°. multiplicar $5+3\sqrt{2}$ por $(100)^3$; 2°. valuar el producto con diferencia de una unidad (núm. 91); 3°. estraer la raíz cúbica del resultado con diferencia de una unidad; 4°. en fin, dividir este nuevo resultado por 100.

Pero es mas sencillo operar del modo siguiente:

Primeramente $3\sqrt{2}$ ó $\sqrt{18}$ valuado en decimales y con diferencia de 0,000001, da por resultado, 4,242640;

de donde $$5+3\sqrt{2}=9,242640.$$

Pero $$\sqrt[3]{9,242640}=2,09;$$

luego en fin

$$\sqrt[3]{5+3\sqrt{2}}=2,09, \text{ con diferencia de casi } 0,01.$$

Tomemos por último ejemplo la espresion $\sqrt[3]{\dfrac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}}$

cuyo valor se pide con diferencia de 0,1.

Primeramente $\dfrac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}$ equivale (núm. 91) á $\dfrac{20\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{14}$;

de modo que 1°. $20\sqrt{3}$ ó $\sqrt{1200}=34,641$ con diferencia de 0,001.

2°. $5\sqrt{6}$ ó $\sqrt{150}=12,247$ con diferencia de 0,001.

Lo que da $$\frac{20\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{14}=\frac{46,888}{14}=3,349.$$

Luego $$\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}}=\sqrt{3,349}=1,6 \text{ con diferencia casi de } 0,1.$$

(El valor está aquí aproximado en *mas*.)

---

§ III. FORMACION DE LAS POTENCIAS Y ESTRACCION DE LAS RAÍCES DE LAS CANTIDADES ALGEBRAÍCAS. CÁLCULO DE LOS RADICALES.

Consideremos primeramente las cantidades monomias.

158. Supongamos que haya que formar la quinta potencia de $2a^3b^2$; se tiene (núm. 2),

$$(2a^3b^2)^5=2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2;$$

por donde se ve, 1°. que el coeficiente 2 debe ser 5 veces factor en el producto, ó debe elevarse á la quinta potencia; 2°. que cada uno de los esponentes de las letras debe repetirse 5 veces, ó multiplicarse por 5.

Luego en fin, $$(2a^3b^2)^5=2^5a^{3\times5}b^{2\times5}=32a^{15}b^{10}.$$

Así tambien, $$(8a^2b^2c)^3=8^3.\ a^{2\times3}b^{3\times3}c^3=512\ a^6\ b^9\ c^3.$$

De modo que para elevar un monomio á una potencia de un grado dado es *preciso elevar el coeficiente á esta potencia y multiplicar despues el esponente de cada letra por el esponente de la potencia.*

Luego recíprocamente, para estraer una raíz de grado cualquiera de una cantidad monomia, es preciso, 1°. *estraer la raíz del coeficiente;* 2°. *dividir el esponente de cada letra por el índice de la raíz.*

Así, $$\sqrt[3]{64a^9b^3c^6}=4a^3bc^2,\quad \sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4}=2a^2b^3c.$$

Se ve, segun esta regla, que para que un monomio sea una po-