por $(1000)^4$, esto equivale á suprimir primeramente la vírgula y á escribir despues *nueve* ceros á la derecha, lo que da 29.437,000,000,000.

Estrayendo ahora la raíz cuadrada de este resultado con diferencia de una unidad, se halla 5425587, número del que es preciso estraer otra vez la raíz cuadrada, obteniéndose 2329.

Luego en fin $\sqrt[4]{29,437}=2,329$ con diferencia de ménos de 0,001.

De otro modo. Estraigamos primero la raíz cuadrada de 29,437 con diferencia de 0,000001; sale 5,425887.

Estrayendo tambien la raíz cuadrada de este resultado, se obtiene 2,329; luego $\sqrt[4]{29,347}=2,329$ con diferencia de casi 0,001.

Propóngase ahora valuar $\sqrt[3]{5+3\sqrt{2}}$ con diferencia de 1,01.

Se podria, 1°. multiplicar $5+3\sqrt{2}$ por $(100)^3$; 2°. valuar el producto con diferencia de una unidad (núm. 91); 3°. estraer la raíz cúbica del resultado con diferencia de una unidad; 4°. en fin, dividir este nuevo resultado por 100.

Pero es mas sencillo operar del modo siguiente:

Primeramente $3\sqrt{2}$ ó $\sqrt{18}$ valuado en decimales y con diferencia de 0,000001, da por resultado, 4,242640;

de donde $$5+3\sqrt{2}=9,242640.$$

Pero $$\sqrt[3]{9,242640}=2,09;$$

luego en fin

$$\sqrt[3]{5+3\sqrt{2}}=2,09, \text{ con diferencia de casi } 0,01.$$

Tomemos por último ejemplo la espresion $\sqrt[3]{\dfrac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}}$

cuyo valor se pide con diferencia de 0,1.

Primeramente $\dfrac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}$ equivale (núm. 91) á $\dfrac{20\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{14}$;

de modo que 1°. $20\sqrt{3}$ ó $\sqrt{1200}=34,641$ con diferencia de 0,001.

2°. $5\sqrt{6}$ ó $\sqrt{150}=12,247$ con diferencia de 0,001.

Lo que da $$\frac{20\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{14}=\frac{46,888}{14}=3,349.$$

Luego $$\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}}=\sqrt{3,349}=1,6 \text{ con diferencia casi de } 0,1.$$

(El valor está aquí aproximado en *mas*.)

---

§ III. FORMACION DE LAS POTENCIAS Y ESTRACCION DE LAS RAÍCES DE LAS CANTIDADES ALGEBRAÍCAS. CÁLCULO DE LOS RADICALES.

Consideremos primeramente las cantidades monomias.

158. Supongamos que haya que formar la quinta potencia de $2a^3b^2$; se tiene (núm. 2),

$$(2a^3b^2)^5=2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2\times2a^3b^2;$$

por donde se ve, 1°. que el coeficiente 2 debe ser 5 veces factor en el producto, ó debe elevarse á la quinta potencia; 2°. que cada uno de los esponentes de las letras debe repetirse 5 veces, ó multiplicarse por 5.

Luego en fin, $$(2a^3b^2)^5=2^5a^{3\times5}b^{2\times5}=32a^{15}b^{10}.$$

Así tambien, $$(8a^2b^2c)^3=8^3.\ a^{2\times3}b^{3\times3}c^3=512\ a^6\ b^9\ c^3.$$

De modo que para elevar un monomio á una potencia de un grado dado es *preciso elevar el coeficiente á esta potencia y multiplicar despues el esponente de cada letra por el esponente de la potencia.*

Luego recíprocamente, para estraer una raíz de grado cualquiera de una cantidad monomia, es preciso, 1°. *estraer la raíz del coeficiente;* 2°. *dividir el esponente de cada letra por el índice de la raíz.*

Así, $$\sqrt[3]{64a^9b^3c^6}=4a^3bc^2,\quad \sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4}=2a^2b^3c.$$

Se ve, segun esta regla, que para que un monomio sea una po-

tencia perfecta del grado de la raíz que se ha de estraer, es preciso que su coeficiente sea una potencia perfecta de este grado, y que los esponentes de las letras sean divisibles por el esponente ó el *índice* de la raíz que se ha de estraer. Veremos mas adelante cómo se simplifica la espresion de la raíz de una cantidad que no es una potencia perfecta.

159. Hasta aquí no hemos tenido cuenta con el signo de que puede hallarse afectado el monomio; pero si se observa que *el cuadrado* de un monomio *es siempre positivo*, cualquiera que sea el signo de este monomio, y que toda potencia de grado por $2n$ puede mirarse como igual á la n potencia del cuadrado, es decir que $a^{2n}=(a^2)^n$, puede concluirse que *toda potencia de grado par de una cantidad, ya sea positiva, ya negativa, es esencialmente positiva.*

Así $$(\pm 2a^2b^3c)^4=+16a^8b^{12}c^4.$$

Como por otra parte una potencia de grado impar $(2n+1)$ es el producto de una potencia de grado par $2n$, por la primera potencia, se sigue que *toda potencia de grado impar de un monomio se halla afectada del mismo signo que el monomio.*

Luego $$(+4a^2b)^3=+64a^6b^3,\ (-4a^2b)^3=-64a^6b^3.$$

Es evidente segun esto, 1°. que *toda raiz de grado impar de una cantidad monomia debe estar afectada del mismo signo que la cantidad.*

Así $$\sqrt[3]{+8a^3}=+2a,\ \sqrt[3]{-8a^3}=-2a,\ \sqrt[5]{-32a^{10}b^5}=-2a^2b.$$

2°. Que *toda raiz de grado par de un monomio positivo puede estar afectada indiferentemente del signo + ó del signo —.*

Así $$\sqrt[4]{81a^4b^{12}}=\pm 3ab^3,\ \sqrt[6]{64a^{18}}=\pm 2a^3.$$

3°. Que *toda raiz de grado par de un monomio negativo es una raiz imposible*; porque no existe ninguna cantidad que elevada á una potencia de grado par pueda dar un resultado negativo.

De modo que $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-b}$, $\sqrt[8]{-c}$, son símbolos de operaciones inejecutables; son *espresiones imaginarias* como $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$. (Véase el núm. 85.)

Consideremos actualmente los polinomios.

160. Vimos ya cómo se eleva un binomio $x+a$ á una potencia de cualquier grado; pero puede suceder que los términos del binomio estén afectados de coeficientes y de esponentes.

Propóngase por ejemplo desarrollar $(2a^2+3ab)^3$; supongamos por de pronto $2a^2=x$, $3ab=y$; saldrá

$$(2a^2+3ab)^3=(x+y^3)=x^3=3x^2y-3xy^2=y^2.$$

Volviendo á poner ahora $2a^2$ y $3ab$ en lugar de x y de y, se tiene

$$(2a^2+3ab)^3=(2a^2)^3+3\ (2a^2)^2.\ (3ab)+3\ (2a^2).\ (3ab)^2+(3ab)^3;$$

ó efectuando los cálculos segun las reglas del núm. 158 y de la multiplicacion de los monomios,

$$(2a^2+3ab)^3=8a^6+36a^5b+54a^4b^2+27a^3b^3.$$

Se hallará igualmente

$$\begin{aligned}(4a^2b-3abc)^4&=(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^2+y^4\\&=(4a^2b)^4+4\ (4a^2b)^3\ (-3abc)+6\ (4a^2b)^2\ (-3abc)^2\\&+4\ (4a^2b)\ (-3abc)^3+(-3abc)^4\\&=256a^8b^4-768a^7b^4c+864a^6b^4c^2-432a^5b^4c^3+81a^4b^4c^4.\end{aligned}$$

(Los signos son alternativamente positivos y negativos.)

Supongamos ahora que haya que desarrollar $(x+y+z)^3$; supongamos primeramente $x+y=u$; sale

$$(u+z)^3=u^3+3zu^2+3z^2u+z^3,$$

ó reemplazando u por su valor $x+y$,

$$(x+y+z)^3=(x+y)^3+3z\ (x+y)^2+3z^2\ (x+y)+z^3,$$

ó desarrollando de nuevo los cálculos indicados,

$$\begin{aligned}(x+y+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^3+y^3+3x^2z+6xyz+3y^2z\\+3xz^2+3yz^2+z^3.\end{aligned}$$

Esta espresion se compone de *los cubos de los tres términos, mas de los triples productos de los cuadrados de cada término por las primeras potencias de los otros dos, mas del séstuplo producto de los términos.* Esta

ley seria (núm. 86) fácil de comprobar para un polinomio de mas de tres términos.

Para aplicar la fórmula precedente al desarrollo del cubo de un trinomio cuyos términos tuviesen coeficientes y esponentes, seria preciso, como para los binomios, *designar cada término por una sola letra, desarrollar, reemplazar despues por sus valores las letras introducidas, y efectuar todos los cálculos indicados.*

Por este medio se hallará, hecho el cálculo,

$$(2a^2-4ab+3b^2)^3=8a^6-48a^5b+132a^4b^2-108a^3b^3+198a^2b^4$$
$$-208ab^5+27b^6.$$

Se desarrollaria por procedimientos análogos la potencia cuarta, quinta, etc., de un polinomio cualquiera.

161. Pasemos á la *estraccion de las raíces* de grado cualquiera de los polinomios.

Llamemos P el polinomio propuesto; y concibamos este polinomio ordenado respecto á las potencias descendentes de una misma letra a. Designemos ademas por $x+y+z+\ldots$ la raíz buscada, que puede igualmente suponerse ordenada respecto á a.

Elevando $x+y+z+\ldots\ldots$ á la m potencia, y considerando por un instante $y+z+\ldots\ldots$ como si no formasen mas que un solo término, se tendria

$$\begin{aligned} \text{P, ó } (x+y+z+\ldots)^m &= x^m+mx^{m-1}(y+z+\ldots) \\ &+m\frac{m-1}{2}x^{m-2}(y+z+\ldots)^2 \\ &+\ldots\ldots \\ &+\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es, pues, evidente, segun los principios de la multiplicacion algebráica, que el término x^m del segundo miembro de esta igualdad debe llevar un esponente para a superior al de cualquiera de los otros. Luego x^m es igual al término de P, afectado del esponente mas fuerte de la letra a; luego si se estrae la raíz m del primer término de P, se obtendrá necesariamente el primer término x de la raíz.

Restando x^m de P, y llamando R á la resta, se halla

$$\begin{aligned} \text{R, ó P}-x^m &= x^m-mx^{m-1}(y+z+u+\ldots) \\ &+m\frac{m-1}{2}x^{m-2}(y+y+\ldots)^2 \\ &+\ldots\ldots \\ &+\ldots\ldots \end{aligned}$$

nueva igualdad en cuyo segundo miembro el término $mx^{m-1}y$ no podrá sufrir reduccion con los otros.

En efecto, como los términos y, y^2, y^3,..... que hacen parte de las espresiones afectadas de paréntesis, encierran respectivamente un esponente de la letra a mayor que los otros términos de las espresiones correspondientes, basta hacer ver que el término $mx_{m-1}y$ contiene un esponente mas alto de la letra a que el término general $x^{m-n}y^n$ (cuyo coeficiente por otra parte es inútil considerar aquí).

Comparando las dos cantidades

$$x^{m-1}y \text{ y } x^{m-n}y^n,$$

que pueden ponerse bajo la forma

$$x^{m-1}y.\ x^{n-1} \text{ y } x^{m-n}y.\ y^{n-1},$$

se ve que tienen un factor comun, y que de los dos no comunes, x^{n-1}, y^{n-1}, el primero contiene la a con un esponente mayor que e segundo. Luego el término $mx^{m-1}y$ no puede reducirse con el término en $x^{m-n}y^n$, y con mayor razon, con los otros términos.

De modo que el término $mx^{m-1}y$ es igual, sin reduccion, al término de R afectado del esponente mas alto de la letra a; y si se divide el primer término de R por mx^{m-1}, se tendrá necesariamente por cociente el segundo término y de la raíz.

Sustrayendo de P la m potencia de $x+y$, y designando por R′ la resta de esta sustraccion, se demostrará, como anteriormente, que el primer término de R′, ó de P$-(x+y)^m$, representa el valor de el $mx^{m-1}z$; de modo que dividiendo este primer término por mx^{m-1}, se tendrá el tercer término de la raíz; y así sucesivamente.

De aquí resulta el procedimiento siguiente:

Despues de haber *ordenado* el polinomio P relativamente á una de las letras que entran en él, *estráigase la raíz m* del primer término *de este polinomio;* y se obtendrá el primer término de la raíz. *Réstese* de P la m *potencia de este primer término. Escríbase* despues *debajo de la rai hallada* m *veces* la (m—1) *potencia de esta raíz.*

Divídase en seguida por esta última espresion el primer término *de la resta obtenida;* y se obtendrá de esta manera el segundo término de la raíz.

Fórmese la m potencia de la suma de los dos términos ya encontrados en la raíz, y *sustráigase* luego *de* P *esta* m *potencia.*

Divídase el primer término de la nueva resta por m *veces la* (m—1) *potencia del primer término de la raíz.*

Se obtendrá de este modo el tercer término de la raíz; y así sucesivamente.

Es fácil aplicar este procedimiento á los casos particulares de la estraccion de la raíz 3ª, 4ª, 5ª.

NOTA. En rigor podríamos dispensarnos de ordenar primeramente el polinomio; pero entónces seria preciso modificar el enunciado del procedimiento, como hicimos para la division. (Véase el núm. 27.)

Cálculo de los radicales.

162. Cuando la cantidad monomia ó polinomia de que se pide una raíz de un cierto grado no es una potencia perfecta, no puede hacerse mas que indicar la operacion, haciendo (número 2) preceder del signo $\sqrt{}$ la cantidad propuesta, y colocando dentro de este signo el número que marque el grado de la raíz que hay que estraer.

Este número se llama el *índice del radical.*

Muchas veces se pueden hacer esperimentar á la *espresion radical* algunas simplificaciones fundadas sobre un principio análogo al del número 84; cual es que *la raíz* n *de un producto es igual al producto de las raíces* n *de los diferentes factores.*

En términos algebráicos,

$$\sqrt[n]{abcd\ldots}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\sqrt[n]{d\ldots}$$

En efecto, elevando cada una de estas dos espresiones á la n potencia, se halla para la primera,

$$\left(\sqrt[n]{abcd\ldots}\right)^n=abcd,$$

y para la segunda,

$$\left(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c\ldots}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n.\left(\sqrt[n]{c}\right)^n\ldots=abcd\ldots$$

Luego, pues que la n potencia de estas espresiones son iguales, deben serlo tambien las espresiones. (Véase el número 167.)

Sentado esto, sea la espresion $\sqrt[3]{53a^4b^3c^2}$, que no puede ser reemplazada por un monomio racional, pues que 54 no es un cubo perfecto,

y que por otra parte los esponentes de a y c no son divisibles por 3; se tiene

$$\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}=\sqrt[3]{27a^3b^3},\ \sqrt[3]{2ac^2}=3ab\sqrt[3]{2ac^2}.$$

Del mismo modo, $\sqrt[3]{8a^2}=2\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{48a^5b^8c^6}=2ab^2c\sqrt[4]{3ac^2},$

$$\sqrt[6]{192a^7bc^{12}}=\sqrt[6]{64a^6c^{12}}\times\sqrt[6]{3ab=2ac^2}\sqrt[6]{3ab.}$$

En las espresiones $3ab\sqrt[3]{2ac^2}$, $2\sqrt[3]{a^2}$, $2ab^2c\sqrt[4]{3ac^2}$, las cantidades colocadas delante del radical, á que sirven de multiplicadores, se llaman los *coeficientes* del radical.

163. El principio demostrado en el núm. 155 da lugar á otra especie de simplificacion.

Téngase por ejemplo la espresion radical $\sqrt[6]{4a^2}$; como en virtud de este principio, $\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}}$; y como la cantidad sometida al radical, $\sqrt[3]{\ }$ es un cuadrado perfecto, se puede efectuar esta estraccion de dicha raíz cuadrada, lo que da

$$\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt[3]{2a.}$$

Del mismo modo, $\sqrt[4]{36a^2b^2}=\sqrt{\sqrt{36a^2b^2}}=\sqrt{6ab.}$

En general, $\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt{\sqrt[n]{a^n}}=\sqrt[m]{a}$; es decir, que cuando el índice de un radical es múltiplo de cierto número n, y la cantidad de debajo del signo radical de una potencia n, exacta, *se puede, sin cambiar el valor del radical, dividir su índice por* n, *y estraer la raíz* n *de* a *cantidad de debajo del signo.*

Esta proposicion es la inversa de otra no ménos importante, que consiste en que *se puede multiplicar el índice de un radical por cierto número, con tal que se eleve la cantidad de debajo del signo á una potencia de un grado marcado por este número.*

Así $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$. En efecto, a es lo mismo que $\sqrt[n]{a^n}$,

luego $$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

Este último principio sirve para reducir dos ó mas radicales al mismo índice, lo cual es muchas veces útil.

Sean por ejemplo los dos radicales $\sqrt[3]{2a}$ y $\sqrt[4]{a+b}$, los que se quieren reducir al mismo índice.

Si se multipla el índice del primero por 4, índice del segundo, y se eleva la cantidad $2a$ á la cuarta potencia, si se multiplica tambien el índice del segundo por 3, índice del primero, y se eleva $a+b$ al cubo, no se cambiarán los valores de los dos radicales; y saldrá por estas operaciones,

$$\sqrt[3]{2a}=\sqrt[12]{2^4a^4}=\sqrt[12]{16a^4},\quad \sqrt[4]{a+b}=\sqrt[12]{(a+b)^3}.$$

Regla general. *Para reducir dos ó mas radicales al mismo índice, multipliquese el índice de cada radical por el producto de todos los demas índices, y elévese la cantidad de debajo del signo á una potencia de un grado marcado por este producto.*

Esta regla, que tiene mucha analogía con la reduccion de las fracciones á un mismo denominador, es susceptible de modificaciones semejantes.

Supongamos, por ejemplo, que se quieran reducir á un mismo índice los radicales $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{5b}$, $\sqrt[8]{a^2+b^2}$.

Como los números 4, 6, 8, tienen factores comunes, y 24 es el menor múltiplo de estos tres números, basta evidentemente multiplicar al primero por 6, al segundo por 4, y al tercero por 3, con tal que se eleven las cantidades de debajo de cada signo radical á las potencias de los grados marcados respectivamente por 6, 4 y 3, lo cual da

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt[24]{a^6},\ \sqrt[6]{5b}=\sqrt[24]{5^4b^4},\ \sqrt[8]{a^2+b^2}=\sqrt[24]{(a^2+b^2)^3}.$$

Establecidas estas nociones, vamos á ejecutar sobre los radicales las operaciones de la aritmética que son por ahora en número de *seis*, comprendiendo en ellas la formacion de las potencias y la estraccion de las raices.

164. *Adicion y sustraccion de los radicales.* Se llaman *semejantes* dos radicales cuando tienen un mismo índice, y cuando la cantidad de debajo del signo es tambien la misma.

Sentado esto, para sumar dos radicales semejantes ó para sustraerlos uno de otro, es preciso *operar* simplemente *sobre sus coeficientes, y colocar la suma ó la diferencia como coeficiente, delante del radical comun.*

Así, $$3\sqrt[3]{b}+2\sqrt[3]{b}=5\sqrt[3]{b},\ 3\sqrt[3]{b}-2\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b},$$

$$3a\sqrt[4]{b}\pm2c\sqrt[4]{b}=(3a\pm2c)\sqrt[4]{b}.$$

Sucede muchas veces que al principio no son semejantes dos radicales; pero se convierten en tales cuando se les han hecho sufrir las simplificaciones de los números 162 y 163. Por ejemplo,

$$\sqrt[2]{48ab^2}+b\sqrt[2]{75a}=4b\sqrt[2]{3a}+5b\sqrt[2]{3a}=9b\sqrt[2]{3a};$$

$$\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}-\sqrt[3]{b^4+2ab^3}=2a\sqrt[3]{b+3a}-b\sqrt[3]{b+2a}$$

$$=(2a-b)\sqrt[3]{b+2a};$$

$$3\sqrt[6]{4a^2}+2\sqrt[3]{2a}=3\sqrt[3]{2a}+2\sqrt[3]{2a}=5\sqrt[3]{2a}.$$

Si los radicales no son semejantes, no se puede hacer mas que indicar la adicion y la sustraccion, interponiendo los signos + y —.

165. *Multiplicacion y division.* Consideremos primeramente el caso en que los radicales tienen un mismo índice.

Sea $\sqrt[n]{a}$ el que haya de multiplicarse ó dividirse por $\sqrt[n]{b}$. Digo que se tiene

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\ \text{y}\ \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

En efecto (núm. 162), si se eleva $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[n]{ab}$ á la n potencia, se encuentra igualmente ab por resultado; luego son iguales estas dos espresiones.