Del mismo modo, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ y $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, elevados á la $n$ potencia, dan $\frac{a}{b}$; y estas dos espresiones son iguales.

Por donde se ve que, *para multiplicar ó dividir uno por otro dos radicales del mismo indice, es preciso multiplicar ó dividir las dos cantidades de debajo del signo una por otra, y afectar el resultado del signo radical comun.* Si hay coeficientes se empieza por operar separadamente sobre estos últimos.

Así,

$$2a\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c}}\times-3a\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^2}{d}}=-6a^2\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^3}{cd}},$$

ó simplificando, $=\frac{-6a^2(a^2+b^2)}{\sqrt[3]{cd}}$.

$$3a\sqrt[4]{8a^2}\times2b\sqrt[4]{4a^2c}=6ab\sqrt[4]{32a^4c}=12a^2b\sqrt[4]{2c}.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}}{\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}}=\sqrt[3]{\frac{8b(a^2b^2+b^4)}{a^2-b^2}}=2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}.$$

Si los radicales no son del mismo índice es preciso reducirlos (núm. 163) y operar como acabamos de decir.

Por ejemplo, $3a\sqrt[6]{b}+5b\sqrt[8]{2c}=15ab\sqrt[24]{8b^4c^3}$.

**166.** *Formacion de las potencias y estraccion de las raices.* Como se tiene $(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}.....=\sqrt[m]{a^n}$

segun la regla que se acaba de establecer para la multiplicacion, se sigue que *para elevar una cantidad radical á una potencia es preciso elevar la cantidad de debajo del signo, y afectar el resultado del signo radical con su indice primitivo.* Si hay un coeficiente, se eleva por separado este coeficiente á la potencia dada.



Así $(\sqrt[4]{4a^3})^2=\sqrt[4]{(4a^3)^2}=\sqrt[4]{16a^6}=2a\sqrt[4]{a^2}$;

$(3\sqrt[3]{2a})^5=3^5.\sqrt[3]{(2a)^5}=243\sqrt[3]{32a^5}=486a\sqrt[3]{4a^2}$.

Cuando el índice del radical es un múltiplo del esponente de la potencia que hay que formar, se puede simplificar.

Supongamos que se ha de elevar $\sqrt[4]{2a}$ al cuadrado;

Observemos (núm. 155) que $\sqrt[4]{2a}=\sqrt{\sqrt{2a}}$.

Pero para elevar esta cantidad al cuadrado basta suprimir el primer signo radical; de modo que se tiene $(\sqrt[4]{2a})^2=\sqrt{2a}$.

Supongamos ademas que se quiera elevar $\sqrt[6]{3b}$ al cuadrado: esta espresion se reduce á $\sqrt[2]{\sqrt[3]{3b}}$; luego $(\sqrt[6]{3b})^2=\sqrt[3]{3b}$.

Es decir que *si el índice del radical es divisible por el esponente de la potencia, se puede efectuar esta division dejando tal cual estaba la cantidad de debajo del signo.*

En cuanto á la estraccion de las raíces, es preciso *multiplicar el índice del radical por el de la raiz que se ha de estraer, y dejar tal cual estaba la cantidad de debajo del signo.*

Así $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3c}}=\sqrt[12]{3c}$; $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5c}}=\sqrt[6]{5c}$.

Esta regla no es mas que el principio del núm. 155, enunciado en un órden inverso.

Si la cantidad de debajo del signo es una potencia perfecta del mismo grado que la raíz que se ha de estraer, há lugar á la simplificacion.

Así siendo $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3}}$ (núm. 155) igual á $\sqrt[4]{\sqrt[3]{8a^3}}$ se reduce á $\sqrt[4]{2a}$.

Del mismo modo, $\sqrt[2]{\sqrt[5]{9a^3}}=\sqrt[5]{\sqrt[2]{9a^3}}=\sqrt[5]{3a}$.

**Observaciones acerca de los valores algebráicos de los radicales. Consecuencias que resultan para el cálculo de estas espresiones.**

**167.** Las reglas que acabamos de establecer para el cálculo de los radicales se fundan principalmente sobre el principio de que la raíz $n$ de un producto de muchos factores es igual al producto de las raíces $n$ de estos diferentes factores; apoyándose la demostracion de dicho principio (núm. 162) sobre el de que *si las potencias de un mismo grado de dos espresiones son iguales, lo son tambien las espresiones.* Sin embargo, esta última proposicion, que es verdadera miéntras no se consideran mas que números absolutos, no lo es siempre para las diversas espresiones á que puede conducir el álgebra.

Para hacer ver la exactitud de esta asercion, probaremos que un mismo número puede tener *algebráicamente* muchas *raices cuadradas*, muchas *cúbicas*, muchas *cuartas*, etc.

Designemos, en efecto, por $x$ la espresion general de la raíz cuadrada de un número $a$, y por $p$ el *valor numérico* ó *aritmético* de esta raíz cuadrada; y se tendrá la ecuacion

$$x^2=a, \text{ ó } x^2=p^2, \text{ de la que se saca } x=\pm p.$$

Por donde se ve que de cualquier signo que se afecte el valor aritmético, $p$, de la raíz cuadrada de $a$, su cuadrado da igualmente $a$, resultado conforme con lo dicho en el núm. 85.

Sea en segundo lugar $x$ la espresion general de la raíz cúbica de $a$; y designemos por $p$ el valor numérico de esta raíz; se tiene la ecuacion

$$x^3=a, \text{ ó } x^3=p^3.$$

Esta ecuacion queda desde luego satisfecha por $x=p$.

Observemos ahora que se puede poner $x=p^3$ bajo la forma

$$x^3-p^3=0.$$

Pero vimos (núm. 31) que la espresion $x^3-p^3$ es divisible por $x-p$, y da por cociente exacto $x^2+px+p^2$; luego la ecuacion anterior puede trasformarse de esta manera:



$$(x-p)\,(x^2+px+p^2)=0$$

ecuacion á que se satisface, ya sea suponiendo

$$x-p=0, \text{ de donde } x=p,$$

ya sea suponiendo $x^2+px+p^2=0$, de donde $x=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}\sqrt{-3}$,

ó bien $$x=p\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Se ve, pues, *que la raíz cúbica de* a *admite tres valores algebráicos diferentes*, á saber:

$$p,\ p\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right),\ \text{y}\ p\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

Supongamos ahora que haya que resolver la ecuacion $x^4=a$ ó $x^4=p^4$ (en que $p$ designa el valor aritmético de $\sqrt[4]{a}$).

Esta ecuacion puede ponerse bajo la forma

$$x^4-p^4=0;$$

pero la espresion $x^4-p^4$ se reduce (núm. 19) á $(x^2-p^2)\,(x^2+p^2)$; luego tambien la ecuacion se reduce á $(x^2-p^2)\,(x^2+p^2)=0$, y se la puede satisfacer, ya poniendo $x^2-p^2=0$, de donde $x=\pm p$,

ya suponiendo $x^2+p^2=0$, de donde $x=\pm\sqrt{-p^2}=\pm p\sqrt{-1}$.

Luego se obtienen de este modo para la cuarta raíz del número $a$ cuatro espresiones *algebráicas diferentes*.

Propongámonos resolver la nueva ecuacion

$$x^6-p^6=0.$$

Como $x^6-p^6$ se reduce (núm. 19) á $(x^3-p^3)\,(x^3+p^3)$;
se reduce la ecuacion á $(x^3-p^3)\,(x^3+p^3)=0$.

La ecuacion $x^3-p^3=0$, precedentemente resuelta, ha dado ya $x=p$ y $x=p\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$.

Consideremos actualmente la ecuacion $x^3+p^3=0$, y observemos que si se reemplaza interinamente $p$ por $-p'$, se reduce á $x^3-p'^3=0$,

de donde se deduce $x=p'$ y $x=p'\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$

ó poniendo en lugar de $p'$ su valor $-p$,

$$x=-p \text{ y } x=-p\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right).$$

De modo que la ecuacion $x^6-p^6=0$, y por consiguiente la raíz 6ª. de $a$ admite *seis* valores: $p$, $ap$, $a'p$, $-p$ $-ap$, $-a'p$, suponiendo para simplificar,

$$a=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ a'=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Podemos concluir por analogía (lo que se demostrará mas completamente en adelante) que toda ecuacion de la forma $x^m-a=0$, ó $x^m-p^m=0$, es susceptible de $m$ soluciones diferentes; es decir que la raíz $m$ de un número admite $m$ valores *algebráicos diferentes.*

**168.** *Primera observacion.* Si en las ecuaciones precedentes y los resultados que les corresponden se supone como caso particular, $a=1$, de donde $p=1$, se obtendrán las raíces *cuadradas, cúbicas, cuartas,* etc., de la unidad. Así, $+1$ y $-1$ son las dos *raíces cuadradas de la unidad:* porque la ecuacion $x^2-1=0$ da $x=\pm1$.

Del mismo modo, $+1$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, son las tres raíces cúbicas de la unidad, ó las raíces de $x^3-1=0$.

$+1$, $-1$, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, son las cuatro raíces cuartas de la unidad, ó las raíces de $x^4-1=0$.

**169.** *Segunda observacion.* Sea en general la ecuacion

$$x^m\mp a=0.$$

Designemos por $p$ el *valor aritmético* de la raíz $m$ de $a$, lo que da $p^m=a$; la ecuacion de arriba se convierte en

$$x^m\mp p^m=0;$$



si se supone $x=py$, en que $y$ es una nueva incógnita, resultará $p^m y^m\mp p^m=0$; ó, dividiendo por $p^m$,

$$y^m\mp1=0.$$

Lo cual prueba que conociendo todos los valores de $\sqrt[m]{1}$ y de $\sqrt[m]{-1}$, se obtendrá el de $\sqrt[m]{a}$ y de $\sqrt[m]{-a}$, multiplicando $p$ por las diferentes raíces $m$ de $+1$ ó de $-1$.

**170.** Resulta del análisis precedente, que las reglas del cálculo de los radicales establecidas para la hipótesis en que se oepera sobre números absolutos, son susceptibles de algunas *modificaciones* cuando se opera *sobre espresiones ó simbolos puramente algebráicos.* Sobre todo cuando se aplican estas reglas *á las espresiones imaginarias* son muy necesarias estas modificaciones, como una consecuencia de lo dicho en el número 167.

Se pide, por ejemplo, el producto de $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-a}$; la regla del número 165 da

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{+a^2}=\pm a.$$

Este doble valor del producto es una respuesta exacta miéntras en la espresion $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, los dos radicales abrazan el doble signo $\pm$; pero si se admite que los radicales son del mismo signo, como en este caso $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ se convierte en $(\sqrt{-a})^2$, y para elevar $\sqrt{m}$ al cuadrado basta suprimir el radical, se tiene necesariamente

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a.$$

Supongamos en segundo lugar que haya que formar el producto $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$; se tendria, segun la regla del número 165,

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{+ab}.$$

Ahora bien; $\sqrt{ab}=\pm p$ (número 167), en que $p$ designa el valo aritmético de la raíz cuadrada de $ab$; pero digo que el verdader resultado debe ser $-p$ ó $-\sqrt{ab}$, desde el momento que se consi deran los dos radicales $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-b}$ como precedidos, uno y otro, del signo $+$.

En efecto se tiene

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}.\ \sqrt{-1} \text{ y } \sqrt{-b}=\sqrt{b}.\ \sqrt{-1};$$

luego $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{b}.\ \sqrt{-1}=\sqrt{ab}.(\sqrt{-1})^2$

$$=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$$

Se hallará, segun estos principios, para las diversas potencias de $\sqrt{-1}$,

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1},$$

$$(\sqrt{-1})^2=-1,$$

$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2.\ \sqrt{-1}=-\sqrt{-1},$$

$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2.\ (\sqrt{-1})^2=-1\times-1=+1.$$

Como las cuatro potencias siguientes se obtendrian multiplicando la cuarta, $+1$, respectivamente por la primera, la segunda, la tercera y la cuarta, se hallaria tambien para estas cuatro nuevas potencias,

$$+\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1},\ +1;$$

luego todas las potencias de $\sqrt{-1}$ forman períodos de *cuatro términos*.

Supongamos ya que se haya propuesto determinar el producto de $\sqrt[4]{-a}$ por $\sqrt[4]{-b}$, que segun la regla seria $\sqrt[4]{+ab}$, y por consiguiente (número 167) daria los cuatro valores

$$+\sqrt[4]{ab},\ -\sqrt[4]{ab},\ +\sqrt[4]{ab}.\ \sqrt{-1},\ -\sqrt[4]{ab}.\ \sqrt{-1}.$$

Pero para determinar el verdadero producto observemos que

$$\sqrt[4]{-a}=\sqrt[4]{a}.\ \sqrt[4]{-1},\ \sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{b}.\ \sqrt[4]{-1};$$

pero $\sqrt[4]{-1}\times\sqrt[4]{-1}=(\sqrt[4]{-1})^2=(\sqrt{\sqrt[4]{-1}})^2=\sqrt{-1};$

luego $\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}.\ \sqrt[4]{-1}.$



Apliquemos los precedentes cálculos á la espresion $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, considerada como raíz de la ecuacion

$$x^3-1=0,$$

es decir como *raiz cúbica* de 1. (Véase el número 168.)

Segun la fórmula $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

se tiene $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=$

$$\frac{(-1)^3+3(-1)^2.\ \sqrt{-3}+3(-1).\ (\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3}{8}=$$

$$\frac{-1+3\sqrt{-3}-3\times-3-3\sqrt{-3}}{8}=\frac{8}{8}=1.$$

Se comprobaria del mismo modo el segundo valor $\frac{-1-\sqrt{-3}}{3}$.

---

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

### § IV. TEORÍA DE LOS ESPONENTES DE NATURALEZA CUALQUIERA. — NOCIONES GENERALES ACERCA DE LAS SERIES.

**171.** Aquí conviene dar á conocer dos anotaciones nuevas de un uso conveniente en los cálculos algebráicos : tales son los esponentes fraccionarios y los esponentes negativos, que traen su orígen de las reglas establecidas para la estraccion de las raíces y la division de los monomios.

Supongamos que haya que estraer la raíz $n$ de $a^m$.

Vimos ya (número 158) que si $m$ es múltiplo de $n$, es preciso dividir el esponente $m$ por el índice $n$ de la raíz. Pero si $m$ no es divisible por $n$, se ha convenido en indicar la estraccion de la raíz, indicando la division de los dos esponentes.