$\sqrt[5]{39}=\sqrt[6]{32+7}=2,0807$ con diferencia de casi 0, 0001;

$\sqrt[3]{65}=\sqrt[3]{64+1}=4,02073$ de. 0,00001;

$\sqrt[4]{260}=\sqrt[4]{256+4}=4,01553$ de. 0,00001;

$\sqrt[7]{108}=\sqrt[7]{128+20}=1,95204$ de. . . . . 0,00001.

178. *Otras aplicaciones de la fórmula del binomio.* Esta fórmula sirve tambien para desarrollar las espresiones algebráicas en series.

Sea por ejemplo la espresion $\frac{1}{1-z}$; se tiene

$$\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}.$$

Supongamos en la fórmula $(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\ldots$, $x=1$, $a=-z$, $m=-1$; sale

$$(1-z)^{-1}=1-1.\,(-z)-1.\frac{-1-1}{2}.\,(-z)^2$$

$$-1.\frac{-1-1}{2}.\frac{-1-2}{3}.\,(-z)^3\ldots,$$

ó efectuando los cálculos y observando que cada término se compone de un número par de factores afectados del signo —,

$$(1-z)^{-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5\ldots$$

Se llegaria al mismo resultado aplicando el procedimiento de la division algebráica (núm. 26).

Sea aun la espresion $\frac{2}{(1-z)^3}$ ó $2\,(1-z)^{-3}$.

Desarrollando $(1-z)^{-3}$, se tiene

$$2\,(1-z)^{-3}=$$

$$2\left(1-3.\,(-z)-3\frac{-3-1}{2}.\,(-z)^2-3.\frac{-3-1}{2}.\frac{-3-2}{3}(-z)^3\right);$$

ó efectuando los cálculos y reduciendo,

$$2\,(1-z)\,1^{-3}=2\,(1+3z+6z^2+10z^3+15z^4+\ldots).$$

Tomemos por último ejemplo la cantidad $\sqrt[3]{2z-z^2}$; que se convierte en $\sqrt[3]{2z}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, y desarrollemos $\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Poniendo en la fórmula $(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\ldots$, $x=1$, $a=-\frac{z}{2}$, $m=\frac{1}{3}$, se tiene

$$\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$1+\frac{1}{3}\left(-\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{3}.\frac{\frac{1}{3}-1}{2}.\left(-\frac{z}{2}\right)^2\ldots\ldots\ldots\ldots=$$

$$1-\frac{1}{6}z-\frac{1}{36}z^2-\frac{5}{648}.\,z^3-\text{etc.};$$

luego,

$$\sqrt[3]{2z-z^2}=\sqrt[3]{2z}\left(1-\frac{1}{6}z-\frac{1}{36}z^2-\frac{5}{648}z^3-\text{etc.}\right)$$

De los coeficientes indeterminados. Nociones acerca de las series recurrentes.

179. Los algebristas han inventado para ejectuar el desarrollo de las espresiones algebráicas en series otro método que es en general mas simple que los de que acabamos de hablar, y ademas mucho mas fecundo, por cuanto se aplica á espresiones de cualquiera naturaleza.

Para dar una idea de este método, desarrollaremos la espresion $\frac{a}{a'+b'x}$ en una serie que proceda segun las potencias enteras y positivas de x. Se ve desde luego que es posible este desarrollo, porque $\frac{a}{a'+b'x}$ se convierte en $a(a'+b'x)^{-1}$; y aplicando la fórmula del binomio se obtendria una serie de términos que procederian segun las potencias ascendentes, enteras y positivas de x. Supongamos pues

$$(1)\quad \frac{a}{a'+b'x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots,$$

en que A, B, C, D.... son coeficientes funciones de a, a', b', pero independientes de x; coeficientes que se trata por otro lado de determinar, y que se llaman por esta razon *coeficientes indeterminados*. (Esta determinacion es impropia; segun el sentido atribuido hasta ahora á la palabra *indeterminado*, valdria mas decir *coeficientes por determinar*; pero nos conformaremos con el uso.)

Para llegar á la determinacion de estos coeficientes, suprimamos el denominador de la ecuacion (1); ordenemos respecto á x, y traspongamos el término a; y sale

$$(2)\quad o=\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} Aa'+Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+Ea' & x^4+\ldots \\ -a+Ab' & +Bb' & +Cb' & +Db' & \end{array}\right.$$

Observemos ahora que si estuviesen convenientemente determinados los valores de A, B, C, D, debe verificarse la ecuacion (1), sea el que quiera el valor que se dé á x; pudiendo decirse otro tanto de la ecuacion (2).

Cuando se supone, pues, $x=o$, esta se convierte en $o=Aa'-a$, de donde se deduce el valor de A,

$$A=\frac{a}{a'}.$$

Como A es igual á $\frac{a}{a'}$ cuando se tiene $x=o$, debe conservar el mismo valor cuando x es otro cualquiera, pues que A es independiente de x.

De manera que cualquiera que sea x, la ecuacion (2) se reduce á

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} o=\left\{\begin{array}{l|l|l|l} Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+\ldots, \\ +Ab' & +Bb' & Cb' & \end{array}\right. \\ \text{ó diviendo por } x, \\ o=\left\{\begin{array}{l|l|l|l} Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^2+\ldots \\ +Ab' & +Bb' & +Cb' & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Como esta ecuacion debe verificarse para todo valor de x, hagamos $x=o$; y resultará $Ba'+Ab'=o$;

$$B=-\frac{Ab'}{a'},\ \text{ó bien},\ B=\frac{a}{a'}\times-\frac{b'}{a'}=-\frac{ab'}{a'^2}.$$

Debiendo B conservar este mismo valor, cualquiera que sea x, suprimamos en (3) el primer término $Ba'+Ab'$ que se destruye por este valor de B, y dividamos por x; saldrá

$$0=\left\{\begin{array}{l|l|l} Ca'+Da' & x+Ea' & x^2+\ldots \\ +Bb'+Cb' & +Db' & \end{array}\right.$$

Hagamos de nuevo $x=0$; y resultará $Ca'+Bb'=0$, de donde se deduce $C=-\frac{Bb'}{a'^2}$, ó bien $C=-\frac{ab'}{a'^2}\times-\frac{b'}{a'}=\frac{ab'^2}{a'^3}$,

Se encontraria del mismo modo. . . . $Da'+Cb'=0$,

de donde $D=-\frac{Cb'}{a'}$, ó $D=\frac{ab'^2}{a'^2}\times-\frac{b'}{a'}=-\frac{ab'^3}{a'^4}$;

y así sucesivamente.

Es fácil reconocer que un coeficiente cualquiera se forma por medio del que le precede, multiplicándolo por $-\frac{b'}{a'}$; así se tiene

$$\frac{a}{a'+b'x}=\frac{a}{a'}-\frac{ab'}{a'^2}x+\frac{ab'^2}{a'^3}x^2-\frac{ab'^3}{a'^4}x^3+\frac{ab'^4}{a'^5}x^4-\ldots..$$

180. Reflexionando acerca de los razonamientos anteriores, se ve que el principio fundamental del método de los coeficientes indeterminados consiste en que

Si debe verificarse una ecuacion de la forma $0=M+Nx+Px^2+Qx^3+\ldots$ (en que M, N, P,..... son coeficientes independientes de x) *cualquiera que sea el valor que se dé á* x, *es necesario que cada coeficiente sea por separado igual á* 0.

En efecto, como estos coeficientes son independientes de x, tan luego como se llega á determinarlos, por hipótesis particulares hechas sobre x, estos valores serán los que les convienen, si se supone á x cualquiera: de modo que haciendo $x=0$, se halla $M=0$; y la ecuacion se reduce, hecha la division por x, á

$$0=N+Px+Qx^2+\ldots;$$

haciendo en esta nueva ecuacion $x=0$, se encuentra $N=0$; reduciéndose la ecuacion, cuando se ha dividido por x á $0=P+Qx+\ldots$; y así sucesivamente. Se tiene pues separadamente

$$M=0,\ N=0,\ P=0,\ Q=0,\ldots;$$

por este medio se obtienen tantas ecuaciones como coeficientes A, B, C, D,.... hay que determinar.

Este principio se enuncia tambien de otra manera:

Si una ecuacion de la forma

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots=a'+b'x+c'x^2+d'x^3\ldots$$

debe verificarse cualquiera que sea el valor que se dé á x, *los términos afectados de una misma potencia en ambos miembros son respectivamente iguales.*

En efecto, una vez hecha la trasposicion de todos los términos á el segundo miembro, la ecuacion es de la misma forma que arriba; de donde se deduce

$$a'-a=0,\ b'-b=0,\ c'-c=0,\ldots.$$

y por consiguiente,

$$a'=a,\ b'=b,\ c'=c,\ d'=d,\ldots.$$

Dase el nombre (número 42) de *ecuacion idéntica* á toda ecuacion cuyos términos están ordenados respecto á cierta letra, y que debe verificarse para todos los valores atribuidos á ella, á fin de distinguirla de una *ecuacion ordinaria*, es decir, de una ecuacion que no puede satisfacerse mas que por ciertos valores atribuidos á esta letra.

181. El método de los *coeficientes indeterminados* exige ademas que se conozca *a priori* la forma del desarrollo respecto á los esponentes de x. Se supone comunmente que el desarrollo procede segun las diversas potencias ascendentes, enteras y positivas de x, á partir de la potencia x^0; aunque algunas veces no es conveniente esta forma, haciéndolo conocer la serie misma de los cálculos.

Propongamos, por ejemplo, que haya que desarrollar la espresion $\frac{1}{3x-x^2}$.

Supongamos $\frac{1}{3x-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots;$

suprimiendo los denominadores y ordenando, se encuentra

$$0=\begin{array}{l|l|l|l} -1+3Ax+3B & x^2+3C & x^3+3D & x^4+\ldots, \\ \quad\quad -A & \quad -B & \quad -C & \end{array}$$

de donde se deberia concluir (núm. 180)

$$-1=0,\ 3A=0,\ 3B-A=0,\ldots.$$

Pero la primera ecuacion $-1=0$ es absurda ó indica que la forma anterior no conviene á la espresion $\frac{1}{3x-x^2}$; pero poniendo esta bajo la forma $\frac{1}{x}\times\frac{1}{3-x}$, y suponiendo

$$\frac{1}{x}\times\frac{1}{3-x}=\frac{1}{x}\,(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots),$$

se obtiene, hecha la reducion,

$$0=\left\{\begin{array}{l|l|l|l} 3A+3B & x+3C & x^2+3D & x^3+\ldots, \\ -1-A & \quad -B & \quad -C & \end{array}\right.$$

lo cual da las ecuaciones

$$3A-1=0,\ 3B-A=0,\ 3C-B=0\ldots,$$

de donde se saca sucesivamente

$$A=\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{9},\ C=\frac{1}{27},\ D=\frac{1}{81},\ldots.$$

Luego $\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}x^2+\frac{1}{81}x^3+\ldots\right),$

ó bien, $\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{3}x^{-1}+\frac{1}{9}x^0+\frac{1}{27}x^0+\frac{1}{18}x^1+\ldots,$

es decir que el desarrollo encierra en su espresion un término afectado de un esponente negativo.

182. *Demostracion de la fórmula del binomio por el método de los coeficientes indeterminados.*

Para hacer ver lo fecundo del método de los coeficientes indeterminados, vamos á dar una demostracion completa de la fórmula del binomio, fundada sobre este método:

Con el objeto de simplificar el cálculo, observaremos primeramente que $(x+a)^m$ puede ponerse bajo la forma $x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$.

Si se supone $\frac{a}{x}+y$, y se desarrolla $(1+y)^m$, bastará en seguida mul-

tiplicar este desarrollo por x^m, reemplazando luego y por $\frac{a}{x}$; y se obtendrá el desarrollo de $(x+a)^m$.

(Esta trasformacion tiene por objeto evitar en el cálculo las potencias x^m x^{m-1},... del primer término x.)

Admitido esto, supongamos m igual á un número positivo $\frac{p}{q}$ (pudiendo q ser igual á 1, lo que da el caso del esponente entero).

Supongamos

$$(1)\qquad (1+y)^{\frac{p}{q}}=1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots$$

[Nos vemos conducidos á dar esta forma al desarrollo por la formacion de las primeras potencias enteras, observando que para $y=0$, el primer miembro se reduce á 1; de donde se sigue que la parte independiente de y, en el segundo miembro debe ser igual á 1.]

Para determinar los coeficientes A, B, C, D,... reemplacemos en la ecuacion (1), y por z; y se convertirá en

$$(2)\qquad (1+z)^{\frac{p}{q}}=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots$$

[A, B, C,... tienen aquí evidentemente los mismos valores que ántes, pues que son independientes de todo valor atribuido á y].

Restando una de otra estas dos ecuaciones, se halla

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}(4+y)^{\frac{p}{q}}-(1+z)^{\frac{p}{q}}&=A(y-z)+B(y^2-z^2)\\&+C(y^3-z^3)+D(y^4-z^4)+\ldots\end{aligned}\right.$$

Hagamos interinamente $(1+y)^{\frac{1}{q}}=u$, $(1+z)^{\frac{1}{q}}=v$; lo que da $1+y=u^q$, $1+z=v^q$; de donde $y-z=u^q-v^q$;
la ecuacion (3) se convierte entónces en

$$(4)\qquad u^p-v^p=A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3+z^3)+D(y^4-z^4)+\ldots,$$

ó dividiendo el primer miembro por u^q-v^q, y el segundo por $y-z$, que es igual á u^q-v^q,

$$\frac{u^p-v^p}{u^q-v^q}=\frac{A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3+D(y^4-z^4)+\ldots}{y-z}$$

De modo que segun el *teorema* (núm. 31), u^p-v^p es divisible por $u-v$; y se obtiene por cociente correspondiente,

$$u^{p-1}+vu^{p-2}+v^2u^{p-3}+\ldots+v^{p-1}.$$

Del mismo modo, u^q-v^q $u-v$ es igual á

$$u^{q-1}+vu^{q-2}-v^2u^{q-3}+\ldots+v^{q-1}.$$

Por otra parte, $\qquad y-z,\ y^2-z^2,\ y^3-z^3,\ y^4-z^4,\ldots$

divididos por $y-z$ dan tambien por cocientes respectivos,

$$1,\ y+z,\ y^2+yz+z^2,\ y^3+y^2z+yz^2+z^3,\ldots;$$

de suerte que la ecuacion (4) se convierte en

$$\frac{u^{p-1}+vu^{p-2}+v^3u^{p-3}+\ldots+v^{p-1}}{u^{q-1}+vu^{q-2}+v^3u^{q-3}+\ldots+v^{q-1}}=A+B(y+z)+C(y^2+yz+z^2)+D(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\ldots$$

Hagamos ahora $y=z$, de donde se deduce $u=v$ [segun las ecuaciones $(1+y)^{\frac{1}{q}}=u$, $(1+z)^{\frac{1}{q}}=v$];

se tendrá para el primer miembro, $\frac{p.\,u^{p-1}}{q.\,u^{q-1}}$ ó $\frac{p}{q}.\frac{u^p}{u^q}$.

Si se pone en lugar de u^p su valor $(1+y)^{\frac{p}{q}}$ ó $1+Ay+By^2+Cy^3+\ldots$, y en lugar de u^q su valor $1+y$, este primer miembro se convierte tambien en

$$\frac{p}{q}.\frac{4+Ay+By^2+Cy^3+\ldots}{1+y}$$

Por otra parte, el segundo miembro se reduce á

$$A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots;$$

se tiene pues la nueva ecuacion

$$\frac{p}{q}.\frac{1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots}{1+y}=A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots$$

de donde suprimiendo el denominador $1+y$, y efectuando los cálculos:

$$\frac{p}{q}+\frac{p}{q}.\,Ay+\frac{p}{q}.\,By^2+\frac{p}{q}.\,Cy^3+\frac{p}{q}.\,Dy^4+\ldots=$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A+2B & y+3C & y^2+4D & y^3+5E & y^4+\ldots \\ +A & +2B & +3C & +4D & \end{array}$$

Comparando (número 180) los dos miembros de esta *ecuacion idéntica*, se obtienen las igualdades siguientes :

$$\frac{p}{q}=A,\ \text{ó}\ A=\frac{p}{q};$$

$$\frac{p}{q}\,A=2B+A,\ 2B=A\left(\frac{p}{q}-1\right);\ \text{luego}\ B=\frac{A\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2}$$

$$\frac{p}{q}\,B=3C+2B,\ 3C=B\left(\frac{p}{q}-2\right);\ \text{luego}\ C=\frac{B\left(\frac{p}{q}-2\right)}{3}$$

$$\frac{p}{q}\,C=4D+3C,\ 4D=C\left(\frac{p}{q}-3\right);\ \text{luego}\ D=\frac{C\left(\frac{p}{q}-3\right)}{4}$$

y así sucesivamente.

La ley de formacion de los coeficientes sucesivos está bien manifiesta. Sea N el coeficiente que tiene n términos delante de sí, y M el que le precede; se tendria evidentemente

$$\frac{p}{q}M=Nn+(n-1)M;\ \text{de donde}\ N=\frac{M\left(\frac{p}{q}-n+1\right)}{n}.$$

Volviendo á tomar la demostracion precedente nos aseguraríamos fácilmente de que se aplica al caso en que se tiene $q=1$, es decir al caso en que el esponente es entero.

En cuanto al caso en que m es igual á un número fraccionario negativo, $-\frac{p}{q}$, se sigue absolutamente la misma marcha que anteriormente; pero en llegando á la ecuacion que corresponde á la (4), á saber :

$$u^{-p}-v^{-p}=A\,(y-z)+B\,(y^2-z^2)+C\,(y-z^3)+\ldots,$$

se observa que

$$u^{-p}-v^{-p}=\frac{1}{u^p}-\frac{1}{v^p}=\frac{v^p-u^p}{u^p\,v^p}=-\frac{u^p-v^p}{u^p\,v^p};$$

de suerte que dividiendo el primer miembro por u^q-v^q, y el segundo por $y-z$, que es igual á u^q-v^q, se tiene

$$-\frac{1}{u^p\,v^p}.\frac{u^p-v^p}{u^q-v^q}=\frac{A(y-z)+B(y^2-z^2)+\ldots}{y-z},$$

ó suprimiendo el factor $u=v$ y el factor $y-z$,

$$-\frac{1}{u^p\,v^p}.\frac{u^{p-1}+vu^{p-2}+\ldots+v^{p-1}}{u^{q-1}+vu^{q-1}+\ldots+v^{q-1}}=A+B(y+z)+\ldots;$$

haciendo $y=z$, de donde $u=v$, se obtiene

$$-\frac{1}{u^{2p}}.\frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}}=-\frac{p}{q}.\frac{u^{-p}}{u^q}=A+2By+3Cy^2+\ldots$$

Lo demas del cálculo es absolutamente semejante al del caso precedente.

Ahora, pues que se tiene, cualquiera que sea m,

$$(1+y)^m=1+my+m\frac{m-1}{2}y^2+\ldots,$$

reemplacemos y por $\frac{a}{x}$ y multipliquemos por x^m; sale

$$x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m,\ \text{ó}\ (x+a)^m=x^m+max^{m-1}+m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}+\ldots$$

Y queda demostrada generalmente la fórmula del binomio.

133. *De las series recurrentes.* El desarrollo de las fracciones algebráicas racionales segun el método de los coeficientes indeterminados, da lugar á series de una naturaleza particular, conocidas con el nombre de *series recurrentes.*

Vimos ya (número 179) que la espresion $\frac{a}{a'+b'x}$ tiene por desarrollo, $\frac{a}{a'}-\frac{ab'}{a'^2}x+\frac{ab'^2}{a'^3}x^2-\frac{ab'^3}{a'^4}\ldots,$

en cuya serie se forma cada término por medio del precedente, multiplicando este por $\frac{b'}{a'}x$.

Esa propiedad no es peculiar á la fraccion propuesta, sino que pertenece á todas las fracciones algebráicas racionales, y consiste en que

Toda fraccion racional en x, *reducida á serie, da márgen á una serie de términos cada uno de los cuales es igual á la suma algebráica de un mismo número de los términos precedentes, multiplicados respectivamente por ciertas cantidades constantes, en toda la estension de la serie.*

El conjunto de las constantes por las que se debe multiplicar cierto número de términos precedentes para formar un término cualquiera, se llama la *escala de relacion* de la serie.

En la serie precedente la *escala de relacion* es $\frac{b'}{a'}.\ x$;

y la serie se llama una *serie recurrente de primer órden.*

Supongamos que se tenga que desarrollar en serie; la espresion $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$.

Supongamos $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ldots$

de donde quitando los denominadores y trasponiendo,

$$0=\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} Aa'+Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+Ea' & x^4+\ldots \\ -a+Ab' & +Bb' & +Cb' & +Db' & \\ -b & +Ac' & +Bc' & +Cc' & \\ & -c & +Ad' & +Bd' & \end{array}\right.$$

lo que da las ecuaciones

$$Aa'-a=0,\quad \text{de donde}\quad A=\frac{a}{a'}$$

$$Ba'+Ab'-b=0,\quad B=-\frac{b'}{a'}A+\frac{1}{a'}b=\frac{-ab+ba'}{a'^2},$$

$$Ca'+Bb'+Ac'-c=0,\quad C=-\frac{b'}{a'}B-\frac{1}{a'}A+\frac{1}{a'}c;$$

$$C=\frac{ab'^2-ba'b'-aa'c'+ca'^2}{a'^3},$$

$$Da'+Cb'+Bc'+Ad'=0,\quad D=-\frac{b'}{a'}C-\frac{c'}{a'}B-\frac{d'}{a'}A,$$

$$Ea'+Db'+Cc'+Bd'=0,\quad E=-\frac{b'}{a'}D-\frac{c'}{a'}C-\frac{d'}{a'}B,$$

. . . . . .

. . . . . .

En donde se ve que los tres primeros coeficientes se obtienen al principio sin ley alguna; aunque desde el cuarto cada uno se forma ya de la suma de los tres que le preceden, multiplicados respectivamente por $-\frac{b'}{a'}$, $-\frac{c'}{a'}$, $-\frac{d'}{a'}$, á saber $-\frac{b'}{a'}$ para el coeficiente que precede inmediatamente, $-\frac{c'}{a'}$ para el que precede otros dos y $-\frac{d'}{a'}$ para el que preceden tres; de este modo los coeficientes A, B, C, D,... forman ya entre sí una *serie recurrente* cuya *escala de relacion* se compone de $\left(-\frac{b'}{a'}, -\frac{c'}{a'}, -\frac{d'}{a'}\right)$.

Resulta de esta ley de formacion de los coeficientes, que el cuarto término de la serie, Dx^3, es igual á

$$-\frac{b'}{a'}Cx^3-\frac{c'}{a'}Bx^3-\frac{d'}{a'}Ax^3,$$

ó bien,

$$-\frac{b'}{a'}x.\ Cx^2-\frac{c'}{a'}x^2.\ Bx-\frac{d'}{a'}x^3.\ A.$$

Se tiene asimismo para el término Ex^4,

$$-\frac{b'}{a'}Dx^4-\frac{c'}{a'}Cx^4-\frac{d'}{a'}Bx^4,$$

ó bien

$$-\frac{b'}{a'}x.\ Dx^3-\frac{c'}{a'}x^2.Cx^2-\frac{d'}{a'}x^3.\ Bx;$$

y así sucesivamente

Luego cada término de la serie pedida, á partir del cuarto, es igual á la suma de tres términos precedentes, multiplicados respectivamente por $\left(-\frac{b'}{a'}x, -\frac{c'}{a'}x^2, -\frac{d'}{a'}x^3\right)$.

En cuanto á los tres primeros términos $A+Bx+Cx$, se los obtiene reemplazando A, B, C, por sus valores obtenidos ántes.

184. Divídense las series recurrentes en diferentes órdenes; y el órden se aprecia por el número de los términos necesarios para formar un término cualquiera.

Así la espresion $\frac{a}{a'+b'x}$ da lugar á una serie recurrente *del primer órden*, cuya escala de relacion es $-\frac{b'}{a'}x$.

La espresion $\frac{a'+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ daria lugar á otra del *segundo*, cuya escala de relacion seria

$$\left(-\frac{b'}{a'}x;\ -\frac{c'}{a'}x^2\right).$$

La serie obtenida en el número precedente es del tercer órden. En general una espresion de la forma $\frac{a+bx+cx^2+\ldots+kx^{n-1}}{a'+b'x+c'x^2+\ldots+k'x^n}$ da orígen á una serie recurrente del órden n, cuya escala es

$$\left(-\frac{b'}{a'}x,\ -\frac{c'}{a'}x^2,\ldots-\frac{k'}{a'}x^n\right).$$

Nota. Suponemos aquí que el grado de x es menor en el numerador que en el denominador. Si así no fuese, seria preciso hacer la division, ordenando con relacion á las potencias ascendentes de x, lo que daria cierto cociente entero respecto á x, mas una fraccion semejante á la fraccion anterior.

Así, sea la espresion $\frac{1-x-3x^2+4x^3+x^4}{2-5x+3x^2-x^3}$

$$\left.\begin{array}{l} x^4+4x^3-3x^2-x+1 \\ \hline +7x^3-8x^2-x \\ \hline +13x^2-34x+15. \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x^3+3x^2-5x+2 \\ \hline -x-7 \end{array}$$

Efectuando la division, se encuentra por cociente, $-x-7$, y para fraccion completante de este cociente,

$$\frac{13x^2-34x+15}{-x^3+3x^2-5x+2},\quad \text{ó}\quad \frac{15-34x+13x^2}{2-5x+3x^2-x^3}.$$

La propiedad enunciada en el núm. 183 sufriria ademas algunas modificaciones si el numerador fuere de un grado mas elevado que el denominador.

Volveremos mas adelante á tratar de esta clase de series, que ofrecen varias cuestiones, de importante resolucion.

CAPÍTULO VI.

TEORÍAS DE LAS PROGRESIONES Y DE LOS LOGARITMOS.

El presente capítulo está naturalmente unido al precedente, no solo porque el primer párrafo tiene por objeto el exámen de las propiedades de dos especies de series, sino porque suministra una aplicacion inmediata de la teoría de los esponentes de una naturaleza cualquiera; de este modo viene á completar los conocimientos algebráicos absolutamente indispensables para el estudio de la *Trigonometría* y de la *aplicacion del álgebra á la geometría*.

§ 1. DE LAS PROGRESIONES POR DIFERENCIA Y DE LAS PROGRESIONES POR COCIENTE.

Progresiones por diferencia.

185. Llámase *progresion por diferencia* (ó *aritmética*) una serie de términos, cada uno de los cuales escede al que le precede, ó es escedido por él, en una cantidad constante á que se da el nombre de *razon ó diferencia* de la progresion.

Así, sean las dos series

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25,...,
60, 56, 52, 48, 44, 40, 36, 32, 28...

La primera se dice que es una *progresion creciente* cuya *razon* es 3, y la segunda una *progresion decreciente* cuya razon es 4.

Designemos en general por a, b, c, d, e, f,... los términos de una progresion por diferencia. Se escribe de este modo: