La espresion $\frac{a'+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ daria lugar á otra del *segundo*, cuya escala de relacion seria

$$\left(-\frac{b'}{a'}x;\ -\frac{c'}{a'}x^2\right).$$

La serie obtenida en el número precedente es del tercer órden. En general una espresion de la forma $\frac{a+bx+cx^2+\ldots+kx^{n-1}}{a'+b'x+c'x^2+\ldots+k'x^n}$ da orígen á una serie recurrente del órden n, cuya escala es

$$\left(-\frac{b'}{a'}x,\ -\frac{c'}{a'}x^2,\ldots-\frac{k'}{a'}x^n\right).$$

Nota. Suponemos aquí que el grado de x es menor en el numerador que en el denominador. Si así no fuese, seria preciso hacer la division, ordenando con relacion á las potencias ascendentes de x, lo que daria cierto cociente entero respecto á x, mas una fraccion semejante á la fraccion anterior.

Así, sea la espresion $\frac{1-x-3x^2+4x^3+x^4}{2-5x+3x^2-x^3}$

$$\left.\begin{array}{l} x^4+4x^3-3x^2-x+1 \\ \hline +7x^3-8x^2-x \\ \hline +13x^2-34x+15. \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x^3+3x^2-5x+2 \\ \hline -x-7 \end{array}$$

Efectuando la division, se encuentra por cociente, $-x-7$, y para fraccion completante de este cociente,

$$\frac{13x^2-34x+15}{-x^3+3x^2-5x+2},\quad \text{ó}\quad \frac{15-34x+13x^2}{2-5x+3x^2-x^3}.$$

La propiedad enunciada en el núm. 183 sufriria ademas algunas modificaciones si el numerador fuere de un grado mas elevado que el denominador.

Volveremos mas adelante á tratar de esta clase de series, que ofrecen varias cuestiones, de importante resolucion.

CAPÍTULO VI.

TEORÍAS DE LAS PROGRESIONES Y DE LOS LOGARITMOS.

El presente capítulo está naturalmente unido al precedente, no solo porque el primer párrafo tiene por objeto el exámen de las propiedades de dos especies de series, sino porque suministra una aplicacion inmediata de la teoría de los esponentes de una naturaleza cualquiera; de este modo viene á completar los conocimientos algebráicos absolutamente indispensables para el estudio de la *Trigonometría* y de la *aplicacion del álgebra á la geometría*.

§ 1. DE LAS PROGRESIONES POR DIFERENCIA Y DE LAS PROGRESIONES POR COCIENTE.

Progresiones por diferencia.

185. Llámase *progresion por diferencia* (ó *aritmética*) una serie de términos, cada uno de los cuales escede al que le precede, ó es escedido por él, en una cantidad constante á que se da el nombre de *razon ó diferencia* de la progresion.

Así, sean las dos series

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25,...,
60, 56, 52, 48, 44, 40, 36, 32, 28...

La primera se dice que es una *progresion creciente* cuya *razon* es 3, y la segunda una *progresion decreciente* cuya razon es 4.

Designemos en general por a, b, c, d, e, f,... los términos de una progresion por diferencia. Se escribe de este modo:

$\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g.\ h.\ i.\ k.$

y se deberia enunciar : *como* a *es á* b , b *es á* c, c *es á* d, d *es á* e..., pero se dice simplemente, a *es á* b *es á* c *es á* d *es á* e,...

Esta es una serie de *equidiferencias continuas*, en que cada término es á la vez consecuente y antecedente, á escepcion del primero que solo es *antecedente*, y del último que solo es *consiguiente*.

186. Llamemos r á la *razon* de la progresion, que supondremos creciente en todo lo que se sigue. (Si fuese decreciente bastaria cambiar r en $-r$ en los resultados.)

Sentado esto, se tiene evidentemente, segun la definicion de la progresion,

$$b=a+r,\quad c=b+r=a+2r,\quad d=c+r=a+3r,\ldots;$$

y en general *un término de órden cualquiera es igual al primero, mas tantas veces la razon como términos hay delante del que se considera.*

Así, sea l este término y n el número total de los términos, hasta este inclusive; y se tendrá para este *término general*,

(1) $$l=a+(n-1)r.$$

En efecto, hágase $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,$

y se vuelven á encontrar sucesivamente todos los términos de la progresion.

Si la progresion fuese decreciente, se tendria por el contrario

$$l=a-(n-1)\,r.$$

La fórmula (1) sirve para hallar un término de órden cualquiera, sin que haya necesidad de determinar desde luego los que le preceden.

De modo que para encontrar el 50 término de la progresion

$$\div\ 1.\ 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19r\ldots,$$

se hace $n=50$, lo que da $l=1+49.\ 3=148$.

187. Dada una progresion por diferencia, se puede proponer *Determinar la suma de un cierto número de términos.*

Sea la progresion $\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f\ldots\ i.\ k.\ l$, prolongada hasta el término l inclusive · designemos por n el número de los términos, y por r la razon.

Observemos ante todo que si x designa un término que tiene p delante de sí, y y otro que tiene p detras de sí, se tendrán, segun lo que hemos dicho, las igualdades $\begin{cases} x=a+p\times r, \\ y=l-p\times r; \end{cases}$

de donde se deduce, sumándolos

$$x+y=a+l;$$

lo cual demuestra que en toda progresion,

La suma de dos términos cualesquiera, tomados á igual distancia de los estremos es igual á la suma de estos; ó bien *los dos estremos, y dos términos tomados á igual distancia de estos estremos, forman una equi-diferencia, en el órden en que están escritos.*

Admitido esto escribamos de la manera siguiente la progresion debajo de sí misma, pero en un órden inverso :

$$\div\ a.\ b.\ c.\ \ldots\ i:k.\ l.$$
$$\div\ l.\ k.\ i.\ \ldots\ c.\ b.\ a.$$

Llamemos S á la suma de los términos de la progresion propuesta; 2S será la suma de los términos de las dos progresiones; y se tendrá, reuniendo los términos en columna vertical,

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+(i+c)+(k+b)+(l+a);$$

ó bien, como todas las partes $a+l,\ b+k,\ c+i,\ldots$ son iguales : y en número n. $2S=(a+l)n;$

luego en fin

(2) $$S=\frac{(a+l)\,n}{2},$$

es decir que *la suma de los términos de una progresion por diferencia e igual al producto de la suma de los estremos multiplicada por la mitad del número de los términos.*

Si en esta fórmula se reemplaza l por su valor $a+(n-1)r$ se obtiene tambien

$$S=\frac{[2a+(n-)r]n}{2};$$

pero la primera espresion es la mas usual.

Aplicaciones. Se pide la suma de los 50 primeros términos de la progresion $\div\ 2.\ 9.\ 16.\ 23.\ 30\ldots$

Se tiene desde luego para el 50 término,

$$l=2+49.\ 7=345\ ;$$

luego $$S=\frac{(2+345).\ 50}{2}=347\times25=8675.$$

Se encontraria igualmente para el 100mo término,

$$l=2+99.\ 7=695\ ;$$

y para la suma de los 100 primeros términos,

$$S=\frac{(2+695)100}{2}=34850.$$

188. Las fórmulas (1) y (2) encierran cinco cantidades a, r, n, l y S, y por consiguiente dan lugar á este problema general :

Dadas tres cantidades cualesquiera de estas cinco, determinar las otras dos.

Este problema se subdivide en tantos problemas particulares como *productos diferentes* 3 á 3, ó 2 á 2, pueden formarse con 5 letras. Hemos obtenido, pues, (núm. 147) para los números de productos 2 á 2 y 3 á 3,

$$\frac{m(m-1)}{2}\ y\ \frac{m(m-1)\ (m-2)}{2.3}$$

Haciendo en estas fórmulas, $m=5$, se encuentra $\frac{5\times4}{2}$ ó 10, y $\frac{5\times4\times3}{2.3}$ ó 10; por donde se ve que 5 letras combinadas *tres* á *tres*, dan el mismo número de combinaciones que 5 letras combinadas *dos* á *dos*. (Este resultado está de acuerdo con la consecuencia del núm. 150.)

De modo que el anterior problema se subdivide en 10 problemas particulares cuyos enunciados son :

Dados,	1°.	a,	r,	n,	encontrar	l y S;
	2°.	a,	r,	l,	. . . .	n y S;
	3°.	a,	r,	S,	. . . .	n y l;
	4°.	a,	n,	l,	. . . .	r y S;
	5°.	a,	n,	S,	. . . .	r y l;
	6°.	a,	l,	S,	. . . .	r y n;
	7°.	r,	n,	l,	. . . .	a y S;
	8°.	r,	n,	S,	. . . .	a y l;
	9°.	r,	l,	S,	. . . .	a y n;
	10°.	n,	l,	S,	. . . .	a y r.

El primer problema está ya resuelto, pues que las dos fórmulas dan inmediatamente l y S en funcion de a, r, n. Por lo que toca á los siguientes, su resolucion no presenta dificultad alguna; pero invitamos á los principiantes á tratarlos sucesivamente, porque este ejercicio es muy á propósito para familiarizarse con la resolucion de las ecuaciones de primero y segundo grado; pues (conviene advertirlo) aunque las cantidades a, r, n, l y S no se hallen afectadas de esponente alguno en ambas fórmulas, nos vemos conducidos á resolver una ecuacion del segundo grado cuando son desconocidas a y n, ó bien l y n; porque estas cantidades entran á la vez en ambas ecuaciones, y se multiplican entre sí en la segunda.

NOTA. Es fácil esplicar cuál es la razon de que en estos dos problemas deba depender la determinacion de cada incógnita de una ecuacion del segundo grado.

Sea en efecto la progresion decreciente

$$\div\ 11.\ 6.\ 7.\ 5.\ 3.\ 1.\ -1.\ -3.\ -5....$$

Se ve que la suma de los tres primeros términos, como la de los 9 primeros es igual á 27. Luego si se diese $a=11$, $r=-2$, $S=27$, y se pidiese l y n, deberian obtenerse los dos sistemas $l=7$, $n=3$, y $l=-5$, $n=9$; luego la determinacion de n, por ejemplo, debe depender de una ecuacion del segundo grado.

189. Nos limitaremos á resolver el cuarto problema; que es el caso en que,

Conociendo a, n, *y* l, *se trata de determinar* r *y* S. La fórmula $l=a+(n-1)r$ da $r=\frac{l-a}{n-1}$;

y la fórmula $S=\frac{(a+l)n}{2}$ hace conocer inmediatamente á S.

De la primera espresion, $r=\frac{l-a}{n-1}$, se deduce la solucion de esta cuestion :

Interpolar entre dos números dados a *y* b *un número* m DE MEDIOS DIFERENCIALES. (Llámanse así unos números comprendidos entre a y b, y que forman con estos una progresion por diferencia.)

Para resolver esta última cuestion basta determinar la razon; de modo que, reemplazando en la fórmula anterior, l por b, y n por $(m+2)$ que espresa actualmente el número total de los términos, se alla $r=\frac{b-a}{m+2-1}$, ó $r=\frac{b-a}{m+1}$;

es decir que *la razon* de la progresion buscada *se obtiene dividiendo la*

diferencia de los dos números dados a *y* b *por el número de los términos que hay que interpolar, mas* UNO.

Una vez obtenida la razon, se forma el segundo término de la progresion, ó el *primer medio diferencial,* añadiendo r, ó $\frac{b-a}{m+1}$, al primer término a; el *segundo medio* se obtiene aumentando á este r, y así sucesivamente.

Supongamos que hay que interpolar 12 medios diferenciales entre 12 y 17.

Se tiene $r=\frac{77-12}{13}=\frac{65}{13}=5$, lo que da la progresion

$$\div\ 12.\ 17.\ 22.\ 27.\ 32.\ 37....\ 72.\ 77.$$

CONSECUENCIA. *Si entre los términos consecutivos de una progresion por diferencia, considerados dos á dos, se interpola un mismo número de medios diferenciales, estos términos y los medios diferenciales reunidos no forman mas que una sola y misma progresion.*

En efecto, sea $\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f....$ la progresion propuesta, m el número de los medios que hay que interpolar entre a y b, entre b y c, c y d....

La razon de cada progresion parcial estará espresada segun lo dicho, por

$$\frac{b-a}{m+1},\ \frac{c-b}{m+1},\ \frac{d-c}{m+1},.....,$$

cantidades iguales todas, pues que a, b, c... están en progresion; de modo que la razon es la misma en cada progresion parcial; y como por otra parte el *último término* de la primera es el mismo que *el primer término* de la segunda, y así sucesivamente, se puede concluir que todas estas progresiones parciales constituyen una progresion única.

190. Hé aquí los enunciados de algunos problemas:

PRIMERA PREGUNTA. *Determinar el primer término y el número de los términos de una progresion por diferencia cuya razon es* 6, *el último término* 185, *y la suma* 2945?

(*Respuesta.* Primer término=5, número de los términos=31.)

SEGUNDA PREGUNTA. *Interpolar entre dos cualesquiera de los términos de la progresion* $\div$ 2. 5. 8. 11. 14....., NUEVE *medios diferenciales?*

(*Respuesta.* Razon, ó $r=0,3$.)

TERCERA PREGUNTA. Hallar el número de hombres contenidos en un batallon triangular cuya primera fila conste de 1, la segunda de 2, la tercera de 3, y la n^{ma} de n. En otros términos, *hallar* la espresion de la suma de los números naturales 1, 2, 3,.... desde s hasta n?

(*Respuesta.* $S=\frac{n(n+1)}{2}$).

CUARTA PREGUNTA. *Hallar la suma de los* n *primeros términos de la progresion de los números impares* 1, 3, 5, 7, 9....

(*Respuesta.* $S=n^2$, ó el cuadrado del número de los términos.)

QUINTA PREGUNTA. *Un monton de arena dista* 40 *metros de una alameda, que exige para enarenarse* 100 *carros, entre cada uno de los cuales ha de quedar un intervalo de* 6 *metros. Se pregunta cuánto es lo que debe andar el carretero, descargando el primer carro á* 40 *metros del monton de arena, y debiendo al fin volver al punto de donde habia salido?*

(*Respuesta.* 67400 metros.)

SESTA PREGUNTA. *Un correo hace* 10 *leguas por dia; un jinete parte al mismo tiempo que él, y no hace mas que* 3 *leguas en el primer dia, pero en cada uno de los dias siguientes hace* 2 *leguas mas. Se pregunta cuántos dias necesitará el jinete para alcanzar al correo y cuánto habrán andado ambos?*

(Número de dias, 8; camino, 80 leguas.)

De las progresiones por cociente.

191. Llámase *progresion geométrica* ó *por cociente* una serie de términos, cada uno de los cuales es igual al producto del que le precede, por un *número constante* que se llama *razon* de la progresion; así las dos series

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96....,$$

$$64,\ 16,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16}....,$$

de las que la primera es tal que cada término contiene al que le precede *dos* veces, ó es igual al doble del que le precede, y cuya segunda serie es tal que cada término se halla contenido en el que le precede *cuatro* veces, ó es igual á la cuarta parte del que le precede, se llaman progresiones por cociente; la razon es 2 para la primera, y $\frac{1}{4}$ para la segunda.

Sean $a, b, c, d, e, f, \ldots$ números en progresion por cociente; se la escribe de esta manera:

$$:: a : b : c : d : e : f : g \ldots,$$

y se la enuncia como una progresion por diferencia, aunque hay que distinguir que la una es una serie de diferencias iguales, y la otra una serie de cocientes iguales, en que *cada término es á la vez antecedente y consecuente, escepto el primero que solo es antecedente, y el último que solo es consecuente.*

192. Designemos por q la razon de la progresion (siendo $q>1$ cuando la progresion es *creciente*, y <1 cuando *decreciente*) y se deduce de la definicion misma la serie de las igualdades

$$b=aq,\ c=bq=aq^2,\ d=cq=aq^3,\ e=dq=aq^5 \ldots,$$

y en general sea l un término de órden cualquiera; n el número total de los términos; y se tiene la fórmula

$$(1) \qquad l=aq^{n-1},$$

por medio de la cual se puede obtener el valor de un término cualquiera, sin pasar por todos los términos que preceden.

Por ejemplo, el 8°. término de la progresion

$$:: 2 : 6 : 18 : 54 : \ldots$$

es igual á $2\times3^7=2\times2187=4327$.

Del mismo modo el 12° término de esta $:: 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \ldots$

es igual á $64\left(\frac{1}{4}\right)^{11}=\frac{4^3}{4^{11}}=\frac{1}{4^8}=\frac{1}{65536}$.

193. Supongamos ahora que se haya propuesto *determinar la suma de los* n *primeros términos de la progresion*

$$:: a : b : c : d : e : f : \ldots i : k : l,$$

en que l designa el n término.

Se tienen (número 192) las igualdades

$$b=aq,\ c=bq,\ d=cq,\ e=dq \ldots\ k=iq,\ l=kq;$$

de donde se deduce, sumándolos miembro á miembro,

$$b+c+d+e \ldots +k+l=(a+b+c+d+\ldots,+i+k)q,$$

ó bien, representando por S la suma pedida;

$$S-a=(S-l)\,q=Sq-lq, \text{ ó } Sq-S=lq-a;$$

luego $\qquad (2) \qquad S=\frac{lq-a}{q-1}$;

es decir que para obtener la suma de un numero determinado de términos de una progresion por cociente, es preciso *multiplicar el último término por la razon, sustraer del producto el primer término, y dividir la diferencia por la razon disminuida en una unidad.*

Cuando la progresion es decreciente, se tiene $q<1$, $l<a$; y conviene poner la fórmula anterior bajo la forma

$$S=\frac{a-lq}{1-q},$$

para que ambos términos de la fraccion sean positivos.

Las dos espresiones de S se convierten tambien por la sustitucion de aq^{n-1} en lugar de l, en $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$, y en $S=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$.

Se hallará segun las fórmulas precedentes,

1°. Para la suma de los 8 primeros términos de la progresion

$$:: 2 : 6 : 18 : 64 \ldots : 2\times3^7 \text{ ó } 4374,$$

$$S=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{13122-2}{2}=6560;$$

2°. Para la suma de los 12 primeros términos de la progresion

$$:: 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \ldots : 64\left(\frac{1}{4}\right)^{11} \text{ ó } \frac{1}{65536},$$

$$S=\frac{64-\frac{1}{65536}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{256-\frac{1}{65536}}{3}=85+\frac{21845}{65536}.$$

Se ve que la dificultad principal consiste en determinar el valor numérico del último término, operacion muy penosa cuando el número de los términos es crecido.