194. *Observacion.* Si en la fórmula $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$, se supone $q=1$, se convierte en $S=\frac{0}{0}$.

Este resultado que es algunas veces el símbolo de la indeterminacion, proviene tambien muchas veces (núm. 73) de la existencia de un factor comun que se hace nulo por una hipótesis particular que se hace acerca de los datos de la cuestion. En efecto, esto es lo que se verifica en esta circunstancia; pues se sabe (núm. 31) que la espresion q^n-1 es divisible por $q-1$, por $q-1$, y da por cociente

$$q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+q+1\ ;$$

si se efectúa esta division, el valor de S toma la forma

$$S=aq^{n-1}+aq^{n-2}+aq^{n-3}+\ldots+aq+a\ ;$$

de donde, haciendo $q=1$, $S=a+a+a+\ldots+a=na$.

Se puede llegar al mismo resultado subiendo á la progresion propuesta $\div\ a : b : c :\ldots\ldots : l$,

que en el caso de $q=1$, se reduce á $\div\ a : a : a : a :\ldots\ldots : a$, serie cuya suma es igual á na.

195. *De las progresiones infinitas por cociente.* Sea una progresion decreciente $\div\ a : b : c : d : e : f :\ldots$ de un número infinito de términos.

La fórmula $S=\frac{a-aq^n}{1-q}$ puede ponerse bajo la forma

$$S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Pero como la progresion es decreciente, q es una fraccion, q^n lo es tambien, y tanto mas pequeña cuanto mayor sea n; de suerte que cuantos mas términos se tomen en la progresion, mas disminuirá $\frac{a}{1-q}\times q^n$; y por consiguiente la suma parcial de estos términos estará mas cerca de ser igual á la primera parte de S. Finalmente, si se toma para n un número mayor que cualquier valor dado, ó si se

supone $n=\infty$, $\frac{a}{1-q}\times q^n$ será menor que cualquier número dado, ó se hará igual á 0; y la espresion $\frac{a}{1-q}$ representará el valor de toda la serie.

De donde puede concluirse que

La suma de los términos de una progresion decreciente hasta el infinito, tiene por espresion (3) $S=\frac{a}{1-q}$.

Este es, propiamente hablando, el *límite* hácia el cual tienden sin cesar las *sumas parciales* que se obtienen tomando un número de términos cada vez mayor en la progresion. La diferencia entre estas sumas y $\frac{a}{1-q}$ puede llegar á ser tan pequeña como se quiera, y no llega á ser completamente *nula* sino cuando se toma un número infinito de términos.

Aplicaciones. Sea la progresion decreciente al infinito

$$\div\ 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \ldots.$$

Se tiene para la espresion de la suma de los términos

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{3}{2}.$$

El error que se comete tomando esta espresion por el valor de la suma de los n primeros términos, se marca por

$$\frac{a}{1-q}.q^n=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Sea primeramente $n=5$; sale $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{2.3^4}=\frac{1}{162}$.

Para $n=6$ se encuentra $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{162}.\frac{1}{3}=\frac{1}{486}$.

Por donde se ve que el *error cometido* al tomar $\frac{3}{2}$ para suma de un cierto número de términos, es tanto menor cuanto mayor es este número.

Sea todavía la progresion

$$\div\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{4}{1} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \ldots$$

y se tendrá $S=\frac{a}{1-q}=2.$

196. La espresion $S=\frac{a}{1-q}$ puede obtenerse directamente de la progresion

$$\div\ a : b : c : d : e : f : g : \ldots$$

Tomemos de nuevo las ecuaciones $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$,...., cuyo número es indefinido, y sumémoslas miembro á miembro; saldrá

$$b+c+d+e\ldots..=(a+b+c+d+\ldots)q.$$

Ahora bien; como el primer miembro es evidentemente la serie propuesta, fin del primer término a, tiene por espresion $S-a$; el segundo miembro es igual á q multiplicado por toda la serie entera, pues que no hay último término, ó es nulo; la espresion de este segundo miembro será, pues, qS, y la igualdad anterior se convierte en

$$S-a=qS, \text{ de donde } S=\frac{a}{1-q}$$

En efecto, si se desarrolla $\frac{a}{1-q}$ en serie, por el procedimiento de la division, se encuentra el resultado indefinido, $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots$, que no es otro que la serie propuesta, cuando se reemplazan b, c, d,... por sus valores como funciones de a.

O de otro modo. Sea la progresion $\div\ a : aq : aq^2 : aq^3\ldots$

y pongamos $S=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+\ldots$

e donde multiplicando los dos miembros por q,

$$qS=aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+\ldots$$

Restemos estas dos ecuaciones miembro á miembro, y saldrá

$$S-qS=a; \text{ luego en fin, } S=\frac{a}{1-q}.$$

197. Cuando la serie es creciente, no puede mirarse ya á la espresion $S=\frac{a}{1-q}$ como un *límite de las sumas parciales;* porque siendo la suma de un número determinado de términos (número 193) $S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$, la segunda parte $\frac{aq^n}{1-q}$ aumenta mas y mas numéricamente á medida que aumenta n; es decir que por el contrario, cuantos mas términos se toman mas difiere numéricamente de $\frac{a}{1-q}$ la espresion de la suma de estos términos.

La fórmula $S=\frac{a}{1-q}$ es solo en este caso la espresion algebráica que da lugar por su desarrollo á la serie $a+aq+aq^2+aq^3\ldots$

Se presenta aquí una circunstancia que parece muy singular á primera vista.

Como $\frac{a}{1-q}$ es la fraccion generatriz de la serie, se debe tener

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots$$

De modo que haciendo en esta igualdad, $a=1$, $q=2$, se encuentra

$$\frac{a}{1-q} \text{ ó } -1=1+2+4+8+16+32+\ldots,$$

ecuacion cuyo primer miembro es negativo, miéntras que el segundo parece positivo y tanto mayor cuanto mayor es q.

Para interpretar este resultado, imaginemos que en dicha ecuacion se detiene la serie en cierto término, para que subsista la igualdad será preciso completar el cociente.

Así deteniéndonos, por ejemplo, en el cuarto término, aq^3,

	a	$1-q$
1ª. resta	$+aq$	$a+aq+aq^2+aq^3+\frac{aq^4}{1-q}$
2ª.	$+aq^2$	
3ª.	$+aq^3$	
4ª.	$+aq^4$	

se debe agregar al cociente obtenido la espresion fraccionaria $\frac{aq^n}{1-q}$, lo que da rigurosamente

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+aq^3+\frac{aq^n}{1-q}.$$

Si se hace ahora en esta ecuacion exacta, $a=1$, $q=2$,

sale $$-1=1+2+4+8-16;$$

igualdad que se verifica por sí misma.

En general siempre que una fórmula en x, que designaremos por $f(x)$, y que se enuncia *funcion* de x, se desarrolla en una serie de la forma $$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots,$$
no se tiene rigurosamente $$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots,$$

sino miéntras se concibe, deteniéndose en cierto término en el segundo miembro, la serie completada por cierta espresion en x.

Pero cuando la serie es del número de las que se llaman *convergentes*, la espresion que sirve para completarla puede concebirse tan pequeña como se quiera; y es permitido despreciarla mas allá de cierto término de la serie, lo cual suministra entónces un valor aproximado de la fórmula propuesta.

198. *Observacion.* Terminaremos los principios relativos á las progresiones infinitas, por la observacion siguiente: resulta de la definicion de las progresiones por cociente (número 191), que se las puede considerar como series recurrentes del primer órden cuya *escala de relacion* es la razon de la progresion. (Véase el núm. 184.) Esta aproximacion es muy propia para hacer conocer el orígen de las progresiones prolongadas al infinito. Ellas deben tambien su existencia, como las series recurrentes, en general, al desarrollo de una fraccion algebráica en serie. Dimos ya (números 195 y 196) los medios de *hallar esta fraccion generatriz* para las progresiones en particular. Veremos mas adelante los medios de resolver la misma cuestion para todas las series recurrentes.

199. La consideracion de las cinco cantidades, a, q, n, l y S, que entran en las dos fórmulas (1) y (2) obtenidas en los números 192 y 193, da ademas lugar á diez problemas particulares cuyos enunciados no difieren de los relativos á las progresiones por diferencia (núm. 188),

sino en que la letra r está reemplazada por q. Pero nos propondremos, como para las progresiones por diferencia, terminar q y S, conociendo a, l y n.

Como la primera fórmula, pues, da $q^{n-1}=\frac{l}{a}$, de donde $q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$; trasladando este valor á la segunda fórmula, se obtendria el valor de S.

La espresion $q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$ suministra el medio de resolver esta cuestion:

Interpolar entre dos números dados a *y* b *un número* m *de* MEDIOS PROPORCIONALES, es decir, m *cantidades que formen con* a *y* b, *consideradas como estremos, una progresion por cociente.*

Basta para ello conocer la *razon*; de modo que como el número de los términos que hay que interpolar es m, el total de los términos, n, es igual á $m+2$; se tiene ademas $l=b$; de suerte que el valor de q se convierte en

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}};$$

es decir que es preciso

Dividir uno por otro los dos números dados b *y* a, *y estraer despues del cociente una raiz de un grado marcado por el número de los términos que hay que interpolar mas uno.*

La progresion es entónces

$$\div a : a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a\sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a\sqrt[m+1]{\frac{a^3}{b^3}} \ldots\ldots : b.$$

Supongamos, pues, que hay que interpolar seis medios proporcionales entre los números 3 y 384.

Se tiene $m=6$, de donde $q=\sqrt[7]{\frac{384}{3}}=\sqrt{128}=2$;

de donde se deduce la progresion

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.$$

En breve daremos á conocer en las aplicaciones numéricas otros

medios mas espeditos de calcular el número espresado por $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$.

No nos detendremos en demostrar que

Si entre los términos consecutivos de una progresion por cociente, considerados dos á dos, se interpola un mismo número de medios proporcionales, todas las progresiones formadas de esta manera constituyen una progresion única.

La demostracion es análoga á la del número 189.

200. De los *diez* problemas principales que puede uno proponerse sobre las progresiones, *cuatro* son susceptibles de quedar resueltos fácilmente. Hé aquí sus enunciados, con las fórmulas que les son relativas :

1°. Dados a, q, n, hallar l y S.

$$l=aq^{n-1},\ \mathrm{S}=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

2°. Dados a, n, l, hallar q y S.

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},\quad \mathrm{S}=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}.$$

3°. Dados q, n, l, hallar a y S.

$$a=\frac{l}{q^n-1},\ \mathrm{S}=\frac{l(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}.$$

4°. Dados q, n, S, hallar a y l.

$$a=\frac{\mathrm{S}(-1)}{q^n-1},\ l=\frac{\mathrm{S}q^{n-1}(q-1)}{q^n-1}.$$

Hay otros dos problemas que dependen de la resolucion de ecuaciones de un grado superior al segundo ; y son aquellos en que se suponen desconocidas las cantidades a y q, ó bien l y q.

En efecto, de la segunda fórmula se deduce $a=lq-\mathrm{S}q+\mathrm{S}$; de donde sustituyendo este valor de a en la primera $l=aq^{n-1}$,

$$l=(lq-\mathrm{S}q+\mathrm{S})q^{n-1},$$

ó bien

$$(\mathrm{S}-l)q^n-\mathrm{S}q^{n-1}+l=0,$$

ecuacion del grado n que aun no hemos aprendido á resolver.

Lo mismo sucederia si se quisiesen determinar l y q : se llegaría á la ecuacion $aq^n-\mathrm{S}q+\mathrm{S}-a=0$.

201. En fin los otros *cuatro* problemas conducen á la resolucion de ecuaciones de una naturaleza particular : tales son los en que es desconocido n, con una tambien de las otras cuatro cantidades.

Desde luego la segunda fórmula da fácilmente el valor de una de las cantidades a, q, l y S, *como funcion* de las otras tres; de modo que todo se reduce á determinar n por medio de la fórmula $l=aq^{n-1}$.

Esta igualdad, pues, se convierte en $q^n=\frac{lq}{a}$,

ecuacion de la forma $a^x=b$ en que a y b son cantidades conocidas.

Llámase esta clase de ecuaciones *ecuaciones esponenciales*, para distinguirlas de las que hemos considerado hasta ahora, en las cuales la incógnita se eleva á potencias marcadas por números conocidos.

Ocupémonos, pues, de la resolucion de estas ecuaciones, á las cuales se refiere una de las teorías mas importantes de las matemáticas, la teoría de los logaritmos.

---

§ II. TEORÍAS DE LAS CANTIDADES ESPONENCIALES Y DE LOS LOGARITMOS.

Resolucion de la ecuacion $a^x=b$.

202. La cuestion consiste en hallar *el exponente* de la potencia á que es preciso elevar un número dado a, para producir otro número dado b.

Consideraremos primeramente algunos casos particulares.

1er. *ejemplo :* $2^x=64$.

Elevando 2 á sus diferentes potencias, se reconoce pronto que $2^6=64$; luego $x=6$ satisface á la ecuacion.

2°. *ejemplo :* $3^x=243$.

Se tiene por solucion, $x=5$.

En una palabra, miéntras b sea una *potencia perfecta* del número a,