medios mas espeditos de calcular el número espresado por $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$.

No nos detendremos en demostrar que

Si entre los términos consecutivos de una progresion por cociente, considerados dos á dos, se interpola un mismo número de medios proporcionales, todas las progresiones formadas de esta manera constituyen una progresion única.

La demostracion es análoga á la del número 189.

200. De los *diez* problemas principales que puede uno proponerse sobre las progresiones, *cuatro* son susceptibles de quedar resueltos fácilmente. Hé aquí sus enunciados, con las fórmulas que les son relativas :

1°. Dados a, q, n, hallar l y S.

$$l=aq^{n-1},\ \mathrm{S}=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

2°. Dados a, n, l, hallar q y S.

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},\quad \mathrm{S}=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}.$$

3°. Dados q, n, l, hallar a y S.

$$a=\frac{l}{q^n-1},\ \mathrm{S}=\frac{l(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}.$$

4°. Dados q, n, S, hallar a y l.

$$a=\frac{\mathrm{S}(-1)}{q^n-1},\ l=\frac{\mathrm{S}q^{n-1}(q-1)}{q^n-1}.$$

Hay otros dos problemas que dependen de la resolucion de ecuaciones de un grado superior al segundo ; y son aquellos en que se suponen desconocidas las cantidades a y q, ó bien l y q.

En efecto, de la segunda fórmula se deduce $a=lq-\mathrm{S}q+\mathrm{S}$; de donde sustituyendo este valor de a en la primera $l=aq^{n-1}$,

$$l=(lq-\mathrm{S}q+\mathrm{S})q^{n-1},$$

ó bien

$$(\mathrm{S}-l)q^n-\mathrm{S}q^{n-1}+l=0,$$

ecuacion del grado n que aun no hemos aprendido á resolver.

Lo mismo sucederia si se quisiesen determinar l y q : se llegaría á la ecuacion $aq^n-\mathrm{S}q+\mathrm{S}-a=0$.

201. En fin los otros *cuatro* problemas conducen á la resolucion de ecuaciones de una naturaleza particular : tales son los en que es desconocido n, con una tambien de las otras cuatro cantidades.

Desde luego la segunda fórmula da fácilmente el valor de una de las cantidades a, q, l y S, *como funcion* de las otras tres; de modo que todo se reduce á determinar n por medio de la fórmula $l=aq^{n-1}$.

Esta igualdad, pues, se convierte en $q^n=\frac{lq}{a}$,

ecuacion de la forma $a^x=b$ en que a y b son cantidades conocidas.

Llámase esta clase de ecuaciones *ecuaciones esponenciales*, para distinguirlas de las que hemos considerado hasta ahora, en las cuales la incógnita se eleva á potencias marcadas por números conocidos.

Ocupémonos, pues, de la resolucion de estas ecuaciones, á las cuales se refiere una de las teorías mas importantes de las matemáticas, la teoría de los logaritmos.

---

§ II. TEORÍAS DE LAS CANTIDADES ESPONENCIALES Y DE LOS LOGARITMOS.

Resolucion de la ecuacion $a^x=b$.

202. La cuestion consiste en hallar *el exponente* de la potencia á que es preciso elevar un número dado a, para producir otro número dado b.

Consideraremos primeramente algunos casos particulares.

1er. *ejemplo :* $2^x=64$.

Elevando 2 á sus diferentes potencias, se reconoce pronto que $2^6=64$; luego $x=6$ satisface á la ecuacion.

2°. *ejemplo :* $3^x=243$.

Se tiene por solucion, $x=5$.

En una palabra, miéntras b sea una *potencia perfecta* del número a,

x será un número entero, que obtendrá por la elevacion de a á sus potencias sucesivas á partir del grado 0.

3er. *ejemplo :* (1).....$2^x=6$.

Haciendo $x=2$, y $x=3$, se encuentra $2^2=4$, y $2^3=8$; por donde se ve que x tiene un valor comprendido entre 2 y 3.

Supongamos, pues, $x'=2+\frac{1}{x'}$ (x es entónces >1).

Sustituyendo este valor en la propuesta se tiene

$$2^{2+\frac{1}{x'}}=6\text{, ó (n°. 172) } 2^2\times 2^{\frac{1}{x'}}=6\text{; luego } 2^{\frac{1}{x'}}=\frac{3}{2},$$

y por consiguiente, (2)... $\left(\frac{3}{2}\right)^{x'}=2$.

Para determinar x' hagamos sucesivamente $x'=1$, $x'=2$; y se hallará $\left(\frac{3}{2}\right)^1$, ó $\frac{3}{2}<2$, y $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ ó $\frac{9}{4}>2$.

De modo que x' se halla comprendido entre 1 y 2.

Supongamos, pues, $x'=2+\frac{1}{x''}$ (x'' es tambien >1).

Se obtiene, sustituyendo en la ecuacion (2) este valor de x',

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x'}}=2\text{, ó } \frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x'}}=2,$$

ó reduciendo, (3). . . $\left(\frac{4}{3}\right)^{x''}=\frac{3}{2}$.

Para $x''=1$ y $x''=2$, se tiene

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 \text{ ó } \frac{4}{3}<\frac{3}{2}\text{, y } \left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{ ó } \frac{16}{9}>\frac{3}{2}.$$

Así x'' se halla comprendido entre 1 y 2.

Sea pues, $x''=1+\frac{1}{x'''}$; resulta

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x'''}}=\frac{3}{2}\text{, ó } \frac{4}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x'''}}=\frac{3}{2};$$

de donde reduciendo, (4). . . $\left(\frac{9}{8}\right)^{x'''}=\frac{4}{3}$.

Operando sobre esta ecuacion como sobre las precedentes, se encontraria que x''' está comprendido entre 2 y 3.

Sea $x'''=2+\frac{1}{x^{\text{IV}}}$; la ecuacion en x''', hecha la reduccion, se convierte en, (5). . . $\left(\frac{256}{243}\right)^{x^{\text{IV}}}=\frac{9}{8}$.

Una nueva operacion daria

$$x^{\text{IV}}=2+\frac{1}{x^{\text{V}}},$$

y así sucesivamente.

Reunamos ahora las ecuaciones $x=2+\frac{1}{x'}$ y $x'=1+\frac{1}{x''}$, $x''=1+\frac{1}{x'''}$, $x'''=2+\frac{1}{x^{\text{IV}}}$, $x^{\text{IV}}=2+\frac{1}{x^{\text{V}}}$....;

y obtendremos el valor de x en forma de una fraccion contínua, cuyas reducidas consecutivas serian, segun la ley conocida,

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{5},\ \frac{31}{12}\ldots$$

Pero se sabe que en una fraccion continua, cuantas mas partes integrantes se toman, mas nos aproximamos al valor del número reducido fraccion continua; de modo que por este medio se podrá hallar el valor de x propio para verificar la ecuacion (1) si no exactamente, al ménos en el grado de aproximacion que se quiera.

Por ejemplo, la reducida $\frac{13}{5}$ no difiere del valor de x sino en una cantidad menor que $\frac{1}{(5)^2}$ ó $\frac{1}{25}$. Pero aun es mayor la aproximacion; porque considerando la reducida siguiente se ve que el error cometido

es menor que $\frac{1}{5\times12}$, ó $\frac{1}{60}$. La reducida $\frac{31}{12}$ no difiere del verdadero valor de x sino en una cantidad menor que $\frac{1}{(12)^2}$ ó $\frac{1}{144}$.

203. La determinacion de x en la ecuacion precedente, supone que siendo para toda ecuacion de la forma $a^x=b$, $a>1$, aunque tan poco diferente como se quiera de 1, miéntras que por el contrario b es un número muy grande, *es siempre posible hallar dos potencias consecutivas de* a, *que comprendan el número* b.

Para demostrarlo supongamos $a=1+\frac{1}{k}$, en que $\frac{1}{k}$ es una fraccion muy pequeña, y desarrollemos la espresion $\left(1+\frac{1}{k}\right)^n$ segun la fórmula del binomio (número 148) (n se supone aquí un número entero).

Saldrá a^n, ó $\left(1+\frac{1}{k}\right)^n=1+n.\frac{1}{k}+n\frac{n-1}{2}.\frac{1}{k^2}+\ldots$

Ahora bien; como el segundo miembro se compone de $1+\frac{n}{k}$, *mas* una serie de números *positivos,* claro es que si se hace $1+\frac{n}{k}>b$, lo que da $n>k\,(b-1)$, se tendrá, $a^n>b$.

Por otra parte las primeras hipótesis $n=0, 1, 2,\ldots$ han debido dar ya cierta potencia de a, menor que b; luego b está necesariamente comprendido entre dos potencias consecutivas de a.

Q. E. L. Q. Q. D.

204. Sentado esto, hé aquí en qué consiste *el método general.*

Imaginemos que haya que resolver la ecuacion $a^x=b$, suponiendo primeramente a y $b>1$, pero $a<b$.

Formando las potencias sucesivas de a se halla que b está comprendido entre a^n y a^{n+1}; entónces se hace....$x=n+\frac{1}{x'}$; sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, se obtiene

$$a^{n+\frac{1}{x'}}=b, \text{ ó } a^n\times a^{\frac{1}{x'}}=b, \text{ de donde } \left(\frac{b}{a^n}\right)^{x'}=a,$$

ó poniendo para mayor sencillez, $\frac{b}{a^n}=c$,

$$c^{x'}=a.$$

Operando sobre esta ecuacion de este modo, se reconoce que x' esta comprendido entre n' y $n'+1$; luego $x'=n'+\frac{1}{x''}$; sustituyendo este valor en la ecuacion en x', nos vemos tambien conducidos á resolver una ecuacion de la forma

$$d^{x''}=c,$$

en que d tiene por valor $\frac{c}{a^{n'}}$; y así sucesivamente.

El valor de x resulta de esta manera desarrollado en una fraccion continua en la que no se trata ya sino de formar las reducidas; y llevando de un modo conveniente la serie de las operaciones, se obtiene este valor en el grado de aproximacion que se quiera, y cuyo grado se puede estimar, pues está marcado por el cociente de la *unidad dividida por el cuadrado del denominador de la última reducida* á que se ha llegado.

205. *Observaciones.* 1°. Si en el caso de $a>1$ y $b>1$, se supone $b<a$, como se tiene $a^0=1$ (número 24) y $a^1=a$,
se sigue que x está comprendido entre 0 y 1, y es preciso comenzar poniendo

$$x=\frac{1}{x'}$$

Lo que equivale á hacer $n=0$ en el cálculo precedente.

2°. Cuando se tiene $a>1$, pero $b<1$, el valor de x es necesariamente <0, ó NEGATIVO; de modo que es preciso suponer

$$x=-y \qquad \text{en la ecuacion } a^x=b,$$

lo cual da $a^{-}=b$, de donde (número 171) $a^y=\frac{1}{b}$,

y como se tiene $\frac{1}{b}>1$, se determinará y segun el método anterior: entónces el valor correspondiente de x será igual al de y, tomado *negativamente*

Lo mismo sucederia si se tuviese $a<1$, pero $b>1$.

Con estas observaciones no ofrece dificultad alguna la aplicacion de este método. Únicamente que los cálculos necesarios para alcanzar un alto grado de aproximacion son bastante trabajosos.

De todos modos los siguientes ejemplos pueden servir de ejercicio.

$3^x = 15$, $x = 2{,}465$ con diferencia de casi 0,001;

$10^x = 3$, $x = 0{,}477$ de idem;

$5^x = \frac{2}{3}$, $x = -0{,}25$ de 1,01;

$\left(\frac{7}{12}\right)^x = \frac{3}{4}$, $x = 0{,}53$ de idem.

Suponemos aquí que se han convertido en fracciones decimales las reducidas suministradas por el método.

Condiciones para que x sea conmensurable.

206. El método precedente conduce algunas veces á una fraccion continua *limitada*, otras á una continua que se prolonga al *infinito;* lo que da para x, en el primer caso un valor conmensurable, y en el segundo uno inconmensurable.

Busquemos la relacion que debe existir entre los dos números dados a y b, para que x sea igual á un número conmensurable $\frac{m}{n}$.

Sean en primer lugar a y b dos números *enteros;* se tiene la ecuacion $a^{\frac{m}{n}} = b$, que puede ponerse bajo la forma.

$$a^m = b^n.$$

Es pues evidente que esta igualdad no puede subsistir sino en tanto que a y b constan de los mismos factores primeros; porque si se supusiese en b un factor primero que no se encontrase en a, y se dividiesen ambos miembros por este factor, el segundo miembro seria un número entero, y el primero uno fraccionario, lo cual es absurdo: luego, si se tiene por ejemplo,

$$a = \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s,$$

debe tenerse tambien $b = \alpha^{p'} \beta^{q'} \gamma^{r'} \delta^{s'}$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion $a^m = b^n$, se la cambia en esta:

$$\alpha^{mp} \beta^{mq} \gamma^{mr} \delta^{ms} = \alpha^{np'} \beta^{nq'} \gamma^{nr'} \delta^{ns}.$$

Pero esta nueva igualdad exige que las potencias de un mismo factor primero sean iguales en ambos miembros; porque si fuesen desiguales, dividiendo ambos miembros por la potencia mas alta llegariamos tambien á un resultado absurdo.

Debe pues tenerse separadamente

$$mp = np',\ mq = nq',\ mr = nr',\ ms = ns',$$

de donde se deduce $\frac{m}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s}$.

Así pues para que el valor de x sea conmensurable es preciso y basta *que* a *y* b *consten de los mismos factores primeros, y que los esponentes de estos factores formen entre si una serie de razones iguales.*

Cuando se satisfacen estas dos condiciones, el valor de x es igual á la relacion constante que existe entre los esponentes.

Supongamos, *en segundo lugar*, que a y b sean fraccionarios é iguales á $\frac{h}{h'}$, $\frac{k}{k'}$ [no se puede suponer á a entero y á b fraccionario, ó vice versa].

La ecuacion $a^m = b^n$ se convierte en

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^m = \left(\frac{k}{k'}\right)^n, \text{ de donde } k^m k'^n = h'^m h^n.$$

Pero como h y h' pueden considerarse siempre como primeros entre sí, lo mismo que k y k', otro tanto sucede con h^m y h'^m, k^n y k'^n; de modo que para que subsista la igualdad precedente es preciso tener por separado $h^m = k^n$, $h'^m = k'^n$, lo que conduce á condiciones semejantes á las que establecimos arriba entre los numeradores y los denominadores respectivamente comparados entre sí.

Nota. Si se tuviese $\frac{h}{h'} > 1$, pero $\frac{k}{k'} < 1$, ó recíprocamente, seria desde luego preciso cambiar el signo de x en la ecuacion esponencial $a^x = b$ (lo que equivaldria á cambiar el de los dos números $\frac{h}{h'}$, $\frac{k}{k'}$, que se suponen < 1, conservando positivo á x); y se establecerian despues las relaciones precedentes.

207. *Casos particulares.* 1°. Si siendo a y b números enteros son dos potencias diferentes de *un mismo número primero*, x es necesariamente conmensurable.

Sea la ecuacion $4^x=32$, que se puede transformar de esta manera.

$$(2^2)^x=^5, \text{ de donde (número 158) } 2^{2x}=2^5;$$

y resulta $$2x=5, \text{ de donde } x=\frac{5}{2}.$$

Sea ademas $27^x=2187$, ó $3^{3x}=3^7$; se tiene $x=\frac{7}{3}$.

2°. *Si* a *no consta mas que de factores primeros elevados á la primera potencia*, es preciso que b sea una potencia perfecta de a para que x sea conmensurable; de suerte que en este caso x *es entero* ó *inconmensurable.*

En efecto, sea $a=\alpha\beta\gamma\delta$, donde $b=\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}\delta^{s'}$;
la ecuacion $a^m=b^n$ se convierte en $\alpha^m\beta^m\gamma^m\delta^m=\alpha^{p'n}\beta^{q'n}\gamma^{r'n}\delta^{s'n}$; de donde se deduce $m=p'n=q'n=r'n=s'n$,
ó bien $p'=q'=r'=s'$;
luego $b=\alpha^{p'}\beta^{p'}\gamma^{p'}\delta^{p'}=(\alpha\beta\gamma\delta)_{p'}=a_{p'}$,
y por consiguiente $x=p'$.

Sea por ejemplo, $a=10=2\times5$;
es preciso que b sea una potencia perfecta de 10 para que x pueda ser conmensurable.

Teoría de los logaritmos.

208. *Introduccion.* Si se supone que en la ecuacion

$$a^x=y,$$

conservando siempre a un mismo valor *positivo* se reemplaza y por todos los números absolutos posibles, aplicando el método del número 203 se podrá determinar para cada valor de y el de x, si no exactamente, al ménos en el grado de aproximacion que se quiera.

Supongamos desde luego $a>1$ y hágase sucesivamente

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots,$$

de lo que resulta $$y=1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ldots,$$

luego *todos los valores de* y *mayores que la unidad son producidos por*

potencias de a *cuyos esponentes son* POSITIVOS, *enteros ó fraccionarios; y el valor de* x *es tanto mayor cuanto mayor es el de* y.

Hagamos en seguida $x=0.\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ldots;$

resultará $$x=1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^5},\ldots;$$

luego *todos los valores de* y, *menores que la unidad, son producidos por potencias de* a *cuyos esponentes son* NEGATIVOS; *y el valor de* x *es tanto mayor, numéricamente, cuanto mas se acerca á cero el valor de* y.

Sea por el contrario, $a<1$ é igual á una fraccion $\frac{1}{a'}$;

haciendo $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots,$

se encuentra $y=\left(\frac{1}{a'}\right)^0$, ó $1, \frac{1}{a'}, \frac{1}{a'^2}, \frac{1}{a'^3}, \frac{1}{a'^4}, \frac{1}{a'^5},\ldots,$

y si se hace $x=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ldots,$

se obtiene $y=\left(\frac{1}{a'}\right)^0$, ó $1,\ a',\ a'^2,\ a'^3,\ a'^4,\ a'^5,\ldots,$

es decir que en la hipótesis de $a<1$, *todos los números son producidos por las diversas potencias de* a *en un órden inverso del que resulta de la hipótesis* $a>1$.

De este modo se llega á la siguiente consecuencia general: *todos los números absolutos pueden ser formados con un número absoluto cualquiera, pero constante, que se eleva á potencias convenientes.*

NOTA. Sin embargo es preciso suponer a, *diferente de la unidad,* pues se sabe que todas las potencias de 1 son iguales á 1.

209. Sentado esto, supongamos que se haya formado una tabla que contenga todos los números enteros, y al lado de ellos *los esponentes de las potencias* á que seria preciso elevar un *número invariable* para producir los primeros; y se tendrá la idea de una tabla de *logaritmos.*

Llámase en general LOGARITMO *de un número al esponente de la potencia á que es preciso elevar cierto número invariable, para producir el primero.*

El número invariable puede tomarse desde luego de un modo enteramente arbitrario (con tal que sea $>$ ó <1); aunque una vez elegido

debe permanecer el mismo para la formacion de toda la tabla : se le llama por esta razon BASE del sistema de logaritmos.

Sea la que se quiera la base elegida, *el logaritmo de la base es la unidad*, y *el logaritmo de* 1 es 0.

En efecto, se tiene, 1°. . . . $a'=a$, de donde log. $a=1$.
2°. . . . $a^0=1$, de donde log. $1=0$.

Para abreviar se designa comunmente la palabra logaritmo por las tres primeras letras log. ó por la primera *l*. simplemente seguida de un punto y del número que se considera.

Veamos ahora cuál es el uso que hacen los logaritmos en los cálculos numéricos

210. *Multiplicacion y division aritméticas.* Sea ante todo una serie de números y, y', y'', y'''..., que haya de multiplicarse entre sí. Designemos por a la base de un sistema de logaritmos (que supónemos ya calculados), y por x, x', x'', x''',... los logaritmos de y, y', y'', y'''.

Segun la definicion (núm. 209) se tiene esta serie de igualdades

$$y=a^x,\ y'=a^{x'},\ y''=a^{x''},\ y'''=a^{x'''},\ldots$$

Multiplicándolas miembro á miembro, y aplicando la regla de los esponentes establecida en el núm. 172, se encuentra

$$y\,y'\,y''\,y'''\ldots=a^{x+x'+x''+x'''+\ldots}$$

Luego,

$$\log.\ y\,y'\,y''\ldots=x+x'+x''+\ldots=\log.\ y+\log.\ y+\log.\ y''+\ldots,$$

es decir que *el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores de este producto.*

Supongamos en segundo lugar que haya que dividir dos números, y é y', uno por otro, y que sean x y x' sus logaritmos. Se tienen tambien las ecuaciones

$$y=a^x,\ y'=a^{x'};\ \text{de donde se deduce (núm. 172)}\ \frac{y}{y'}=a^{x-x'}.$$

Luego, $$\log.\ \frac{y}{y'}=x-x'=\log.\ y-\log.\ y';$$

es decir que *el logaritmo del cociente de una division es igual al esceso del logaritmo del dividendo sobre el logaritmo del divisor.*

Consecuencias de estas dos propiedades. Si hay que efectuar una multiplicacion, tomando en la tabla los logaritmos de los factores y haciendo la *suma* de estos logaritmos, se tendrá el logaritmo del producto; luego buscando este nuevo logaritmo en la tabla y tomando el número que le corresponde, se obtendrá el producto pedido. De modo que *por una simple adicion se encuentra el resultado de una multiplicacion.*

Igualmente, si se tiene que dividir un número por otro es preciso restar el logaritmo del divisor del del dividendo; y ver despues á qué número corresponde la diferencia : este será el cociente que se busca. De modo que *por una simple sustraccion se obtiene el cociente de una division.*

Formacion de las potencias y estraccion de las raices. Supongamos en general que haya que elevar un número y á la potencia $\frac{m}{n}$; designando siempre por a la base, y por x el logaritmo de y, se tiene la ecuacion

$$y=a^x,$$

de donde elevando los dos miembros á la potencia $\frac{m}{n}$,

$$y^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}.x}.$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO
BIBLIOTECA UNIVERSIT
"ALFONSO REYES
Apdo. 1625 MONTERREY, ME

Luego, $$\log.\ y^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}.\ x=\frac{m}{n}.\ \log.\ y;$$

es decir que *el logaritmo de una potencia cualquiera de un número es igual al producto del logaritmo del número por el esponente de la potencia.*

Sea, como caso particular, $n=1$; resulta

$$\log.\ y^m=m.\ \log.\ y,$$

ecuacion susceptible de un enunciado análogo al precedente.

Sea $m=1$, siendo n un número entero cualquiera; resultará

$$\log.\ y^{\frac{1}{n}}\ \text{ó}\ \log.\ \sqrt[n]{y}=\frac{1}{n}.\ \log.\ y,$$

es decir que *el logaritmo de una raiz de grado cualquiera de un número es igual al cociente del logaritmo de este número dividido por el indice de la raiz.*

Consecuencia. Para formar una potencia cualquiera de un número, basta tomar el logaritmo de este número en la tabla, multiplicarlo por el esponente de la potencia, y buscar despues el número correspondiente á este producto; de esta manera se tiene la potencia pedida.

Del mismo modo, para estraer una raíz basta dividir el logaritmo del número propuesto por el índice de la raíz, y buscar despues cuál es el número á que corresponde el cociente. Así *por una multiplicacion y una division, generalmente muy simples, se halla el resultado de una formacion de potencia y de una estraccion de raíz,* operaciones, cuyos procedimientos ordinarios, como se ha visto, son en estremo trabajosos.

211. Las propiedades que acabamos de demostrar son independientes del sistema particular de logaritmos adoptado; pero las consecuencias que de ellas hemos deducido, es decir, el uso que de las mismas puede hacerse en los cálculos numéricos, suponen la construccion de una tabla que abrace por un lado todos los números, y por otro los logaritmos de estos números calculados segun una base dada. Ahora bien; para formar esta tabla es preciso, como hemos dicho, considerando la ecuacion $a^x=y$, hacer pasar á y por todos los estados de magnitud posibles, y determinar el valor de x correspondiente á cada uno de los valores de y, con sujecion al método del número 204.

Las tablas de que se hace comunmente uso son las que tienen la base igual á 10; reduciendo su construccion á la resolucion de la ecuacion $10^x=y$.

Haciendo sucesivamente á y igual á los términos de la serie natural

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots,$$

hay que resolver las ecuaciones

$$10^x=1,\ 10^x=2,\ 10^x=3,\ 10^x=4,\ldots.$$

Observemos ademas que basta calcular directamente, segun el método del número 204, los logaritmos de los números primeros 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17....; porque como todos los demas números enteros resultan de la multiplicacion de estos diferentes factores entre sí, pueden obtenerse (número 210) sus logaritmos por la adicion de los de los números primeros.

Siendo $6=2\times3$

$$\log.\ 6=\log.\ 2\times\log.\ 3;$$

$24=2^3\times3$, luego $\log.\ 23=3\log.\ 2+\log.\ 3$

así como, $360=2^3\times3^2\times5$; y resulta

$$\log.\ 360=3\log.\ 2+2\log.\ 3+\log.\ 5.$$

Bastaria igualmente colocar en las tablas los logaritmos de los números enteros; porque en virtud de la propiedad relativa á la division, se obtiene el logaritmo de un número fraccionario, restando el logaritmo del divisor del del dividendo.

212. Suponiendo ya construida una primera tabla de logaritmos, es fácil construir tantas como se quieran por medio de esta.

Sea, en efecto, a la base de un primer sistema ya formado, b la base de un nuevo sistema por construir; y designemos por N un número cualquiera, por log. N y por X sus dos logaritmos calculados segun las bases a y b; se tiene la ecuacion $b^X=N$.

De donde tomando los logaritmos de los dos miembros en el sistema conocido cuya base es a, $X.\ \log.\ b=\log.\ N$.

Luego $$X=\frac{\log.\ N}{\log.\ b}.$$

Lo cual prueba que, *conociendo el logaritmo de un número en un primer sistema, para tener el logaritmo del mismo número en un segundo sistema, es preciso dividir el logaritmo del número calculado en el primer sistema, por el logaritmo de la nueva base, calculado tambien en el antiguo sistema.*

Así el logaritmo de 4, en el sistema cuya base es 3 tiene por valor $\frac{\log.\ 4}{\log.\ 3}$, en que el log. 4 y el log. 3 son dos logaritmos calculados en el sistema conocido cuya base es 10.

Sean N, N′, N″..., una serie de números, a la base de un sistema ya formado, b la de un sistema por construir, se tiene la serie de ecuaciones

$$X=\frac{\log.\ N}{\log.\ b}=\frac{1}{\log.\ b}.\ \log.\ N,\ X'=\frac{1}{\log.\ b}.\ N',\ X''=\frac{1}{\log.\ b}.\ \log.\ N''\ldots.$$

por donde se ve que formada una primera tabla, si se quiere cons-