Pero como hay *un* factor *negativo* en abc, se sigue que el producto buscado es -30.

Si fuese $a=2$, $b=-3$, $c=-5$; se tendrá siempre, segun la misma regla,

$$\log. abc = \log. 30.$$

Pero como hay *dos* factores negativos en abc, resulta que el producto buscado es $+30$.

(En general un producto es *positivo* ó *negativo*, segun que el número de sus factores negativos es *par* ó *impar*.)

Supongamos como nuevo ejemplo, que hay que resolver la ecuacion

$$x=(-8)^3 \text{ de donde } \log. x=\frac{5}{3}\log. (-8);$$

operando como si 8 estuviese afectado del signo $+$, se hallará

$$\log. x=\log. 32;$$

pero una potencia cuyo esponente es $\frac{5}{3}$ equivale á la raíz 3ª de la 5ª potencia y debe tener el mismo signo que el número sobre que se efectúan estas operaciones.

Se tiene, pues, $x=-32$.

Sea en fin la ecuacion $9^x=-3$, de donde $x=\frac{\log. (-3)}{\log. 9}$.

Como $\log. 9=\log. (-3)^2=2, \log. (-3)$, resulta

$$x=\frac{\log. (-3)}{2 \log. (-3)}=\frac{1}{2}, \text{ solucion exacta.}$$

Pero si se tuviese que resolver la ecuacion $(-9)^x=3$, como de $(-9)^{\frac{1}{2}}=3$ se saca $-9=3^2$, debe concluirse que la ecuacion propuesta es *absurda*.

Con arreglo á los mismos principios se obtendrá la solucion de las ecuaciones siguientes:

$$(-8)^{\frac{2}{3}}=x, \quad x=4;$$

$$x^{\frac{2}{3}}=4, \quad x=\pm 8;$$

$$(-4)^{\frac{3}{2}}=x, \quad x=8;$$

Se reconoce que es falso este resultado cuando se le somete á la comprobacion.

Proporciones y progresiones por cociente.

221. Sea primeramente la proporcion $a : b : c : x$; de ella se deduce $x=\frac{bc}{a}$; de donde, aplicando los logaritmos,

$$\text{l. } x=\text{l. } b+\text{l. } c-\text{l. } a, \text{ ó l}a. \text{ l}b : \text{l}c. \text{ l}x,$$

lo que prueba que *si cuatro números forman una proporcion, sus logaritmos forman una equidiferencia.*

Sea ahora una progresion por cociente.

$$\div\!\div\, a : b : c : d : e : f : g : h : \ldots$$

Resulta de la definicion (núm. 191) que puede escribirse así:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=\frac{f}{g}=\ldots,$$

de donde tomando los logaritmos de uno y otro término,

$$\text{l.}\frac{a}{b}=\text{l.}\frac{b}{c}=\text{l.}\frac{c}{d}=\text{l.}\frac{d}{e}=\text{l.}\frac{e}{f}=\ldots,$$

ó

$$\text{l. } a-\text{l. } b=\text{l. } b-\text{l. } c=\text{l. } c-\text{l. } d=\text{l. } d-\text{l. } e=\text{l. } e-\text{l. } f\ldots,$$

ó bien en fin, $\div$ la. lb. lc. ld. le...;

luego *si los números* a, b, c,... *están en progresion por cociente, sus logaritmos están en progresion por diferencia.* La recíproca es evidente.

Esta proposicion liga la definicion algebráica de los logaritmos (núm. 207) á la que se da en aritmética, á saber: que *los logaritmos son números en progresion por diferencia, que corresponden término por término á números en progresion por cociente.*

Nota. Donde es mas particularmente útil el empleo de los logaritmos es en la resolucion de las cuestiones relativas á las progresiones por cociente.

1º. Si llamamos u el último término de una progresion por cociente, tendremos (núm. 192),

$$u=aq^{n-1}, \text{ de donde l. } u=\text{l. } a+(n-1)\text{ l. } q.$$

Propóngase, por ejemplo, encontrar el 20 término de la progresion 1 : $\frac{3}{2} : \frac{9}{4} : \frac{27}{8} : \ldots$

La fórmula se convierte en

$$\text{l. } u = \text{l. } 1 + 19\,(\text{l. } 3 - \text{l. } 2) = 19\,(\text{l. } 3 - \text{l. } 2), \text{ [porque l. } 1 = 0],$$

y se obtiene, hecho el cálculo,

$$\text{l. } u = 3,\ 3457339 = \text{l. } 2216,\ 84;$$
$$u = 2217,\ 84 \text{ con diferencia de casi } 0{,}01.$$

2º. Si quiere interpolar entre dos números dados a y b otro m de medios proporcionales, se tiene, para determinar la razon (núm. 198) la fórmula

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \text{ de donde l. } q = \frac{\text{l. } b - \text{l. } a}{m+1}.$$

$$\text{Sean } a = 2,\ b = 15,\ m = 50;\ \text{sale l. } q = \frac{\text{l. } 15 - \text{l. } 2}{51};$$

y se obtiene, hecho el cálculo,

$$\text{l. } q = 0,\ 0171581 = \text{l. } 1,\ 040299;$$

luego $\qquad q = 1,\ 040299.$

Si se desea calcular directamente el 20º *medio proporcional*, que es el término 21 de la progresion, se tiene

$$x = \left(\sqrt[51]{\frac{15}{2}}\right)^{20}; \text{ de donde log. } x = \text{l. } 2 + \frac{20\,(\log. 15 - \text{l. } 2}{51};$$

ó, hecho el cálculo, $\quad \text{l. } x = 0,\ 6441913 = \text{l. } 4,\ 407489;$

así el 0 medio proporcional es 4, 407489.

3º. Se halló (núm. 193), para la espresion de la suma de los términos,

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}; \text{ de donde l. } S = \text{l. } a + \text{l. } (q^n - 1) - \text{l. } (q - 1).$$

Se ve por esta fórmula que es preciso empezar calculando la espresion q^n, poniendo l. $q^n = n$ l. q; despues de lo cual se obtiene fácilmente $q^n - 1$, y por consecuencia l. $(q^n - 1)$. Pronto se nos presentará ocasion de aplicar esta fórmula

4º. Conociendo a, q y u en la fórmula $u = aq^{n-1}$, se puede pedir el valor de n. Se tiene pues

$$\text{l. } u = \text{l. } a + (n - 1)\text{ l. } q; \text{ de donde } n = 1 + \frac{\text{l. } u - \text{l. } a}{\text{l. } q}.$$

Supongamos que haya que encontrar el número de los términos de la progresion cuyo primer término es 3, cuya razon 2, y el último 6144. Se obtendrá

$$n = +1\ \frac{\text{l. } 6144 - \text{l. } 3}{\text{l. } 2} = 1 + \frac{3{,}31132995}{0{,}30102999} = 1 + 11 = 12.$$

(El cociente $\frac{331132995}{30102999}$ es igual á $11 + \frac{6}{30102999}$; pero se desprecia la fraccion como precedente del empleo de logaritmos.)

Cuestiones relativas al interes compuesto.

222. Una de las aplicaciones mas importantes de los logaritmos es la que se hace á las cuestiones sobre el interes del dinero.

PRIMERA CUESTION GENERAL. *Colocada una suma cualquiera durante cierto tiempo á un interes determinado y* COMPUESTO, *en decir es la suposicion de que el interes de cada año se acumule con el capital del año precedente, se pregunta á cuánto ascenderá dicha suma al cabo de un tiempo dado.*

Designemos por a la suma colocada, por n el número de años, y por r el interes que gana un franco al año (esto no es mas que 0,01 del interes de 100 francos).

Pues que 1 fr. gana r al cabo de un año, una suma a ganará ar; así es que al fin del primer año el capital a se habrá convertido en

$$a + ar, \quad \text{ó} \quad a(1 + r).$$

Sea $a\,(1 + r) = a'$; este capital, al cabo del segundo año, será $a'(1 + r)$; luego el capital primitivo ó a se habrá tambien convertido

en $\qquad a'(1 + r), \quad \text{ó} \quad a(1 + r)^2.$

Se obtendria igualmente al cabo del tercer año, $a(1 + r)^3$, y en ge-

neral, al cabo del n año, $a(1+r)^n$. Luego, espresando por A este último valor, se tiene la ecuacion

$$A = a(1+r)^n, \text{ de donde } l.\ A = l.\ a + n \times l.\ (1+r).$$

Aplicacion. Se desea saber cuánto ganará al cabo de 30 años una suma de 30,000 fr. colocada á interes compuesto, á razon de 5 por 100.

Basta hacer en la fórmula precedente,

$$a = 30000, \quad n = 30, \quad r = \frac{5}{100} = 0{,}05;$$

lo cual da

$$l.\ A = l.\ 30000 + l.\ (1,05).$$
$$l.\ 105 = 0,021189299;$$

$$30\ l.\ 1,05 = 0,63567897$$
$$l.\ 30000 = 4,47712125.$$

$$l.\ A = 5,11280022 = l.\ 129658,27.$$

Luego $A = 129658'27.$

Como la fórmula $A = a\ (1+r)^n$, encierra cuatro cantidades, da implícitamente la solucion de *cuatro* problemas diferentes:

1°. *Determinar* A, *conociendo* a, r y n: esta es la cuestion que se acaba de resolver.

2°. *Determinar la suma que seria preciso colocar de presente para sacar al cabo de* n *años una suma* A *suponiendo colocado el capital á interes compuesto, á razon de* r *por* 1 *fr.*

De la ecuacion $A = a(1+r)^n$ se deduce

$$l.\ a = l.\ A - n\ l.\ (1+r);$$

y esta nueva fórmula dará el valor de a.

Esta segunda cuestion constituye la regla de *descuento compuesto*, porque se reduce á hallar el valor actual de una suma A pagadera en n años, tomando en cuenta el interes de la suma y los intereses de los intereses.

3°. *Determinar el interes á que debe colocarse una suma* a *para que produzca al cabo de* n *años, en interes compuesto, otra suma* A.

La fórmula seria $1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$, de donde $l.\ (1+r) = \frac{l.\ A - l.\ a}{n}$, conociendo $1+r$, se deduciria fácilmente r, y por consiguiente el tanto de interes por 100 fr.

4°. En fin, *determinar cuánto tiempo debe permanecer colocada á interes compuesto una suma* a, *á razon de* r *por* 1 *fr., para que produzca una suma* A.

La fórmula seria $n = \frac{l.\ A - l.\ a.}{l.\ (1+r)}$.

Si se quisiese que A fuese doble, triple, cuádruplo,... de a, se simplificaria la fórmnla.

Sea en efecto $A = k.\ a$; la fórmula $A = a\ (1+r)^n$ se reduce á $ka = a\ (1+r)^n$, de donde $n = \frac{l.\ k}{l.\ (1+r)}$;

es decir que el valor de n *es independiente del capital colocado primitivamente.*

SEGUNDA CUESTION GENERAL. *Determinar la suma que habria que colocar para percibir al fin de cada año una suma determinada* b, *de modo que nos hallásemos reembolsados enteramente del capital, intereses del capital é intereses de los intereses, transcurridos que fuesen* n *años, siendo el interes* r *por* 1 *fr. al año.*

Sea a la suma que se busca; este capital, al cabo de n años, se habria convertido en $a\ (1+r)^n$.

Seria necesario, pues, que determinando á cuánto ascienden las sumas pagadas cada año, al cabo del año n, la suma de los resultados sea igual á $a\ (1+r)^n$.

Ahora bien; b dado al fin del primer año, ó al principio del segundo, se convierte al cabo del año n en $b(1+r)^{n-1}$.

Igualmente, b dado al fin del segundo año ó al principio del tercero, se convierte al cabo del año n en

$$b\ (1+r)^{n-2}.$$

Se hallaria del mismo modo $b\ (1+r)^{n-3}$, $b\ (1+r)^{n-4}$..., $b(1+r)$, b, para los valores de las demas sumas b, al cabo del n año.

Se tiene pues la ecuacion. . . . . $a(1+r)^n =$

$$b\ (1+r)^{n-1} + b\ (1+r)^{n-2} + b\ (1+r)^{n-3} + \ldots + b\ (1+r) + b;$$

pero el segundo miembro de esta ecuacion, considerado en un órden inverso es evidentemente la suma de los términos de una progresion por cociente, cuyo primer término es b, la razon $1+r$, y el número de los términos n.

De manera que esta suma tiene por espresion (número 193),

$$\frac{b\,(1+r)^n-b}{1+r-1} \text{ ó } \frac{b[(1+r)^n-1]}{r};$$

luego en fin se tiene la ecuacion

$$a(1+r)^n=\frac{b[(1+r)^n-1]}{r}; \text{ de donde } a=\frac{b[(1+r)^n-1]}{r\,(1+r)^n};$$

ó aplicando los logaritmos,

$$l.\ a=l.\ b+l.\ [(1+r)^n-1]-l.\ r-n\ l.\ (1+r).$$

Como esta fórmula encierra cuatro cantidades a, b, r, n, da tambien lugar á cuatro problemas diferentes.

Hé aquí los enunciados de várias cuestiones que se refieren á las precedentes :

Se pregunta durante cuántos años debe colocarse una suma a, *á interes compuesto, al* 5 *y* 10 *por* 100, *para doblar dicha suma?*

(R. al 5 p%, 14 años 2 meses; al 10 p%, 7 años 3 meses.)

Se pregunta qué suma debe colocarse de presente para sacar durante 12 *años y al fin de cada uno, una suma de* 1500 *fr., de modo que nos veamos reembolsados enteramente del capital y de los intereses al cabo de estos* 12 *años, siendo el interes de* 7f 50c *p%, al año.*

(R. 11602f. 91.)

Un particular ha comprado una propiedad en 100000 *fr., y debe pagar esta suma en* 15 *plazos, dando en cada uno una cantidad proporcionada á los intereses de los intereses; el interes entre plazo y plazo es de* 5 *p%. Se desea determinar la cuota de cada plazo?*

(R. 9634f. 22.)

Un número dado de hombres a *aumenta todos los años la centésima parte sobre el año precedente : ¿cuántos años se necesitan para que este número sea* 10 *veces mayor?*

(R. Cerca de 231 años.)

Se saca cada dia de una cuba de 100 *cántaros de vino, un cántaro, que se reemplaza por otro de agua; determinar,* 1°. *cuánto vino quedará en la cuba cuando se haya reemplazado el* 50 *cántaro;* 2°. *en cuántos dias se reducirá la cuba á la mitad, á la tercera ó la cuarta parte?*

(Respuesta á la primera parte de la cuestion : 60 cántaros 1/2.
Idem á la segunda : 69 dias para la mitad, 109 dias para la tercera parte, y 138 dias para la cuarta.)

§ IV. SERIES LOGARÍTMICAS Y ESPONENCIALES.

El método espuesto en el número 203 para resolver la ecuacion $a^x\ b$, bastaba para dar una idea de la construccion de las tablas de logaritmos; pero es demasiado trabajoso y hasta impracticable cuando se quiere determinar el valor de x con mucha aproximacion. Los analistas han descubierto otros medios mucho mas espeditos, no solo para construir nuevas tablas, sino para formar las que ya existen : estos métodos consisten en el desarrollo de los logaritmos en serie.

223. Sea y un número del que se pida el logaritmo desarrollado en serie; y apliquemos el método de los coeficientes indeterminados (números 179 y 181).

Es visible desde luego que no se puede suponer

$$l.\ y=A+By+Cy^2+Dy^3+\text{ etc.};$$

porque si se hace $y=0$, el primer miembro se reduce (núm. 213) al *infinito negativo* ó al *infinito positivo*, segun que la base sea mayor ó menor que 1; miéntras que el segundo miembro se reduce á A, que deberia entónces ser de la misma naturaleza.

No puede suponerse $\quad l.\ y=Ay+By^2+\ldots,$
pues que $y=0$ da $\quad l.\ 0$ ó $-\infty=0;$

pero si se introduce y bajo la forma $1+x$, y se pone

$$(1)\qquad l.\ (1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots,$$

haciendo $x=0$, la ecuacion $l.\ 1=0$ que se obtiene, no presenta ya carácter alguno de absurdidad.

Procuremos, pues, determinar los coeficientes A, B, C,...

Para ello imitemos el procedimiento seguido en el núm. 182, y reemplacemos x por z; sale.

$$(2)\qquad l.\ (1+z)=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots$$

Restando la ecuacion (2) de la ecuacion (1), se obtiene

$$(3)\qquad l.\ (1+x)-l.\ (1+z)=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C\,(x^3-z^3)+\ldots$$