De manera que esta suma tiene por espresion (número 193),

$$\frac{b\,(1+r)^n-b}{1+r-1} \text{ ó } \frac{b[(1+r)^n-1]}{r};$$

luego en fin se tiene la ecuacion

$$a(1+r)^n=\frac{b[(1+r)^n-1]}{r}; \text{ de donde } a=\frac{b[(1+r)^n-1]}{r\,(1+r)^n};$$

ó aplicando los logaritmos,

$$l.\ a=l.\ b+l.\ [(1+r)^n-1]-l.\ r-n\ l.\ (1+r).$$

Como esta fórmula encierra cuatro cantidades a, b, r, n, da tambien lugar á cuatro problemas diferentes.

Hé aquí los enunciados de várias cuestiones que se refieren á las precedentes:

Se pregunta durante cuántos años debe colocarse una suma a, *á interes compuesto, al* 5 *y* 10 *por* 100, *para doblar dicha suma?*

(R. al 5 p°/₀, 14 *años* 2 *meses*; al 10 p°/₀, 7 *años* 3 *meses*.)

Se pregunta qué suma debe colocarse de presente para sacar durante 12 *años y al fin de cada uno, una suma de* 1500 *fr., de modo que nos veamos reembolsados enteramente del capital y de los intereses al cabo de estos* 12 *años, siendo el interes de* 7 *f* 50 *c p°/₀ al año.*

(R. 11602 *f*. 91.)

Un particular ha comprado una propiedad en 100000 *fr., y debe pagar esta suma en* 15 *plazos, dando en cada uno una cantidad proporcionada á los intereses de los intereses; el interes entre plazo y plazo es de* 5 *p°/₀. Se desea determinar la cuota de cada plazo?*

(R. 9634 *f*. 22.)

Un número dado de hombres a *aumenta todos los años la centésima parte sobre el año precedente: ¿cuántos años se necesitan para que este número sea* 10 *veces mayor?*

(R. Cerca de 231 *años*.)

Se saca cada dia de una cuba de 100 *cántaros de vino, un cántaro, que se reemplaza por otro de agua; determinar,* 1°. *cuánto vino quedará en la cuba cuando se haya reemplazado el* 50 *cántaro;* 2°. *en cuántos dias se reducirá la cuba á la mitad, á la tercera ó la cuarta parte?*

(Respuesta á la primera parte de la cuestion: 60 *cántaros* ½.
Idem á la segunda: 69 *dias* para la mitad, 109 *dias* para la tercera parte, y 138 *dias* para la cuarta.)

§ IV. SERIES LOGARÍTMICAS Y ESPONENCIALES.

El método espuesto en el número 203 para resolver la ecuacion $a^x\ b$, bastaba para dar una idea de la construccion de las tablas de logaritmos; pero es demasiado trabajoso y hasta impracticable cuando se quiere determinar el valor de x con mucha aproximacion. Los analistas han descubierto otros medios mucho mas espeditos, no solo para construir nuevas tablas, sino para formar las que ya existen: estos métodos consisten en el desarrollo de los logaritmos en serie.

223. Sea y un número del que se pida el logaritmo desarrollado en serie; y apliquemos el método de los coeficientes indeterminados (números 179 y 181).

Es visible desde luego que no se puede suponer

$$l.\ y=A+By+Cy^2+Dy^3+\text{ etc.};$$

porque si se hace $y=0$, el primer miembro se reduce (núm. 213) al *infinito negativo* ó al *infinito positivo*, segun que la base sea mayor ó menor que 1; miéntras que el segundo miembro se reduce á A, que deberia entónces ser de la misma naturaleza.

No puede suponerse pues que $y=0$ da — l. $y=Ay+By^2+\ldots$, l. 0 ó $-\infty=0$;

pero si se introduce y bajo la forma $1+x$, y se pone

$$(1)\qquad l.\ (1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots,$$

haciendo $x=0$, la ecuacion l. $1=0$ que se obtiene, no presenta ya carácter alguno de absurdidad.

Procuremos, pues, determinar los coeficientes A, B, C,...

Para ello imitemos el procedimiento seguido en el núm. 182, y reemplacemos x por z; sale.

$$(2)\qquad l.\ (1+z)=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots$$

Restando la ecuacion (2) de la ecuacion (1), se obtiene

$$(3)\quad l.\ (1+x)-l.\ (1+z)=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C\,(x^3-z^3)+\ldots$$

El segundo miembro de esta ecuacion es divisible por $x-z$, veamos si por medio de algun artificio se podria poner á este factor en evidencia en el primero.

Se tiene, pues, $l.(1+x)-l.(1+z)=l.\frac{1+x}{1+z}=l.\left(1+\frac{x-z}{1+z}\right)$; pero como $\frac{x-z}{1+z}$ puede mirarse como un solo número u, se puede desarrollar $l.(1+u)$ ó $l.\left(1+\frac{x-z}{1+z}\right)$, como $l.(1+x)$,

lo que da

$$l.\left(1+\frac{x-z}{1+z}\right)=A.\frac{x-z}{1+z}+B\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^2+C\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^3+\ldots$$

Sustituyamos este desarrollo en lugar de $l.(1+x)-l.(1+z)$ en la ecuacion (3), y dividamos los dos miembros por $x-z$; sale

$$A.\frac{1}{1+z}+B.\frac{x-z}{(1+z)^2}+C.\frac{(x-z)^2}{(1+z)^3}+\ldots$$
$$=A+B(x+z)+C(x^2+xz+z^2)+\ldots$$

Pues que esta ecuacion, igualmente que las precedentes, debe verificarse cualesquiera que sean x y z, supongamos $x=z$; resultará

$$\frac{A}{1+x}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots;$$

ó efectuando la division indicada en el primer miembro,

$$A(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots$$

Se tienen pues, segun el principio del núm. 188, las igualdades

$$A=A,\ -A=2B,\ A=3C,\ -A=4D,\ A=5E\ldots,$$

de donde

$$A=A,\ B=-\frac{A}{2},\ C=+\frac{A}{3},\ D=-\frac{A}{4},\ E=+\frac{A}{5},\ldots$$

La ley de la serie es evidente: el coeficiente de n término es igual á $\mp\frac{A}{n}$, segun que n sea par ó impar; se obtiene pues en fin para el desarrollo de $l.(1+x)$,

$$l.(1+x)=\frac{A}{1}x-\frac{A}{2}x^2+\frac{A}{3}x^3-\frac{A}{4}x^4+\ldots$$

$$=A\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots\right).$$

224. Nota. Por el método precedente los coeficientes B, C, D, E,... han sido todos determinados como funciones de A; quedando no obstante este último completamente indeterminado. Lo cual debe ser así, atendida la naturaleza de la espresion que nos hemos propuesto desarrollar; porque como se pueden formar una infinidad de sistemas de logaritmos, es preciso que exista en el desarrollo general de $l.(1+x)$ una cantidad enteramente arbitraria que sirva para distinguir los sistemas unos de otros. Por otra parte, hemos visto (núm. 212) que los logaritmos de un mismo número, tomados en dos sistemas, no difieren mas que por un factor *constante para todos los números*; de modo que la cantidad indeterminada debe ser un factor comun á toda la serie; y esta es la causa de haber encontrado

$$(4)\quad l.(1+x)=A\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots\right).$$

El número A es (núm. 212) el *módulo* cuyo valor particular caracteriza el sistema de logaritmos que se quiere considerar.

225. La hipótesis mas simple que puede hacerse consiste en suponer $A=1$; y se tiene, designando por $l'(1+x)$ este sistema particular de logaritmos,

$$(5)\quad l'(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots$$

Si se dan á x todos los valores posibles, se formarán sucesivamente todos los logaritmos de este sistema, que ha recibido el nombre de *sistema natural* ó *sistema neperiano* (del nombre de Néper, á quien se mira como el inventor de los logaritmos).

Ocupémonos de la formacion de este sistema, pues será fácil deducir en seguida de él todos los demas, bien sea dando á A diferentes valores, bien haciendo uso de la fórmula del núm. 212.

Hagamos en la serie (5), $x=0$; y saldrá $l'1=0$.

Sea $x=1$; resultará de aquí $l'2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots$, serie

muy poco decreciente que obligaria á tomar un gran número de términos para obtener una aproximacion suficiente; seria preciso, por ejemplo, tomar los cien primeros para obtener el valor de $l'2$ con diferencia de 0, 01 (núm. 176). En general la serie no podria dar los logaritmos de los números enteros, pues que se obtendria para todo número mayor que 2 una serie cuyos términos irian aumentando.

Hé aquí las principales transformaciones que han efectuado los analistas para llegar á series propias para dar los logaritmos de los números enteros, que son los únicos que deben colocarse en las tablas.

Primera transformacion. Hágase en la serie (5), $x=\frac{1}{y}$; se obtiene, observando que $l'\left(1+\frac{1}{y}\right)=l'(y+1)-l'y$,

$$(6)\qquad l'(y+1)-l'y=\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{3y^3}-\frac{1}{4y^4}+\ldots$$

Haciendo sucesivamente $y=2, 3, 4, 5,\ldots$, se halla

$$l'3-l'2=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\ldots,$$

$$l'4-l'3=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\frac{1}{81}-\frac{1}{324}+\ldots,$$

$$l'5-l'4=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}+\frac{1}{192}-\frac{1}{1024}+\ldots$$

La primera serie dará el logaritmo de 3 por medio del logaritmo de 2, la segunda el logaritmo de 4 como funcion del logaritmo de 3,..., y así sucesivamente. Siempre será posible apreciar el grado de aproximacion (núm. 136), puesto que las series constan de términos alternativamente positivos y negativos que disminuyen cada vez mas.

Segunda transformacion. Se llega á series mucho mas cómodas por el medio siguiente:

Sustituyamos en la serie

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,$$

en lugar de x, $-x$; saldrá

$$l(1-x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots;$$

de donde restando una de otra estas dos series, y observando que $l(1+x)-l(1-x)=l\frac{1+x}{1+x}$,

$$l\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots\right).$$

Para que decrezcan rápidamente los términos del segundo miembro es preciso que x sea una fraccion muy pequeña; y en este caso, $\frac{1+x}{1-x}$ es mayor que la unidad, pero muy poco diferente.

Supongamos, pues, $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{z}$ (en que z es por lo ménos igual á 1); saldrá $(1+x)z=(1-x)(z+1)$;

de donde, reduciendo, $x=\frac{1}{2z+1}$.

Luego la serie precedente se convierte en $l'\left(1+\frac{1}{z}\right)$,

ó $$l'(z+1)-l'z=2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\ldots\right).$$

Esta serie da igualmente la diferencia entre dos logaritmos consecutivos; pero los términos decrecen mucho mas rápidamente que la serie (6).

Hágase sucesivamente $z=1, 2, 3, 4, 5,\ldots$; se encuentra

$$l'2=z\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^4}+\frac{1}{7.3^7}+\ldots\right),$$

$$l'3-l2=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\frac{1}{7.5^7}+\ldots\right),$$

$$l'4-l'3=2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3.7^3}+\frac{1}{5.7^5}+\frac{1}{7.5^7}+\ldots\right),$$

. . . . . .

Sea $z=100$; resulta

$$l'101=l'100+2\left(\frac{1}{201}+\frac{1}{3(201)^3}+\frac{1}{5(201)^5}+\ldots\right),$$

serie en la cual siendo conocido el logaritmo de 100, basta el primer término para dar el de 101 con siete cifras decimales.

Existen ademas otras fórmulas aun mas espeditas que sirven para espresar logaritmos como funcion de otros ya conocidos; pero lo que precede basta para dar una idea de la facilidad con que se podrian construir tablas.

226. Calculados los logaritmos neperianos, es fácil formar cualquiera otro sistema.

Por ejemplo, para formar el sistema ordinario es preciso (número 212) multiplicar cada logaritmo neperiano por el *módulo* $\frac{1}{l'10}$.

Se ha calculado este número con todo el grado de aproximacion que se puede desear; y su valor en decimales es de 0,4342944819.... : este es *el módulo propio para pasar del sistema neperiano al nuestro cuya base es* 10.

Este módulo espresa ademas *el logaritmo ordinario de la base del sistema neperiano;* porque llamando e á dicha base se tiene la ecuacion $e^{l'10}=10$; de donde, tomando los logaritmos en el sistema ordinario,

$$l.\ 10\times l.\ e=l.\ 10=1\ ;\ \text{luego}\ l.\ e=\frac{1}{l'10}=0{,}43429....$$

Como las tablas ordinarias pueden deducirse de lo que precede, no hay inconveniente en servirse de ellas para determinar el número á que corresponde el logaritmo anterior; y se halla

$$0{,}4342944819.....=l.\ e=l.\ 2{,}7182818284.....$$

De modo que $e=2{,}7182818284.....$

Pronto llegaremos á este mismo resultado por otro camino.

227. *Desarrollo en serie de la esponencial* a^x. El enlace que existe entre las cantidades esponenciales y los logaritmos [enlace que consiste en que representando a la base de un sistema de logaritmos, x es (número 208) el logaritmo de la espresion a^x], nos lleva á investigar si seria posible desarrollar á a segun las potencias de x; lo que daria

ntónces el desarrollo de un número como funcion de su logaritmo, uestion inversa de la precedente.

Supongamos pues hallado este desarrollo; y sea

$$(1)\qquad a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots;$$

i se hace $x=0$, la ecuacion se reduce á $a^0=1$, resultado exacto; de modo que es admisible esta forma de desarrollo.

Para determinar A, B, C, D,..., reemplacemos x por z; y saldrá

$$(2)\qquad a^z=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4\ldots;$$

restando una de otra estas dos ecuaciones, se tiene

$$(3)\quad a^x-a^z=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^3)+D(x^4-z^4)+\ldots,$$

ecuacion cuyo segundo miembro es divisible por $x-z$; de manera que es preciso poner á este factor en evidencia en el primero. Se puede pues poner a^x-a^z bajo la forma $a^z\,(a^{x-z}-1)$; y si se reemplaza en la serie (1), x por $x-z$, sale

$$a^z\,(a^{x-z}-1)=a^z\,[A(x-z)+B(x-z)^2+C(x-z)^3+\ldots].$$

Sustituyendo, pues, en la ecuacion (3) en lugar de a^x-a^z, el valor que se acaba de obtener, y dividiendo ambos miembros por $x-z$, se halla

$$a^z\,[A+B(x-z)+C(x-z)^2+\ldots]$$

$$=A+B(x+z)+C(x^2+xz+z)^2+\ldots$$

Hagamos ahora $x=z$ en esta última ecuacion; y se reduce á a^x.

$A=A+2B\times+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots$, ó reemplazando a^x por su desarrollo (1),

$$A+A^2x+ABx^2+ACx^3+\ldots=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3\ldots$$

Igualando por separado los coeficientes de las mismas potencias de x, se obtienen las ecuaciones

$$A=A,\ A^2=2A,\ AB=3C,\ AC=4D,\ldots;$$

de donde se deduce

$$A=A,\ B=\frac{A^2}{1.2},\ C=\frac{A^3}{1.2.3.},\ D=\frac{A^4}{1.2.3.4}.$$

La ley del desarrollo está manifiesta : el término que en la serie (1) tiene n ante sí, tiene por espresion $\frac{A^n}{1.2.3.4...n}$.

Se ve que todos los coeficientes B, C, D,... están espresados en funcion del coeficiente A que permanece aun *indeterminado*, es decir que el método que acabamos de seguir no basta para hacerlo obtener; pero no por eso deja de tener un valor único que se encuentra por el artificio siguiente :

Puede ponerse a^x bajo la forma $(1+\overline{a-1})^x$, ó $(1+b)^x$, suponiendo para abreviar, $a-1=b$. Si se desarrolla pues $(1+b)^x$ segun la fórmula del binomio, se tiene

$$(1+b)^x = 1+\frac{x}{1}b+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}b^2+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}b^3+\ldots;$$

pero teniendo solamente cuenta en este desarrollo con la parte afectada de x, es fácil reconocer que esta parte tiene por espresion

$$\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\frac{b^5}{5}-\ldots\right)x;$$

por otro lado el coeficiente de x, en la serie (1), es igual á A. Se tiene, pues,

$$A=\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\frac{b^5}{5}-\ldots,$$

ó bien reemplazando b por su valor $a-1$,

$$A=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\ldots$$

Ordinariamente se representa por k la espresion

$$\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\ldots;$$

así, sustituyendo k en lugar de A, en los valores hallados para B, C, D,..., y trasportando estos valores á la serie (1) se obtiene en fin

$$(4)\qquad a^x = 1+\frac{kx}{2}+\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\frac{k^4x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

Tal es el desarrollo de la esponencial a^x en serie.

228. *Consecuencias.* Si se supone en esta serie, $x=1$, se convierte en

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+\ldots;$$

por donde se ve que a está espresada como funcion de k, lo mismo que la relacion $k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\ldots$ daba k como funcion de a.

Sentado esto, busquemos el valor particular de a que corresponde á $k=1$, y designemos por c este valor particular; hallamos

$$c=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots,$$

serie decreciente, cuyos primeros términos dan por suma

2,7182818, con diferencia de casi 0,0000001.

La comparacion de este resultado con el número obtenido (número 226) para el valor de e, base del sistema neperiano, parece indicar que c y e *son idénticos;* y esto es lo que puede demostrarse inmediatamente.

En efecto, póngase en la fórmula (4) $kx=1$, de donde $x=\frac{1}{k}$; y se convierte en

$$a^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots;$$

lo cual da necesariamente $a^{\frac{1}{k}}=c$.

Tomando los logaritmos de los dos miembros de esta última igualdad que tuviesen por base c, se encuentra

$\frac{1}{k}\cdot la=1$, de donde $la=k$,

ó introduciendo en lugar de k su valor (núm. 227),

$$la=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\ldots;$$

ó bien, poniendo por $a=1+x$, de donde $a-1=x$,

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Pero esta fórmula es precisamente la que se obtuvo (núm. 225) pa el desarrollo del logaritmo *neperiano* de $1+x$.

Luego los números c y e son *idénticos*.

229. La fórmula (4) del número 227 puede tomar diferentes formas que conviene dar á conocer aquí.

Consideremos de nuevo la relacion $a^{\frac{1}{k}}=c$, ó mejor $a^{\frac{1}{k}}=e$ (pues que se tiene $c=e$), y tomemos los logaritmos de los dos miembros en un sistema cualquiera; sale

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{l}.\ a=\mathrm{l}e,\ \text{de donde}\ k=\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}.$$

De modo que la fórmula (4) se cambia en esta otra:

$$a^x=1+\frac{x}{1}\cdot\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}+\frac{x^2}{1.2}\cdot\left(\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}\right)^2+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}\right)^3+\ldots$$

Tal es la forma bajo la que se presenta comunmente el desarrollo de a^x cuando se toman los logaritmos en un sistema enteramente arbitrario.

Caso particular. 1º. El número a puede tomarse por *base* del sistema de logaritmos. Como en este caso se tiene $\mathrm{l}a=1$, y $k=\frac{1}{\mathrm{l}e}$, la fórmula se convierte en

$$a^x=1+\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{\mathrm{l}e}+\frac{x^2}{1.2}\left(\frac{1}{\mathrm{l}e}\right)^2+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{l}e}\right)^3+\ldots$$

Tal es el desarrollo de un número cualquiera como funcion de su logaritmo tomado en el sistema cuya base es a.

2º. Sea el número constante e tomado á su vez por base del sistema. Como se tiene entónces $\mathrm{l}e=1$, de donde $k=\mathrm{l}a$, ó mejor $k=\mathrm{l}'a$, segun la notacion del núm. 225, resulta de esta hipótesis

$$a^x=1+\frac{x}{1}\cdot\mathrm{l}'a+\frac{x^2}{1.2}\cdot(\mathrm{l}'a)^2+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot(\mathrm{l}'a)^3+\ldots$$

3º. En fin, supóngase $a=e$, lo que da necesariamente $\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}$ ó $k=1$.

La fórmula se reduce á

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

Esta serie, que es la mas usada, da el desarrollo de un número como funcion de su logaritmo neperiano.

Veremos en el capítulo último las consecuencias que se deducen de todas estas fórmulas. Pero podemos ya desde ahora indicar de qué modo el desarrollo de los logaritmos en serie se deduce del desarrollo de las esponenciales.

Tenemos desde luego que la relacion $k=\frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e}$, que se reduce á $k=\mathrm{l}'a$ cuando se toma e por base del sistema de logaritmos, da (número 227)

$$\mathrm{l}'a=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}+\ldots,$$

ó

$$\mathrm{l}'(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Esta misma relacion da en seguida

$$\mathrm{l}a=k.\ \mathrm{l}e;$$

de donde, poniendo en lugar de k su valor, y suponiendo ademas $a=1+x$,

$$\mathrm{l}.\ (1+x)=\mathrm{l}e\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$$

El módulo desconocido, $\mathrm{l}e$, puede obtenerse fácilmente (número 226) una vez calculados los logaritmos neperianos.