CAPITULO VII.

TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES.

Introduccion. Los mas célebres autores analíticos se han ocupado del problema de la resolucion general de las ecuaciones algebráicas de un grado cualquiera y de una sola incógnita; pero hasta aquí han sido infructuosos sus esfuerzos respecto á las ecuaciones de un grado superior al cuarto. Sin embargo las investigaciones que han hecho á este propósito los han conducido á propiedades comunes á las ecuaciones de todos les grados, y de las cuales han sabido sacar partido, ya para resolver cierta clase de ecuaciones, ya para referir la resolucion de una ecuacion dada á las de otras ecuaciones mas simples. Nos proponemos en este capítulo dar á conocer estas propiedades, y su uso, para facilitar la resolucion de las ecuaciones.

§ I. DIVISIBILIDAD DE LAS FUNCIONES ENTERAS.— PROPIEDADES GENERALES DE LAS ECUACIONES. — TEORÍA COMPLETA DEL MÁXIMO COMUN DIVISOR.

Divisibilidad de las funciones enteras.

Número 230. La investigacion de las propiedades de que gozan las ecuaciones de todos los grados nos conducirá á considerar los polinomios bajo un punto de vista particular y enteramente diferente de los que nos han servido en el capítulo primero. Admitiremos para ello espresiones de la forma

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Tx+V,$$

en las cuales m es un número entero positivo, pero cuyos coeficientes A, B, C,... T, V, designan cantidades que pueden ser cualesquiera, es decir, enteras ó fraccionarias, conmensurables ó inconmensurables, numéricas ó algebráicas. Ahora bien, en la division algebráica, tal como la espusimos en el capítulo primero, se tiene por objeto, *dados dos polinomios* enteros relativamente á todas las letras y á los números particulares que entran en ellos, *encontrar un tercer polinomio de la misma especie, que multiplicado por el segundo, reproduzca el primero.*

Pero si se tienen dos polinomios

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Tx+V,$$
$$A'x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}+\ldots+T'x+V',$$

que no sean *necesariamente* enteros sino relativamente á x, y cuyos coeficientes A, B, C,... A', B', C',... sean cualesquiera, puede uno proponerse *encontrar un tercer polinomio*, de la misma forma y naturaleza que los precedentes, *el cual, multiplicado por el segundo reproduzca el primero.*

El procedimiento para efectuar esta division es análogo al de la division ordinaria; con la sola diferencia de que en aquella *el primer término de cada dividendo parcial debe ser exactamente divisible por el primer término del divisor*; en vez de que en la nueva especie de division se parte el primer término de cada dividendo parcial (es decir, la *parte afectada de la potencia mas alta de la letra principal*) por el primer término del divisor, sin cuidarse de si el coeficiente del cociente parcial correspondiente es entero ó fraccionario; y se continúa la operacion *hasta que se obtiene un cociente que multiplicado por el divisor, destruya el último dividendo parcial*, en cuyo caso la division propuesta se llama exacta, ó bien *hasta que se llega á una resta de grado menor que el del divisor*, relativamente á la letra principal; y en este caso se mira la division como imposible, porque llevando mas lejos la operacion se obtendrian cocientes en los que la letra principal estaria afectada de *esponentes negativos*, ó entraria en el denominador; lo cual seria contrario á la naturaleza de la cuestion, puesto que el cociente debe ser de la misma forma que los polinomios propuestos, es decir compuesto de un número *limitado* de términos afectados de esponentes *enteros y positivos.*

Para distinguir los polinomios enteros relativamente á una letra, la x por ejemplo (siendo por otra parte cualesquiera los coeficientes), de los polinomios ordinarios, es decir de los polinomios enteros relativamente á todas letras y á los números particulares que entran en

ellos, convendremos en designar á los primeros con el nombre de *funciones enteras de* x; llamando *divisores relativos*, á las otras funciones enteras de x que los dividan exactamente en el sentido que acabamos de indicar.

231. Resulta de estas definiciones que si una funcion entera tiene por divisor relativo otra funcion entera, *el producto de este divisor por un factor cualquiera independiente de la letra principal es tambien un divisor relativo de la primera funcion.*

En efecto, supongamos que se tenga

$$\frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+U}{A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots+U'}=A''x^{m-n}+B''x^{m-n-}+\ldots+U''.$$

Sea K un factor cualquiera independiente de x; se tiene necesariamente

$$\frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots+U}{K(A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots+U')}=\frac{A''}{K}x^{m-n}+\frac{B''}{K}x^{m-n-1}+\ldots+\frac{U''}{K};$$

pero el segundo miembro de esta identidad es una funcion entera de x; luego K $(A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots)$ es divisor relativo de $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots$

Lo cual significa que todo divisor relativo del producto K $(Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+U)$, cuando K es un factor independiente de x, debe ser al mismo tiempo un divisor relativo de la funcion $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots$

Sentado esto, vamos primeramente á establecer sobre la divisibilidad de las funciones enteras algunos principios análogos á los demostrados en la *Aritmética* acerca de los números enteros, pues nos serán muy útiles en el estudio de las propiedades relativas á las ecuaciones.

232. Primer principio. *Toda funcion entera* px+q, *de primer grado en* x, *que divide exactamente el producto* A×B *de otras dos funciones enteras, divide necesariamente á una de ellas.*

Para demostrar este principio supongamos que A no sea divisible por $px+q$; vamos á probar que B lo será entónces necesariamente. En efecto, dividiendo A por $px+q$, segun el procedimiento ordinario, se llegará á una resta que no contendrá ya á x. Sea Q el cociente de esta division, y R la resta: se tendrá la ecuacion idéntica

$$A=(px+q)Q+R,$$

la cual, multiplicada por B, da

$$A\times B=(px+q).\,QB+RB.$$

Pero por hipótesis A×B es divisible por $px+q$; de modo que el cociente del segundo miembro por $px+q$ debe reducirse á una funcion entera de x, lo que exige que R B y por consiguiente B (número 231) sean divisibles por $px+q$.

233. Consecuencia. *Toda funcion entera* D, *de primer grado en* x, *que divide exactamente el producto* A×B×C×E×... *de* m *funciones enteras, divide necesariamente á una de estas funciones.*

Porque si D no divide á A, debe dividir al producto B×C×E×..., en virtud de lo que acabamos de decir; si no divide á B debe dividir á C×E×...; y así por este órden. Por donde se ve que no dividiendo D á ninguno de los $(m-1)$ primeros factores, debe al ménos dividir el m^{mo}.

De aquí se deduce, como caso particular, que D no puede dividir á A^m sin dividir á A (siendo D un divisor relativo del primer grado, y A una funcion entera cualquiera).

234. Segundo principio. Sea P una funcion entera, resultado de la multiplicacion de un número cualquiera de funciones enteras P', P'', P''',... (algunas de las cuales pueden ser iguales). *Esta funcion entera* P *no puede tener* (núm. 252) *por divisores relativos* del primer grado en x *mas que á los que entran en las funciones* P' P'' P'''..., *ó* (núm. 232) *productos de estos divisores relativos por factores independientes de* x.

Pasemos ahora á la esposicion de las propiedades comunes á todas las ecuaciones.

Propiedades generales de las ecuaciones.

235. Toda ecuacion completa del grado m (siendo m un número entero y positivo) puede, por la trasposicion de los términos y hecha la division de los dos miembros por el coeficiente de x^m, reducirse á la forma

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0;$$

siendo P, Q, R,..., T, U, coeficientes tomados en el sentido algebráico mas general.

Sentado esto, llámase *raiz* de esta ecuacion (véase el número 97) á toda espresion, sea cualquiera su naturaleza, es decir, *numérica* ó

algebráica, real ó imaginaria, que puesta en la ecuacion en lugar de x, *hace su primer miembro igual á* 0.

236. Pudiendo en general considerarse una ecuacion como la traduccion algebráica de las relaciones que existen entre los datos y la incógnita de un problema, se llega naturalmente al principio de que TODA ECUACION TIENE POR LO MÉNOS UNA RAÍZ. Las condiciones del enunciado pueden á la verdad ser incompatibles; pero es de suponer que en este caso nos lo revelaria *algun símbolo de absurdidad*, tal como una fórmula que encerrase, como operacion necesaria, la estraccion de una raíz del grado par de una cantidad negativa, y no por eso dejaria de haber una espresion que puesta en la ecuacion en lugar de x, la satisfaria. Admitiremos, pues, este principio que tendremos en lo sucesivo ocasion de notar en la mayor parte de las ecuaciones.

Entre tanto hé aquí otra proposicion que puede *mirarse* como la propiedad fundamental de la teoría de las ecuaciones.

237. PRIMERA PROPIEDAD. *Si* a *es una raíz de la ecuacion* $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+U=0$, *el primer miembro de esta ecuacion es divisible por* $(x-a)$; y recíprocamente, si *un factor de la forma* $(x-a)$ *divide el primer miembro de la propuesta,* a *es una raíz de esta ecuacion.*

En efecto, ensayemos la division, y veamos que es lo que sucederá cuando se lleva la operacion hasta el punto de que el esponente de x se reduzca á 0 en el primer término del dividendo.

(Esta operacion es de la clase de aquellas de que hemos hablado en el núm. 230, pues a, P, Q..... son de una naturaleza cualquiera.)

$$
\begin{array}{l|l}
x^m+Px^{m-1}Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U & x-a \\
\hline
\quad +a \;\; x^{m-1} & x^{m-1}+a\;\; x^{m-2}+a^2\;\; x^{m-1}+\ldots+a^{m-1} \\
\quad +P & \qquad +P \qquad\quad +Pa \qquad\qquad +Pa^{m-2} \\
\hline
\qquad +a^2 \;\; x^{m-2}+\ldots & \qquad\qquad +Q \qquad\qquad +Qa^{m-3} \\
\qquad +Pa & \qquad\qquad\qquad\qquad +\ldots \\
\qquad +Q & \qquad\qquad\qquad\qquad +T
\end{array}
$$

. . . . . .

. . . . . .

Por poco que se reflexione acerca de la manera de obtenerse los cocientes parciales se reconoce, primero por analogía y en seguida por un medio ya empleado muchas veces (núm. 31 y 86), una *ley de formacion* para los coeficientes de estos diversos cocientes; de lo que

puede concluirse, 1°. que debe haber m cocientes parciales; 2°. que el coeficiente del m^{mo} cociente, es decir de x^o. debe ser

$$a^{m-1}+Pa^{m-2}+Qa^{m-3}+\ldots+T,$$

siendo T el coeficiente del penúltimo término de la propuesta.

Luego multiplicando el divisor por este cociente, y sustrayendo el producto del dividendo, se obtiene para resta

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}+\ldots+Ta+U.$$

Pero por hipótesis a es raíz de la ecuacion; luego *esta resta es nula*, pues que no es otra cosa que el resultado de la sustitucion de a en lugar de x en la ecuacion; *de este modo se hace exactamente la division.*

Recíprocamente, si $(x-a)$ es divisor exacto de $x^m+Px^{m-1}+\ldots$, la resta $a^m+Pa^{m-1}+\ldots$ debe ser *nula*; así pues (núm. 235), a es raíz de la ecuacion.

238. *Observacion.* Examinando el cociente en la division efectuada en el número precedente, se encuentra para los coeficientes la ley siguiente:

Cada coeficiente se obtiene, multiplicando el que le precede por la cantidad a, *y añadiendo al producto el de los coeficientes de la ecuacion propuesta, que ocupa el mismo lugar que el término del cociente que se desea obtener.*

Así el coeficiente del 3er. término, a^2+Pa+Q, es igual á $(a+P)a+Q$, ó al producto del coeficiente anterior $a+P$, por la cantidad a, aumentado con el coeficiente Q del 3er. término de la ecuacion propuesta. El coeficiente del 4°. término seria

$$(a^2+Pa+Q)a+R, \quad ó \quad a^3+Pa^2+Qa+R.$$

Tendremos alguna vez necesidad de recordar esta ley, que es fácil de retener por otra parte.

239. SEGUNDA PROPIEDAD. *Toda ecuacion de una sola incógnita tiene tantas raices como unidades hay en el esponente de su grado, y no puede tener mas.*

Sea $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0$ la ecuacion propuesta.

Pues que (núm. 236) toda ecuacion tiene por lo ménos una raíz, si se designa por a la que lleva en sí necesariamente la ecuacion prece-

dente, su primer miembro es (núm. 237) divisible por $(x-a)$; y se tiene la identidad

$$(1) \qquad x^m+Px^{m-1}+\ldots=(x-a)\,(x^{m-1}+P'x^{m-2}+\ldots).$$

Pero suponiendo $x^{m-1}+P'x^{m-2}+\ldots=0$,
se obtiene otra ecuacion que tiene por lo ménos una raíz. Sea b esta raíz, se tiene (núm. 237)

$$x^{m-1}+P'x^{m-2}+\ldots=(x-b)\,(x^{m-2}+P''x^{m-3}+\ldots),$$

igualdad que, multiplicada miembro á miembro por la igualdad (1), da

$$(2) \qquad x^m+Px^{m-1}+\ldots=(x-a)\,(x-b)\,(x^{m-2}+P''x^{m-3}+\ldots)$$

Razonando sobre el polinomio $x^{m-2}+P''x^{m-3}+\ldots$ como sobre el precedente, se tiene tambien

$$x^{m-2}+P''x^{m-3}+\ldots=(x-c)\,(x^{m-3}+P'''x^{m-4}+\ldots),$$

igualdad que, multiplicada por la igualdad (2), da

$$(3) \qquad x^m+Px^{m-1}+\ldots=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x^{m-2}+\ldots).$$

Observemos ademas que para cada factor del 1er. grado en x, puesto en evidencia, disminuye en una unidad el grado de x en el polinomio-cociente.

Así, cuando se hayan hecho aparecer $(m-2)$ factores del primer grado, el esponente de x quedará reducido á $m-(m-2)$, ó 2; es decir que se obtendrá un polinomio del 2°. grado en x, que (número 97) es á su vez descomponible en el producto de dos factores del primer grado $(x-k)\,(x-l)$. Ahora bien; como se habrá ya puesto en evidencia $(m-2)$ factores del primer grado, se sigue que se tiene finalmente la identidad

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots(x-k)\,(x-l),$$

cuyo segundo miembro es el producto de m *factores del primer grado en* x.

Sentado esto, como á cada divisor del primer grado en x corresponde necesariamente (núm. 237) *una raíz* de la propuesta, se sigue que los m factores del primer grado $x-a$, $x-b$, $x-c$,... dan para la propuesta m raíces a, b, c,... Luego, etc.

Resulta por otro lado evidentemente del principio establecido en el número 234, que el polinomio $x^m+Px^{m-1}+\ldots$ no puede tener en otros

divisores relativos del primer grado sino $x-a$, $x-b$,...., $x-k$, $x-l$, ó el producto de uno de estos divisores relativos por un factor cualquiera independiente de x. Luego tampoco la ecuacion puede tener para raíces mas que á a, b, c,... k, l, que son las únicas que se podrian sacar de las ecuaciones

$$x-a=0,\ x-b=0,\ldots,\ x-k=0,\ x-l=0,$$

ó mas generalmente, de las ecuaciones

$$M(x-a)=0,\ M'(x-b)=0,\ldots$$

(siendo M, M', M'',... factores independientes de x).

Luego, en fin, *toda ecuacion del grado* m *tiene* m *raíces, y no podrá tener mas.*

240. *Observacion.* Hay algunas ecuaciones que en la apariencia admiten ménos raíces que unidades hay en el esponente de su grado. Tales son aquellas cuyo primer miembro tiene muchos factores iguales: tal seria la ecuacion

$$(x-a)^4\,(x-b)^3\,(x-c)^2\,(x-d)=0,$$

que no tiene mas que cuatro raíces diferentes a, b, c, d, aunque sea del décimo grado.

Es evidente que ninguna cantidad α diferente de a, b, c, d, puede verificarla. Porque la existencia de esta raíz a llevaria consigo la del divisor $(x-\alpha)$ en el primer miembro, lo que es imposible en virtud del principio establecido número 234.

Pero no por eso la propuesta deja de tener 10 raíces, de las cuales 4 son iguales á a, 3 á b, 2 á c, 1 á d.

Veremos en lo sucesivo que esta especie de ecuaciones son mas fáciles de resolver que aquellas cuyas raíces no tienen entre sí ninguna relacion determinada.

241. Consecuencia *de la segunda propiedad.*

Teniendo el primer miembro de toda ecuacion del grado m; m divisores del primer grado, de la forma

$$x-a,\ x-b,\ x-c,\ldots,\ x-k,\ x-l,$$

si se multiplican estos divisores *dos á dos, tres á tres*,... se obtendrán tantos divisores relativos del segundo, del tercer,... grado en x, como combinaciones diferentes pueden formarse con m cantidades tomadas

dos á dos, tres á tres,... Ahora bien; estos números de combinaciones están, como vimos número 147, espresados por $m.\frac{m-1}{2}$, $m.\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$,...; y los productos obtenidos son ademas (núm. 234) los únicos divisores del mismo grado que puede tener el primer miembro de la propuesta, á ménos que no se consideren en seguida los productos de estos divisores relativos como factores independientes de x.

Así, pues, la propuesta admite $m.\frac{m-1}{1}$ divisores del segundo grado, $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$ del tercero; y así sucesivamente.

242. Composicion de las ecuaciones. Si en la ecuacion idéntica
$x^m+Px^{m-1}+\ldots=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l,)$
se efectúa la multiplicacion de los m factores del segundo miembro (véase número 148), y se comparan, término á término, los dos miembros, se llegará á las relaciones siguientes entre los coeficientes P, Q, R,..., T, U, y las raíces a, b, c,..., k, l, de la propuesta, á saber:

$$-a-b-c\ldots-k-l=P\text{; ó } a+b+c\ldots+k+l=-P\text{;}$$

$$ab+ac+\ldots+kl=Q, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-abc-abd\ldots-ikl=R\text{, ó } abc+abd\ldots+ikl=-R\text{;}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm abcd\ldots.kl=U\text{, ó } abcd\ldots.kl=\pm U.$$

(Hemos colocado un doble signo en la última relacion, porque el producto $-a\times-b\times-c\ldots\times-l$ es $+$ ó $-$ $abcd\ldots$, kl, segun que la ecuacion es de grado *par* ó *impar*.)

Luego, 1°. *La suma* algebráica de las raíces tomadas *con signos contrarios, es igual al coeficiente del segundo término;* ó bien, *la suma algebráica de las raíces mismas es igual al coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario.*

2°. *La suma de los productos, dos á dos, de las raíces tomadas con sus signos respectivos, es igual al coeficiente del tercer término.*

3°. *La suma de los productos tres á tres de las raíces tomadas con signos contrarios, es igual al coeficiente del cuarto término;* ó bien, *el coeficiente del cuarto término, tomado con signo contrario, es igual á la suma*

de los productos tres á tres de las raíces tomadas con sus signos. Y así sucesivamente.

En fin: *El producto de todas las raíces, tomadas con signos contrarios, es igual al último término;* ó bien, *el producto de todas las raíces, tomadas con sus signos respectivos, es igual al último término de la ecuacion, tomado con su signo*, si la ecuacion es de grado par, y *con el signo* contrario si la ecuacion es de grado impar.

Las propiedades demostradas número 98, relativamente á las ecuaciones del segundo grado, no son mas que casos particulares de los que acabamos de establecer. El último término, tomado con su signo en estas ecuaciones, es igual al producto de las raíces mismas, porque la ecuacion es de grado par.

Nota. Hemos supuesto en lo que precede que el coeficiente del primer término era igual á la unidad. Si sucediese lo contrario, seria preciso, ántes de establecer las anteriores relaciones entre los coeficientes y las raíces, dividir toda la ecuacion por este coeficiente.

243. Creemos oportuno establecer aquí dos proposiciones de que tendremos que hacer uso con alguna frecuencia en adelante.

Sea la ecuacion mas general del m^m grado,

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Hx^{m-n+1}+Kx^{m-n}+\ldots+Nx^n+Px^{n-1}+\ldots+Tx+U=o\text{;}$$

siendo A, B,..., H, K,..., N, P,..., T, U, cantidades algebráicas cualesquiera. (El término Nx^n tiene n términos detras de sí, y el término Kx^{m-n} n delante.)

Sentado esto, puede suceder que hipótesis particulares hechas sobre los datos que han conducido á la ecuacion propuesta, destruyan, ya los n últimos términos, á partir del término Px^{n-1} hasta el fin, ya los n primeros hasta el término Hx^{m-n+1} inclusive. Digo, pues, que en el primer caso, *la ecuacion tiene un número* n *de raíces nulas*, y que en el segundo *tiene un número* n *de raíces infinitas.*

En efecto, tomando la ecuacion en el primer caso la forma

$$x^n(Ax^{m-n}+Bx^{m-n-1}+\ldots+N)=0,$$

se puede satisfacer á ella suponiendo,

ya sea $\quad x^n=0$, ya $Ax^{m-n}+Bx^{m-n-1}+\ldots+N=0$;

así que la primera hipótesis da raíces necesariamente nulas (número 239), y la segunda $(m-n)$ raíces que pueden ser cualesquiera.

En cuanto al segundo caso, hagamos como en el número 192, $x=\frac{1}{y}$ en la ecuacion propuesta.

Resulta, despues de la desaparicion de los denominadores,

$$Uy^m+Ty^{m-1}+\ldots+By+A=0,$$

ecuacion en que los n últimos coeficientes son por hipótesis iguales á cero, y que tiene por consiguiente n raíces *nulas;* luego á causa de la relacion $x=\frac{1}{y}$, la ecuacion propuesta tiene n raíces infinitas.

Q. E. L. Q. D. D.

Teoría completa del máximo comun divisor.

Introduccion. Reflexionando sobre las propiedades precedentes, se descubre una grande analogía entre la investigacion de los divisores relativos del primer grado de una funcion entera de x, y la resolucion de una ecuacion. En efecto, resulta de la propiedad del número 239, que todo polinomio

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}\ldots+Tx+U,$$

es descomponible en m factores del primer grado en x; ahora bien, para obtener esta descomposicion bastaria igualar el polinomio á 0, y resolver la ecuacion relativamente á x; y recíprocamente, si se conociesen los factores del primer grado en x que componen este polinomio, se conoceria por esto solo las raíces.

Si se necesita saber resolver una ecuacion para obtener los divisores relativos de un polinomio, no es de ninguna manera preciso para obtener lo que se llama *el máximo comun divisor relativo de dos funciones enteras.* Los analistas han sacado tambien partido de esta última cuestion para la resolucion de cierta clase de ecuaciones. Así, pues, ántes de ir mas adelante en la teoría de las ecuaciones, es necesario que completemos la investigacion del máximo comun divisor; cuestion que no hemos hecho mas que indicar que en el capítulo primero.

Trataremos desde luego el caso de dos funciones enteras de x, despues de lo cual consideraremos el en que los dos polinomios son enteros relativamente á todas las letras y á los coeficientes.

Del máximo comun divisor relativo.

244. El mayor divisor comun relativo de dos funciones enteras de x, es el polinomio del grado mayor en x que divide á la vez los dos polinomios propuestos.

Resulta evidentemente de esta definicion que cuando los dos polinomios han sido divididos por su mayor divisor comun, los cocientes que resultan no deben ya contener ningun factor comun en x; porque si existiese uno, el producto de este factor por el divisor ya considerado seria de grado mas elevado en x que dicho divisor, y seria ademas divisor relativo de los dos polinomios.

Sentado esto, sean d, d', d'', los únicos factores de primer grado en x, comunes á dos funciones enteras, y supongamos que n, p, q, sean los esponentes de las potencias de estos factores, comunes á ambos polinomios. Es evidente que el producto $d^n\,d'^p\,d''^q$, es un divisor relativo comun á estos. Digo ademas que este es *su máximo comun divisor;* porque resulta del principio establecido núm. 234, que los otros divisores relativos comunes no pueden ser sino productos 2 á 2, 3 á 3,... de las diferentes potencias de d, d', d'', cuyos esponentes son cuando mas iguales á n, p, q.

Podemos, pues, establecer como PRIMER PRINCIPIO, 1°. que *el máximo comun divisor relativo de dos funciones enteras es el producto de las potencias mas altas de todos los divisores del primer grado en* X, *comunes á los dos polinomios;* 2°. que *todo divisor relativo comun de dos funciones enteras, divide necesariamente á su mayor divisor comun relativo.*

NOTA. Se podria tambien formar una infinidad de divisores relativos comunes, del mismo grado que $d^n\times d'^p\times d''^q$; pero seria (número 231) multiplicando este por factores independientes de x.

245. SEGUNDO PRINCIPIO. El máximo comun divisor relativo de dos funciones enteras es el mismo que existe entre el polinomio del grado menor y la resta de su division, ó, al ménos, no difiere de él sino por un factor independiente de X.

En efecto, sean A y B los dos polinomios, D su mayor comun divisor relativo, Q el cociente, R la resta de su division, D' el mayor divisor comun relativo de B y de R; se tendrá la igualdad

$$A=B\times Q+R,$$