Hicimos ya ver (núm. 38) que son absolutamente indispensables estas supresiones.

De este modo se obtiene para A'' y B'' el comun divisor D_5; y para los dos polinomios A y B el *m. c. d.* es $D_1 \times D_2 \times D_5$.

Nota. Aplicando á A'' y B'' el procedimiento indicado en el caso primero, se reconoce tambien que estos dos polinomios *son primeros entre sí*, cuando se obtiene *una resta, ya numérica, ya funcion de* b, *pero independiente de a*. Entónces A y B no tienen por *m. c. d.* mas que á $D_1 \times D_2$.

3°. Cuando A' y B' encierran tres letras a, b, c.

Ordenados los dos polinomios relativamente á a, se determina ante todo el *m. c. d.* independiente de a, lo que se verifica aplicando á los coeficientes de las diversas potencias de a, en ambos polinomios, el procedimiento del núm. 247 y la regla del caso segundo, puesto que estos coeficientes polinomios no encierran mas que las dos letras b, c.

Puesto así en evidencia el polinomio independiente D_2, *y suprimidos en* A' *y* B' *los factores* A_2 *y* B_2 *que son los que lo han dado*, resultan dos polinomios A'' y B'' cuyos coeficientes son *primeros entre sí*, y á los cuales, por consiguiente, es aplicable lo dicho en los dos casos precedentes.

Y así sucesivamente.

Aconsejamos á los jóvenes que se penetren bien del espíritu del procedimiento anterior.

Hagamos ahora su aplicacion á algunos ejemplos.

257. Sean los dos polinomios

$$a^2 d^2 - c^2 d^2 - a^2 c^2 + c^4 \text{ y } 4a^2 d - 2ac^2 + 2c^3 - 4acd.$$

El segundo polinomio es el único que encierra un factor monomio: este factor es 2. Suprimiéndolo y ordenándolo relativamente á d, se obtienen las dos nuevas espresiones

$$(a^2 - c^2)\, d^2 - a^2 c^2 + c^4 \text{ y } (2a^2 - 2ac)\, d - ac^2 + c^3.$$

Es preciso primeramente proceder á encontrar el comun divisor independiente de la letra d.

Si se consideran pues los coeficientes $a^2 - c^2$ y $-a^2 c^2 + c^4$, del primer polinomio, se observa que $-a^2 c^2 + c^4$ puede ponerse bajo la forma $-a^2 (a^2 - c^2)$, por lo que se ve que $a^2 - c^2$ es factor comun entre los dos coeficientes del primer polinomio. Así tambien los coeficientes

del segundo, $2a^2 - 2ac$ y $-ac^2 + c^3$, se convierten en $2a(a-c)$ y $-c^3(a-c)$; luego $a-c$ es factor comun entre estos coeficientes.

Comparemos ahora los dos factores $a^2 - c^2$ y $a - c$. Como este último divide al otro, se sigue que $a-c$ es un factor comun á los dos polinomios propuestos; y este *es el mayor divisor comun independiente de d*.

Suprimamos ademas $a^2 - c^2$ en el primer polinomio, y $a - c$ en el segundo; se obtiene para los resultados de esta supresion, $d^2 - c^2$ y $2ad - c^2$, polinomios á los que es preciso aplicar el procedimiento ordinario

$$\left.\begin{array}{r} d^2 - c^2 \\ 4a^2 d^2 - 4a^2 c^2 \\ \hline +2ac^2 d - 4a^2 c^2 \\ \hline -4a^2 c^2 + c^4 \end{array}\right\} \frac{2ad - c^2}{2ad + c^2}$$

Esplicacion. Despues de haber multiplicado el dividendo por $4a^2$, y efectuado dos divisiones consecutivas, se obtiene para resta $-4a^2 c^2 + c^4$, polinomio independiente de la letra principal d; luego los dos polinomios $d^2 - c^2$ y $2ad - c^2$ son *primeros entre sí*. De esta manera el máximo comun divisor de los polinomios propuestos es $a - c$.

Volvamos al ejemplo, ordenando relativamente á a; se tendrá, despues de la supresion del factor 2 en el segundo polinomio,

$$(d^2 - c^2)\, a^2 - c^2 d^2 + c^4 \text{ y } 2da^2 - (2cd + c^2)\, a + c^3.$$

Pasando los ojos sobre el segundo polinomio se conoce al momento que los coeficientes de las diferentes potencias de a son primeros entre sí. En cuanto al primer polinomio, se observa que el coeficiente $-c^2 d^2 + c^4$, del segundo término ó de a^0, equivale á $-c^2(d^2 - c^2)$; de donde se sigue que $d^2 - c^2$ es factor comun á los dos coeficientes; y como este factor no entra en el segundo polinomio, se le puede suprimir en el primero, sin hacer cuenta de él, pues que no forma parte del comun divisor.

Operando esta supresion, tomando luego el segundo polinomio por dividendo y el primero por divisor (para evitar la preparacion), se tiene

$$1^{\circ}. \quad \left.\begin{array}{r|l} 2da^2 - 2cd & a + c^3 \\ -c^2 & \\ \hline \text{resta. } \ldots\ldots -2cd & a + 2dc^2, \\ -c^2 & +c^3 \end{array}\right\} \frac{a^2 - c^2}{2d}$$

ó bien, . . . $a - c$,

(suprimiendo el factor comun $-2cd-c^2$);

2°.
$$\begin{array}{l|l} a^2-c^2 & a-c \\ \hline +ac-c^2 & a+c \\ \hline 0 & \end{array}$$

Esplicacion. Despues de haber efectuado la primera division, se obtiene una resta que encierra el factor $-2cd-c^2$ en estos dos coeficientes; porque $2dc^3+c^3=-c\,(-2cd-c^2$. Suprimido este factor, la resta se reduce á $a-c$, polinomio que divide exactamente á a^2-c^2.

Luego $a-c$ es el mayor divisor comun buscado.

Los principiantes deben tomar el mismo ejemplo, ordenando con relacion á c.

258. Existe un caso bastante notable, en el cual se puede obtener el máximo comun divisor mucho mas fácilmente que por el procedimiento general; y es aquel en que *uno de los dos polinomios encierra una letra que no se encuentra en el otro.*

En este caso, como es evidente que el mayor divisor comun debe ser *independiente* de esta letra, se sigue que, si se ordena con relacion á la misma el polinomio que la encierra, *el máximo comun divisor buscado será el mismo que existe entre los coeficientes de las diversas potencias de la letra ordenatriz y el segundo polinomio, el cual por hipótesis es independiente de ella.*

Verdad es que por este medio nos veríamos obligados á determinar el mayor divisor comun entre tres ó mas polinomios; pero estos serán mucho mas simples que los dos polinomios propuestos.

Sucede tambien con frecuencia que algunos de los coeficientes del polinomio ordenado son monomios; ó bien se reconoce, por su sola inspeccion, que son primeros entre sí; y en este caso se está cierto de que los polinomios propuestos lo son tambien. Así en el ejemplo del número 257, tratado por el primer medio, despues de suprimido el factor $a-c$ comun á los dos polinomios, lo que ha dado por resultados

$$d^2-c^2 \text{ y } 2ad-c^2,$$

se reconoce inmediatamente que estos dos nuevos polinomios son primeros entre sí; porque encerrando el segundo la letra a que no entra en el primero, resulta, segun lo dicho, que el máximo comun divisor debe encontrarse entre los coeficientes $2d$ y $-c^2$; pero estas dos cantidades son evidentemente primeras entre sí; luego, etc.;

Como aplicacion del caso que examinamos, sean los dos polinomios

$$3bcq+30mp+18bc+5mpq,$$

y

$$4adq-42fg+24ad-7fgq.$$

Como q es la única letra comun á estos dos polinomios (que no contienen por otra parte factores monomios), se los podria ordenar relativamente á esta letra, y seguir el procedimiento ordinario. Pero observemos que b se encuentra en el primer polinomio y no en el segundo; luego si se ordena el primero con relacion á b, lo cual da

$$(3cq+18c)\,b+30mp+5mpq,$$

se puede asegurar que el *m. c. d.* buscado es el mismo que el que existe entre el segundo polinomio y los dos coeficientes

$$3cq+18c,\ 30mp+5mpq.$$

Pero el primero de estos dos coeficientes puede ponerse en la forma $3c(q+6)$, y el otro se convierte en $5mp(q+6)$; de donde se sigue que $q+6$ es el único factor comun á estos dos coeficientes. Basta entónces ver si $q+6$, que es un divisor *primero*, es factor del segundo polinomio.

Pero este polinomio, ordenado con relacion á q, equivale á

$$(4ad-7fg)\,q-42fg+24ad;$$

y como la segunda parte $24ad-42fg$ es igual á $6(4ad-7fg)$, síguese que este polinomio es divisible por $q+6$, y da por cociente $4ad-7fg$.

Luego en fin, $q+6$ es el mayor comun divisor de los dos polinomios propuestos.

259. Terminaremos esta teoría con la relacion entre el procedimiento del máximo comun divisor *relativo* y el del máximo comun divisor *ordinario*, tratando sucesivamente por los dos procedimientos un ejemplo en el cual son los dos polinomios, no solo enteros con relacion á x, sino tambien con relacion á los demas números que entran en ellos; porque en lo sucesivo tendremos ocasion de operar sobre diversos ejemplos de este género.

Sean propuestos los dos polinomios

$$6x^5-4x^4-11x^3-3x-1,$$

y

$$4x+2x^5-18x^2+5x-5.$$

Cuadro de los cálculos por el procedimiento del *m. c. d.* relativo.

1°. $$\begin{array}{l|l} 6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1 & 4x^4+2x^3-18x^2+3x-5 \\ \hline -7x^4+16x^3-\frac{15}{2}x^2+\frac{9}{2}x-1 & \frac{3}{2}x-\frac{7}{4} \\ \hline +\frac{39}{2}x^3-39x^2+\frac{39}{4}x-\frac{39}{4}. & \end{array}$$

2°. $$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3-18x^2+3x-5 & \frac{39}{2}x^3-39x^2+\frac{39}{4}x-\frac{39}{4} \\ \hline +10x^3-20x^2+5x-5 & \\ \hline 0 & \frac{8}{39}x+\frac{20}{39}. \end{array}$$

Luego $\frac{39}{2}x^3-39x^2+\frac{39}{4}x-\frac{39}{4}$ es el *m. c. d.*

Cuadro de las operaciones por el método ordinario.

1°. Multiplicacion por 16.

$$\begin{array}{l|l} 96x^5-64x^4-176x^3-48x^2-48x-16 & 4x^4+2x^3-18x^2+3x-5 \\ \hline -112x^4+256x^3-120x^2+72x-16 & 24x-28. \end{array}$$

Resta $+312x^3-624x^2+156x-156$;

ó bien, $2x^3-4x^2+x-1$.

2°. $$\begin{array}{l|l} 4x^4+2x^3-18x^2+3x-5 & 2x^3-4x^2+x-1 \\ \hline +10x^3-20x^2+5x-5 & 2x+5. \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego $2x^3-4x^2+x-1$ es el *m. c. d*

Aplicando el procedimiento del número 246 sin hacer ninguna preparacion, se llega, como se ve en el primer cuadro, al resultado

$$\frac{39}{2}x^3-39x^3+\frac{39}{4}x-\frac{39}{4};$$

miéntras que si se sigue el procedimiento del número 256 con todas sus modificaciones, se obtiene

$$2x^3-4x^2+x-1$$

para el máximo comun divisor de los dos polinomios.

Este resultado no difiere, pues, del precedente sino por el factor $\frac{39}{4}$, que es comun á todos los términos de este, y que se puede poner en evidencia.

Por donde se ve que el efecto producido por la aplicacion del procedimiento *sin preparacion*, es el de dar el *comun divisor ordinario* que existe entre los dos polinomios (que se suponen *racionales y enteros*) alterado con *factores estraños*, aunque *independientes* de la letra principal.

Ahora bien; como iremos viendo, el principal objeto que se lleva en la determinacion del máximo comun divisor de dos funciones enteras, es el de igualarle á 0 para sacar de él los valores de la letra principal : concibese pues, que la introduccion de estos factores estraños en el resultado no puede de modo alguno influir sobre las raíces de la ecuacion obtenida, porque siendo estos factores independientes de la letra principal, pueden siempre suprimirse en esta ecuacion.

De suerte que es del todo indiferente en este caso emplear ó no las modificaciones; y cuando se las utiliza es solo con la idea de simplificar los cálculos.

Aconsejaremos tambien aplicar ambos procedimientos á los ejemplos siguientes :

1°. $$\begin{cases} x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9, \\ 6x^5+20x^4-12x^5-48x^2+22x+12; \end{cases}$$

m. c. d. simplificado $=x^3+x^2-5x+3$.

2° $$\begin{cases} 20x^6-12x^5+16x^4-15x^3+14x^2-15x+4, \\ 15x^4-9x^3+45x^2-21x+28; \end{cases}$$

m. c. d. simplificado $=5x^2-3x+4$.