II. TRANSFORMACIONES DE LAS ECUACIONES. — PRIMERA PARTE DE LA ELIMINACION.

Nos proponemos reunir en este párrafo las principales transformaciones que se dirigen á referir la resolucion de una ecuacion dada á la de otra ecuacion mas fácil de tratar.

260. Primera transformacion. *Desvanecimiento del segundo término de toda ecuacion.*

Se concebirá que una ecuacion de un grado dado es tanto mas fácil de resolver, cuanto ménos potencias de la incógnita encierra; así es como la ecuacion $x^2=q$ da al momento $x=\pm\sqrt{q}$, miéntras que la ecuacion completa $x^2+px=q$ necesita una preparacion para ser resuelta.

Dada, pues, una ecuacion cualquiera, se puede siempre por medio de una transformacion conveniente, referir su resolucion á la de otra ecuacion privada de segundo término.

Sea en efecto la ecuacion general

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0.$$

Supongamos $x=u+x'$, siendo u una nueva incógnita, y x' una *indeterminada* de que podemos disponer á voluntad: sale

$$(u+x')^m+P(u+x')^{m-1}+Q(u+x')^{m-2}+\ldots+T(u+x')+U=0,$$

ó, desarrollando segun la fórmula del binomio, y ordenando con relacion á las potencias decrecientes de u,

$$\left.\begin{array}{l|l} u^m+mx'u^{m-1}+m.\dfrac{m-1}{2}x'^2 & u^{m-2}+\ldots+x'^m \\ +P \qquad +(m-1)Px' & +Px'^{m-1} \\ \qquad\qquad +Q & +Qx'^{m-2} \\ & +\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +Tx' \\ & +U \end{array}\right\}=0.$$

Como x' es arbitrario, podemos suponer $mx'+P=0$, de donde se saca $x'=-\dfrac{P}{m}$.

Llevando este valor á la ecuacion precedente, se llegará, hecho el cálculo, á una *transformada* tal como

$$u^m+Q'u^{m-2}+R'u^{m-2}+\ldots+T'u+U'=0,$$

privada de segundo término. Una vez resuelta esta ecuacion, se obtendrán los valores de x que corresponden á los valores de u, reemplazando, en la relacion $x=u+x'$, ó $x=u-\dfrac{P}{m}$, la letra u por cada uno de sus valores.

De donde puede concluirse esta regla general:

Para hacer desaparecer el segundo término de una ecuacion *reemplácese la incógnita por otra nueva, aumentada del coeficiente del segundo término tomado con signo contrario y dividido por el esponente de la ecuacion.*

Es fácil reconocer *a posteriori* que esta sustitucion debe realizar el objeto propuesto.

En efecto, sean $a, b, c, d,\ldots$ las m raices de la ecuacion dada, resulta de la relacion $x=u-\dfrac{P}{m}$, que da $u=x+\dfrac{P}{m}$, que los valores de u son

$$u=a+\frac{P}{m},\ b+\frac{P}{m},\ c+\frac{P}{m},\ d+\frac{P}{m},\ldots;$$

la suma de las nuevas raíces es, pues,

$$a+b+c+d+\ldots+m.\frac{P}{m};$$

pero se tiene (núm. 242) $a+b+c+d+\ldots=-P$; de modo que la suma precedente se reduce á $-P+P$, ó á 0; y el coeficiente del segundo término de la *transformada* debe de ser *nulo* por sí mismo.

Nota. Hemos supuesto el coeficiente del primer término de la ecuacion igual á la unidad; pero si la ecuacion tuviese la forma

$$Ax^m+Px^{m-1}+\ldots+Tx+U=0,$$

suponiendo $x=u+x'$, se obtendria para el coeficiente de u^{m-1},

$$mAx'+P,$$

espresion qne igualada á 0, daria $x'=-\dfrac{P}{mA}$;

luego el denominador del valor de x' seria entónces el *producto del índice de la ecuacion por el coeficiente* A *del primer término.*

Apliquemos la regla precedente á la ecuacion

$$x'+px=q.$$

Si se supone $x=u-\frac{p}{2}$, sale $\left(u-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(u-\frac{p}{2}\right)=q$,

ó efectuando los cálculos y reduciendo,

$$u^2-\frac{p^2}{4}=q\text{; luego } u=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q};$$

y por consiguiente, se obtiene para los dos valores de x

correspondientes, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$.

261. En lugar de hacer desaparecer el segundo término, se puede exigir que la ecuacion se halle privada del tercero, del cuarto... bastando para esto igualar á 0 el coeficiente de u_{m-2}, u^{m-3}.... Por ejemplo, para desvanecer el tercer término, se supondrá en la ecuacion ántes transformada

$$m.\frac{m-1}{2}\,x'^2+(m-1)\,Px'+Q=0,$$

de donde se deducirán para x' dos valores, cada uno de los cuales sustituido en la transformada, la reducirá á la forma

$$u^m+P'u^{m-1}+R'u^{m-3}+\ldots+Tx'+U=0.$$

Mas allá del tercer término seria preciso resolver ecuaciones de grado superior al segundo para obtener el valor de x'; así para operar la desaparicion del último término, se tendria que resolver la ecuacion

$$x'^m+Px'^{m-1}+\ldots+Tx'+U=0,$$

que no es otra cosa que la propuesta en la cual se ha reemplazado x por x'.

Puede suceder que el valor $x'=-\frac{P}{m}$, que (núm. 260) hace desaparecer el segundo término, dé igualmente lugar á la desaparicion del tercero ó de cualquier otro término. Por ejemplo, para que desapa-

rezcan á la vez el segundo y tercer término, es preciso que la ecuacion $x'=-\frac{P}{m}$ pueda conciliarse con esta:

$$m.\frac{m-1}{2}\,x'^2+(m-1)\,Px'+Q=0.$$

Ahora bien; si se reemplaza en esta última, x' por $-\frac{P}{m}$, sale

$$m.\frac{m-1}{2}\cdot\frac{P^2}{m^2}-(m-1).\frac{P^2}{m}+Q=0\text{, ó } (m-1)\,P^2-2mQ=0.$$

Así que siempre que exista esta *relacion* entre los dos coeficientes P y Q, la desaparicion del segundo término dará lugar á la del tercero.

262. *Observacion sobre la transformacion precedente.* LEY DE FORMACION DE LOS POLINOMIOS DERIVADOS.

La relacion $x=u+x'$, de que nos hemos servido en los dos números que preceden, indica que las raíces de la transformada son iguales á las de la propuesta, disminuidas ó aumentadas en una misma cantidad. Tan pronto como se introduce esta cantidad en el cálculo, como una indeterminada cuyo valor se fija en seguida de modo que llene una condicion dada; es un número particular y dado *a priori*, el cual espresa una *diferencia constante* entre las raíces de la primera ecuacion y las de otra ecuacion que se quiere formar.

La transformacion que consiste en reemplazar x por $u+x'$ en una ecuacion, es de un uso muy frecuente en la teoría de las ecuaciones. Existe, sin embargo, un medio bastante sencillo de obtener en la práctica la transformada que resulta de esta sustitucion.

Para ello invirtamos el órden de los términos en $u+x'$; es decir, reemplacemos x por $x'+u$ en la ecuacion

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots+Tx+U=0,$$

desarrollando y ordenando con relacion á las potencias ascendentes de u, se encuentra

$$\begin{array}{l|l|l}
x'^m+mx'^{m-1} & u+m\,\frac{m-1}{2}\,x^{m-2} & u^2+\ldots u^m=0 \\
+Px'^{m-1}+(m-1)Px'^{m-2} & +(m-1)\,\frac{(m-2)}{2}\,Px'^{m-3} & \\
+Qx'^{m-2}+(m-2)Qx'^{m-3} & +(m-2)\,\frac{(m-3)}{2}\,Qx'^{m-4} & \\
+\ldots\ldots & +\ldots\ldots & \\
+1x' \quad +T & & \\
+U & &
\end{array}$$

Si se fija la atencion en la manera como se hallan compuestos los coeficientes de las diversas potencias de u, se verá que

1°. *El coeficiente de* u^0 *no es mas que el primer miembro de la propuesta, en la cual se ha reemplazado* x *por* x'.

En adelante designaremos este coeficiente por X'.

2°. *El coeficiente de* u' *se forma por medio del precedente ó de* X', *multiplicando cada uno de los términos de* X' *por el esponente de* x' *en este término, y disminuyendo este esponente en una unidad*: llamaremos Y' á este coeficiente.

3°. *El coeficiente de* u^2 *se forma por medio de* Y', *multiplicando cada uno de los términos de* Y' *por el esponente de* x' *en este término, dividiendo el producto por* 2, *y disminuyendo en seguida el esponente de* x' *en una unidad*. Si se llama $\frac{Z'}{2}$ este coeficiente, es claro que Z' se forma por medio de Y', así como Y' se forma por medio de X'; y así sucesivamente.

En general *un coeficiente de cualquier órden, en la transformacion anterior, se forma por medio del precedente, multiplicando cada uno de los términos de este por el esponente de* x' *en cada término, dividiendo el producto por el número de los coeficientes que preceden al que se considera, y disminuyendo en seguida el esponente* x' *en una unidad.*

Esta ley, segun la cual los coeficientes X', Y', $\frac{Z'}{2}$, $\frac{V'}{2.\,3}$,..... se derivan los unos de los otros, es evidentemente una consecuencia inmediata de la que rige los diferentes términos de la fórmula del binomio. (Véase el núm. 149).

Las espresiones Y', Z', V', W',... se llaman los *polinomios derivados* de X', porque Z' se deduce ó *deriva de* Y' como Y' se deriva de X'; V' se deriva de Z' como Z' se deriva de Y';... y asi sucesivamente. Y' se llama el *primer polinomio derivado*, Z' el *segundo*,... recordemos ademas que X' no es mas que el primer miembro de la propuesta, en la cual se ha reemplazado x por x'.

Nota. Hemos supuesto el coeficiente del primer término de la propuesta igual á 1; si fuese otro, la ley de formacion de los coeficientes de la transformada seria absolutamente la misma; y el coeficiente de u^m seria igual al de x^m.

263. Para hacer conocer el uso de esta ley en la práctica, propongámonos desvanecer el coeficiente del segundo término de la ecuacion

$$x^4-12x^3+17x^2-9x+7=0.$$

Segun la regla núm. 260, es preciso suponer $x=u+\frac{12}{4}$ ó $x=3+u$, lo que dará una transformada del cuarto grado de la forma

$$X'+Y'u+\frac{Z'}{2}u^2+\frac{V'}{2.\,3}u^3+u^4=0;$$

y todo se reduce á calcular X', Y', $\frac{Z'}{2}$, $\frac{V'}{2.\,3}$.

Pero se tiene en virtud de la ley precedente,

$X'=(3)^4-12.(3)^3+17.(3)^2-9.(3)^1+7$, ó $X'=-110$;
$Y'=4.(3)^3-36.(3)^2+34.(3)^1-9$. . . . ó $Y'=-123$;
$\frac{Z}{2}=6.(3)^2-36.(3)^1+17$. . . . . $\frac{Z'}{2}=-37$;
$\frac{V'}{2.\,3}=4.(3)^1-12$ . . . . . $\frac{V'}{2.\,3}=0$.

Así la transformada se convierte en $u^4-37u^2-123u-110=0$.

Propóngase tambien transformar la ecuacion

$$4x^3-5x^2+7x-9=0,$$

en otra cuyas raíces escedan la *unidad* á cada una de las raíces de la propuesta.

Pongamos la relacion $u=x+1$; resultará $x=u-1$, lo que da la transformada $X'+Y'u+\frac{Z'}{2}u^2+4u^3=0$,

$X'=4.(-1)^3-5.(-1)^2+7.(-1)^1-9$, ó bien $X'=-25$;
$Y'=12.(-1)^2-10.(-1)^1+7$. . . . . $Y'=29$;
$\frac{Z'}{2}=12.(-1)^1-5$ . . . . . $\frac{Z'}{2}=-17$;
$\frac{V'}{2.\,3}=4$ . . . . . $\frac{V'}{2.\,3}=4$

Así la transformada se convierte en $4u^3-17u^2+29u-25=0$

Hacer desaparecer el segundo término en las ecuaciones.

1°. $x^5-10x^4+7x^3+4x-9=0.$

(*Resultado :* $u^5-32u^3-118u^2-152u-73=0.$)

2°. $3x^3+15x^2+25x-3=0.$

(*Resultado :* $3u^3-\frac{152}{9}=0.$) [Véase el núm. 261.]

Transformar la ecuacion $3x^5-13x^3+7x^2-8x-9=0$ en otra cuyas raíces sean menores que cada de las raíces de la propuesta, en la fraccion $\frac{1}{3}$.

(*Resultado :* $3u^5-9u^3-4u^2-\frac{65}{9}u-\frac{34}{3}=0.$)

Tendremos muchas veces ocasion de recordar la ley de formacion de los *polinomios derivados.*

264. Estos polinomios gozan de una propiedad muy notable que podemos dar á conocer desde ahora.

Sean X ó $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots=0$ una ecuacion propuesta, y $a, b, c, \ldots l$, las m raíces de esta ecuacion; se tendrá (núm. 254) la ecuacion idéntica.

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

Sustituyendo á x por $x'+u$, ó mejor, por $x+u$ por evitar acentos, sale

$$(x+u)^m+P(x+u)^{m-1}+\ldots=(x+u-a)(x+u-b)\ldots,$$

ó bien, cambiando en el segundo miembro el órden de los términos, y mirando á cada uno de los binomios $x-a$, $x-b$,... como una sola cantidad.

$$(x+u)^m+P(x+u)^{m-1}+\ldots=(u+\overline{x-a})(u+\overline{x-b})\ldots(u+\overline{x-l.})$$

Ahora bien; si se efectúan las multiplicaciones en cada uno de los dos miembros, se obtendrá necesariamente para el primero, en virtud de lo que dijimos en el núm. precedente,

$$X+Y\,u+\frac{Z}{2}u^2+\ldots+u^m,$$

Siendo X el primer miembro de la propuesta, y Y, Z... los polinomios derivados de este primer miembro.

En cuanto al segundo resulta del núm. 242, que

1°. La parte afectada de u^0, ó el último término, es igual al producto $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$ de los factores de la propuesta.

2°. El coeficiente de u^1 es igual á la suma de los productos $m-2$ a $m-2$ de estos m factores; y así sucesivamente.

Ademas hay identidad entre los dos miembros de la última ecuacion; lo cual quiere decir (núm. 180) que los coeficientes de las mismas potencias son iguales en estos dos miembros.

Así, 1°.... se tiene $X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)$, lo que se sabia ya.

2°.... Y, ó el primer polinomio derivado, *es igual á la suma de los productos* m—1 *á* m—1 *de los* m *factores del primer grado de la propuesta;* ó bien, *igual á la suma de los cocientes que se obtienen dividiendo* X *por cada uno de los* m *factores de primer grado de la propuesta;* es decir, algebráicamente,

$$Y=\frac{X}{x-a}+\frac{X}{x-b}+\frac{X}{x-c}+\ldots+\frac{X}{x-l}.$$

3°.... $\frac{Z}{2}$ ó el segundo polinomio derivado (tomado con el divisor 2) es igual á la suma de los productos $m-2$ á $m-2$ de los m factores de la propuesta; ó bien, igual á la suma de los cocientes que se obtienen dividiendo X por cada uno de los factores del segundo grado; es decir

$$\frac{Z}{2}=\frac{X}{(x-a)(x-b)}+\frac{X}{(x-a)(x-c)}+\ldots+\frac{X}{(x-k)(x-l)}.$$

Nota. Algunas veces se representa una ecuacion por

$$f(x)=0,$$

y los polinomios derivados por $f'(x)$, $f^{ll}(x)$, $f'''(x)$,...; las espresiones

$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,... se enuncian entónces *funcion* de x, *funcion prima* de x, *funcion segunda* de x, *funcion tercera* de x, y así sucesivamente.

Pero nosotros haremos poco uso de estas anotaciones.

265. SEGUNDA TRANSFORMACION. Hacer desaparecer los *denominadores de una ecuacion.*

Dada una ecuacion, se la puede siempre transformar en otra cuyas raices sean iguales á *un múltiplo* ó á *un submúltiplo dado*, de las de la propuesta.

Tomemos otra vez la ecuacion $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0$; y designemos por y la incógnita de una nueva ecuacion cuyas raices sean k veces mayores que las de la propuesta. Si se supone $y=kx$, resulta $x=\frac{y}{k}$; de donde, sustituyendo y quitando el denominador k^m del primer término,

$$y^m+Pky^{m-1}+Qk^2\,y^{m-2}+Rk^3\,y^{m-3}+\ldots+Tk^{m-1}y+Uk^m=0,$$

ecuacion cuyos coeficientes son iguales á los de la propuesta, multiplicados respectivamente por k^0, k^1, k^2, k^3,...., k^m.

Esta transformacion es principalmente útil para hacer desaparecer los denominadores de una ecuacion sin dar al primer término otro coeficiente que la unidad.

Sea, para fijar las ideas, la ecuacion del cuarto grado,

$$x^4+\frac{a}{b}x^3+\frac{c}{d}x^2+\frac{e}{f}x+\frac{g}{h}=0.$$

Si se hace en esta ecuacion, $x=\frac{y}{k}$, siendo y una nueva incógnita y k una indeterminada, sale

$$y^4+\frac{ak}{b}y^3+\frac{ck^2}{d}y^2+\frac{ek^3}{f}y+\frac{gk^0}{h}=0.$$

Sentado esto, pueden suceder dos cosas:

O los denominadores b, d, f, h, son primeros entre sí: en esta hipótesis, como k es del todo arbitrario, hagamos $k=bdfh$, *producto de estos denominadores;* sale

$$y^4+adfh.\,y^3+cb^2\,df^2\,h^2.\,y^2+eb^3\,d^3\,f^2\,h^3.\,y+gb^4\,d^4\,f^4\,h^3=0,$$

ecuacion cuyos coeficientes son enteros, y cuyo primer término tiene por coeficiente la unidad.

Se tiene, ademas, para determinar los valores de x que corresponden á los valores de y, la relacion $x=\frac{y}{bdfh}$.

O bien los denominadores encierran factores comunes; y en este caso se lograrán coeficientes enteros tomando para k el *menor múltiplo* de todos los denominadores.

Pero se puede aun simplificar mas, observando que todo se reduce á determinar k, de modo que k', k^2, k^3,... contengan los factores primeros que componen á b, d, f, h, en potencias por lo ménos iguales á las que entran en estos diferentes denominadores.

Sea por ejemplo, la ecuacion $x^4-\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{12}x^2-\frac{7}{150}x-\frac{13}{9000}=0$

Sustituyamos $x=\frac{y}{k}$; sale $y^4-\frac{5k}{6}y^3+\frac{5k^2}{12}y^2-\frac{7k^3}{150}y-\frac{13k^4}{9000}=0.$

Hágase primeramente k igual á 9000, que es múltiplo de todos los otros denominadores; es claro que los coeficientes se convertirán en números enteros.

Pero si se descomponen 6, 12, 150 y 9000 en sus factores, se encuentra $6=2\times3$, $12=2^2\times3$, $150=2\times3\times5^2$, $9000=2^3\times3^2\times5^3$; y haciendo simplemente $k=2\times3\times5$, producto de los factores simples diferentes, se obtiene

$$k^2=2^2\times3^2\times5^2,\ k^3=2^3\times3^3\times5^2,\ k^4=2^4\times3^4\times5^4;$$

donde se ve que los valores de k, k^2, k^3, k^4, contienen los factores primeros 2, 3, 5, en potencias por lo ménos iguales á las que entran en 6, 12, 150 y 9000.

Luego la hipótesis $k-2\times3\times5=30$ basta para operar la desaparicion de los denominadores. Sale en efecto, por la sustitucion,

$$y^4-\frac{5.\,2.\,3.\,5.}{2.\,3}y^3+\frac{5.\,2^2.\,3^2.\,5^2}{2^2.\,3}y^2-\frac{7.\,2^3.\,3^3.\,5^3.}{2.\,3.\,5^2}y-\frac{13.\,2^4.\,3^4.\,5^4.}{2^3.\,3^2.\,5^3}=0,$$

ó, reduciendo, $y^4-5.\,5.\,y^3+5.\,3.\,5^2\,y^2-7.\,2^2.\,3^2.\,5\,y-13.\,2.\,3^2.\,5=0$, ó bien en fin, $y^4-25y^3+375y^2-1260y-1170=0$.

Hay circunstancias en que nos vemos obligados, en la espresion de k, á aumentar el esponente de uno de los factores primeros en una ó

muchas unidades. Pero se conocerá la necesidad de no tomar para k sino el menor número posible; de otro modo se obtendria una transformada cuyos coeficientes serian estremadamente grandes, como puede juzgarse calculando la transformada que resulta de la suposicion de $k=9000$ en la ecuacion precedente.

Hé aqui nuevas aplicaciones:

1°. $x^5-\frac{7}{3}x^2+\frac{11}{36}x-\frac{23}{72}=0$;

$x=\frac{y}{6}$, de donde $y^5-14y^3+11y-75=0$.

2°. $x^5-\frac{13}{12}x^4+\frac{21}{40}x^2-\frac{32}{225}x^2-\frac{43}{600}x+\frac{1}{800}=0$;

$x=\frac{y}{2^2.3.5}$, ó $x=\frac{y}{60}$,

de donde $y^5-65y^4+1890y^3-30720y^2-928800y+972000=0$.

266. Las transformaciones precedentes son las de uso mas frecuente. Hay tambien otras bastante usadas; pero como son sobrado simples para tratadas separadamente, no hablaremos de ellas sino cuando se presente coyuntura.

En general el problema de las transformaciones debe mirarse como una aplicacion del problema de la *eliminacion* entre dos ecuaciones de un grado cualquiera de dos incógnitas. En efecto, dada una ecuacion, supongamos que se la quiera transformar en otra cuyas raíces tengan con las de la propuesta una relacion determinada.

Designemos por $F(x)=0$ la ecuacion propuesta (se enuncia *funcion de* x *igual á* 0), y por $f(x,y)=0$ la espresion algebráica de la relacion que debe existir entre la primera incógnita, x, y la nueva, y; la cuestion se reduce á ver de obtener, por medio de estas dos ecuaciones una nueva ecuacion en y, que será entónces la ecuacion pedida. Cuando la incógnita x no entra mas que en el primer grado en $f(x,y)=0$, es fácil de obtener la transformada; pero si se eleva á la segunda, á la tercera,... potencia, es preciso recurrir á los métodos generales de eliminacion.

Daremos una idea de esta teoría que hace tan importante papel en el análisis algebráico.

ELIMINACION.— Primera parte.

267. *Eliminar, entre dos ecuaciones de un grado cualquiera con dos incógnitas, es llegar,* despues de una serie de operaciones ejecutadas sobre estas ecuaciones, *á una sola ecuacion que no encierra mas que una de las incógnitas*, y que da todos los valores de esta incógnita, propios para verificar las dos ecuaciones al mismo tiempo y con los valores correspondientes de la otra incógnita.

La ecuacion, *funcion de una de las incógnitas* á que se llega, se llama ECUACION FINAL; y los valores de la incógnita, sacados de esta ecuacion, *valores convenientes.*

Entre todos los métodos de eliminacion conocidos, *el método* por el máximo comun divisor es, en general, el mas espedito, y por lo mismo pasaremos á desarrollarlo.

Sean dos ecuaciones de un grado cualquiera con dos incógnitas

$$F(x,y)=0.\ f(x,y)=0,$$

ó mas simplemente todavía,

$$A=0,\ B=0$$

Supongamos obtenida la *ecuacion final* en y, y procuremos reconocer alguna propiedad de las raíces de esta ecuacion, que pueda servirnos para formarla.

Sea $y=\beta$ uno de los *valores convenientes* de y. Como este valor *verifica* las dos ecuaciones juntamente con cierto valor de x, debe ser tal, que si se le sustituye á la vez en ambas ecuaciones, las que no contendrán ya entónces la incógnita y, *admitan* estas ecuaciones al ménos un valor comun para x; debiendo necesariamente (número 237) corresponder á este valor comun, un comun divisor en x, el cual será de primer grado en x ó de otro superior segun que correspondan al valor particular $y=\beta$ uno ó muchos valores de x.

Recíprocamente: *todo valor* de y, que, sustituido en las dos ecuaciones, les da un comun divisor en x, *es necesariamente un valor conveniente;* porque entónces verifica evidentemente las dos ecuaciones al mismo tiempo que el valor ó valores de x sacados de este comun divisor igualado á 0.

268. Observemos ademas que ántes de cualquier sustitucion los