primeros miembros de las ecuaciones no pueden tener comun divisor, funcion de las dos incógnitas ó de una de ellas solamente, á ménos de ser indeterminadas las ecuaciones, lo que no se supone.

Admitamos en efecto por un instante, que las ecuaciones A=0, B=0, sean de la forma

$$A' \times D = 0. \quad B' \times D = 0,$$

siendo D funcion de x y de y.

Suponiendo aisladamente D=0, se obtiene una sola ecuacion de dos incógnitas, que puede satisfacerse por una *infinidad de sistemas de valores*. Ademas, todo sistema que destruya á D hace igualmente *nulos* á A'D, y B'D, y satisface por consiguiente á las ecuaciones

$$A=0, \quad B=0.$$

De modo que la hipótesis de la existencia de un comun divisor en x é y entre los dos polinomios A y B lleva la consecuencia de que las ecuaciones propuestas son *indeterminadas*, es decir, susceptibles de satisfacerse por una infinidad de sistemas de valores de x y de y. Desde este momento no hay ya lugar á determinar una *ecuacion final* en y, puesto que es *infinito* el número de los valores de y.

Si D fuese funcion de x solamente, se concebiria la ecuacion D=0 resuelta con relacion á x; lo que daria uno ó muchos valores para esta incógnita. Cada uno de estos valores, sustituido en $A' \times D = 0$ y $B' \times D = 0$ al mismo tiempo que un valor de y enteramente arbitrario, *verificaria* estas dos ecuaciones, pues que D se hace nulo por efecto solo de la sustitucion del valor de x. Así que en este caso las dos ecuaciones propuestas admitirian sin duda *un número finito* de valores para x, pero *una infinidad de valores* para y; y entónces no podria existir ecuacion final en y.

Luego siempre que sean *determinadas* dos ecuaciones A=0, B=0, es decir, siempre que no admitan mas que un *número limitado* de sistemas de valores para x é y, sus primeros miembros no podrán tener comun divisor funcion de las incógnitas, ántes de alguna sustitucion particular hecha para una de ellas.

Nota. El caso en que A y B tuviesen un divisor comun en y no hace escepcion á la consecuencia precedente, porque entónces habria una infinidad de valores de x que corresponderian á cada uno de los valores de y sacados de este comun divisor igualado á 0.

269. De aquí es fácil concluir un procedimiento para obtener la *ecuacion final* en y.

Como la propiedad característica de todo valor *conveniente* de y es la

de que sustituido en los primeros miembros de las dos ecuaciones les da un comun divisor en x que ántes no tenian (á ménos de que las ecuaciones no sean indeterminadas, lo que no se supone), se sigue que *si se aplica á los dos polinomios propuestos y ordenados relativamente á* x *el procedimiento para hallar el máximo comun divisor, no se le encontrará generalmente; si bien continuando la operacion convenientemente se llegará á una resta independiente de* x *y funcion de* y, que, *igualada á* 0 *dará la ecuacion final pedida*; porque todo valor de y, sacado de esta ecuacion, hace nula la última resta de la operacion del comun divisor: es, pues, tal que sustituido en la resta precedente hace á esta resta divisor comun de los primeros miembros A y B. De este modo cada una de las raíces de la ecuacion así formada es un valor conveniente de y.

270. Admitiendo que la ecuacion final se hallase completamente resuelta, lo que daria todos los valores convenientes, seria preciso en seguida obtener los valores correspondientes de x. Ahora bien; es evidente que para esto bastaria *sustituir los diferentes valores de* y *en la penúltima resta, igualar sucesivamente á* 0 *los polinomios en* x *que resultasen y sacar los valores de* x; porque estos polinomios no son mas que los divisores en x que se hacen comunes á A y B.

Pero como la ecuacion final es, por lo general, de un grado superior al segundo, nos vemos obligados á dejar para otro capítulo la segunda parte de la teoría de la eliminacion, que tiene por objeto *determinar todos los* sistemas *de valores propios para verificar dos ecuaciones de un grado cualquiera con dos incógnitas.*

Nos proponemos igualmente volver á tratar del método que acabamos de esponer, porque lleva consigo algunos inconvenientes que es preciso desvanecer. Pero lo que deseamos aquí principalmente es hacer ver cómo, *dadas dos ecuaciones de un grado cualquiera, se puede*, sin suponer la resolucion de ninguna ecuacion, *llegar á otra ecuacion que no encierre ya mas que una de las dos incógnitas que entran en las propuestas.*

271. Si se tuviesen tres ecuaciones (1), (2), (3), que encerrasen las incógnitas x, y y z, para obtener la ecuacion final en z, esto es, la ecuacion que admitiese todos los valores de la incógnita z, susceptibles de verificar las tres ecuaciones al mismo tiempo que ciertos valores de x y de y, seria necesario, mirando á y como conocido, eliminar x entre las ecuaciones (1) y (2), en seguida entre (1) y (3), segun el método del número 269, lo que conduciria á dos ecuaciones en y y x; á las cuales se aplicaria el mismo método para eliminar y.

Igual razonamiento para 4 ecuaciones de 4 incógnitas, etc.

Por ahora nos limitaremos á una sola aplicacion general del método de eliminacion.

272. Háyase propuesto el problema siguiente :

Dada una ecuacion del grado m *de una sola incógnita, se pide otra ecuacion cuyas raices sean una combinacion* DETERMINADA *de dos cualesquiera de las raices de la propuesta.*

Sea $$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Rx+U=0$$

la ecuacion propuesta; llamemos x', x'', x''',... las raíces de esta ecuacion, y designemos por u la incógnita de la ecuacion que se quiere formar.

Si consideramos dos cualesquiera de las raíces de la propuesta, por ejemplo x' y x'', se debe tener, por hipótesis,

(1) $$u=F(x',\ x'')$$

[la letra F, que se enuncia *funcion de...* espresa aquí cierto sistema de operaciones que es preciso efectuar sobre las dos raíces x' y x'' para obtener el valor de u].

Por otro lado, como x' y x'' son raíces de la ecuacion dada, se deben tener las dos relaciones

(2) $$x'^m+Px'^{m-1}+Qx'^{m-2}+\ldots+Tx'+U=0,$$
(3($$x''^m+Px''^{m-1}+Qx''^{m-2}+\ldots+Tx''+U=0.$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) pueden, pues, mirarse como las ecuaciones del problema; y siempre que sea conocida y definida la naturaleza de la combinacion ó *funcion*, espresada por la letra F, bastará eliminar x' y x'' entre estas tres ecuaciones.

La *ecuacion final* en u será la ecuacion pedida. En efecto, no encerrando ya el resultado ningun vestigio de las dos raíces particulares x' y x'', por haberlas eliminado, convendrá á todas las raíces x', x'', x''',..., y tendrá por consiguiente por raíz una combinacion (espresada por F) de dos raíces cualesquiera de la propuesta.

273. *Busquemos*, como caso particular de la cuestion precedente, *una ecuacion cuyas raices sean las* DIFERENCIAS *entre dos raíces cualesquiera de una ecuacion dada.* Esta es la que se llama ECUACION DE LAS DIFERENCIAS.

Solucion. Sean $x^m+Px_{m-1}+\ldots=0$ la ecuacion propuesta, x', x'', x''', sus m raíces; llamemos u el valor de cualquiera de las diferencias

$$x''-x',\ x'''-x',\ x'-x'',\ x'-x''',\ldots$$

Se tiene desde luego, en virtud del enunciado, esta primera relacion

(1) $$u=x''-x'.$$

Ademas, siendo x' y x'' raíces de la propuesta, deben satisfacerla, y dan por consecuencia

(2) $$x'^m+Px'^{m-1}+\ldots=0,$$
(3) $$x''^m+Px''^{m-1}+\ldots=0;$$

se trata (número 272) de eliminar x', x'', entre las ecuaciones (1), (2) y (3).

Pero como de la relacion (1) se deduce $x''=x'+u$, de donde sustituyendo en la ecuacion (3),

(4) $$x'+u)^m+P\,(x'+u)^{m-1}+\ldots=0,$$

se sigue que la cuestion se reduce á eliminar x' entre las ecuaciones (2) y (4).

Pero la ecuacion (4) desarrollada toma (núm. 263) la forma

$$X'+Y'u+\frac{Z'}{2}\,u^2+\ldots+u^m=0;$$

y si se observa que X' no es mas que

$$x'^m+Px'^{m-1}+\ldots,$$

espresion que debe ser nula segun la relacion (2), la ecuacion última, desembarazada del término X', y dividida en seguida por u, se reduce á

$$Y'+\frac{Z'}{2}u+\frac{V'}{2.3}u^2+\ldots+u^{m-1}=0.$$

Luego, en fin, la ecuacion buscada resulta de la eliminacion de x' entre las dos ecuaciones

$$Z'=0,$$

$$Y'+\frac{Z'}{2}u+\frac{V'}{2.3}u^2+\ldots+u^{m-1}=0.$$

De modo que, regla general. *Para formar la ecuacion de las diferencias de las raices de una ecuacion propuesta es preciso eliminar* x' *entre*

la ecuacion X'=0 que se deduce de la propuesta, reemplazando la x por x', *y la ecuacion que resulta de la sustitucion de* (x'+u) *en lugar de* x, despojada de antemano esta resultante de su último término X' y dividida en seguida por u.

Nota. 1°. En la práctica se acostumbra no poner el acento sobre la letra x, es decir que se elimina directamente x entre la propuesta $X=0$, ó $x^m+Px^{m-1}+\ldots=0$, y la ecuacion $Y+\frac{Z}{2}u+\ldots+u^{m-1}=0$, en la cual $Y, \frac{Z}{2}, \ldots$, están compuestos en x, como $Y' \frac{Z'}{2}, \ldots$ están compuestos en x'.

El resultado de la eliminacion es evidentemente el mismo.

2°. Despues de haber puesto en la ecuacion $X=0$, $x+u$ en lugar de x, lo cual da

$$X+Yu+\frac{Z}{2}u^2+\ldots+u^m=0,$$

se suprime el término X, por ser el primer miembro de la propuesta, y se obtiene una nueva ecuacion

$$Yu+\frac{Z}{2}u^2+\ldots+u^m=0,$$

cuyos términos son todos divisibles por u, ó lo que es lo mismo, que queda satisfecha por $u=0$. Y así debe ser, porque entre las diferencias de las raíces es preciso contar la que existe entre cada raiz y ella misma; luego si se suprime este factor u, la ecuacion no encierra entónces ya mas que las *diferencias entre cada una de las raices y todas las demas*. Estas serán, pues, las únicas diferencias que en lo sucesivo tendremos necesidad de considerar.

274. Supongamos que se haya de determinar la ecuacion *de las diferencias* de las raíces de la ecuacion $x^3-6x-7=0$.

Se tiene primeramente, en virtud de la ley de formacion (número 263),

$$X=x^3-6x-7,\ Y=3x^2-6,\ \frac{Z}{2}=3x,\ \frac{V}{2.3}=1;$$

lo cual da las dos ecuaciones

$$x^3-6x-7=0,$$
$$3x^2-6+3x.u+u^2=0,$$

entre las cuales es preciso eliminar x.

Si se aplica á estas dos ecuaciones el procedimiento del número 269, se tiene para la ecuacion final en u,

$$u^6-36u^4+324u^2+459=0.$$

Esta es la ecuacion *de las diferencias* de las raíces de la propuesta.

275. *Composicion y forma de la ecuacion de las diferencias.*

Se puede reconocer *a priori* para toda ecuacion del grado m, la forma y la composicion de la *ecuacion de las diferencias de las raices de esta ecuacion.*

Designemos siempre por x', x'', x''',... las raíces de la propuesta, por u cualquiera de las diferencias; y observemos que, si una de las diferencias es $x''-x'$, existe necesariamente otra, $x'-x''$, que no difiere de aquella sino en el signo; es decir que si α es un valor de u, $-\alpha$ es necesariamente otro; del mismo modo, si β es una raíz, $-\beta$ es otra, etc.

Luego el primer miembro de la ecuacion en u puede ponerse bajo la forma

$$(u-\alpha)(u+\alpha)(u-\beta)(u+\beta)(u-\gamma)(u+\gamma)\ldots=0;$$

ó multiplicando los factores dos á dos,

$$(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)(u^2-\gamma^2)\ldots=0.$$

Luego esta ecuacion es de grado par, y encierra solo potencias de grado par de la incógnita; es decir que es de la forma

$$u^{2n}+P'u^{2n-2}+Q'u^{2n-4}+\ldots+T'u^2+U'=0.$$

El grado $2n$ es ademas igual á $m(m-1)$, ó bien (núm. 146) al número de combinaciones dos á dos que pueden hacerse con un número m de letras.

Si en la ecuacion precedente se pone, para simplificar, $u^2=z$, se convierte en

$$z^n+P'z^{n-1}+Q'z^{n-2}+\ldots+T'z+U'=0,$$

ecuacion de un grado mitad $\left(n=m\frac{m-1}{2}\right)$, cuyas raíces son los *cuadrados de las diferencias* entre x', x'', x''',...;

Porque introduciendo en la relacion $u^2=z$ en lugar de u, sus diferentes valores, $x''-x'$, $x'''-x'$,..., se obtiene

$$z=(x''-x')^2,\ (x'''-x')^2,\ldots$$

La ecuacion en z, á que se ha llegado en el momento, se llama por esta razon *la ecuacion de los cuadrados de las diferencias*; y se la considera ordinariamente con preferencia á la ecuacion de las diferencias, por ser de un grado *mitad*.

De modo que en el ejemplo del número anterior la ecuacion de las diferencias es del 6º. grado, es decir, de un grado marcado por 3 (3—1), ó por 6. No contiene mas que potencias de grado par; y si se supone $u^2=z$, se convierte en

$$z^3-36z^2+324z+459=0,$$

ecuacion cuyas raíces son los *cuadrados de las diferencias de las raices de la propuesta.*

La ecuacion *de las diferencias* ó mas bien la ecuacion de *los cuadrados* de las diferencias nos será muy útil para lo sucesivo.

---

§ III. DE LAS ECUACIONES SUSCEPTIBLES DE REBAJAMIENTO.

Compréndense bajo este título todas las ecuaciones en las que dos ó mas raíces tienen entre sí relaciones particulares, porque en general se puede hacer depender la resolucion de estas ecuaciones de la de otras de *grado menor*. Tales son las ecuaciones que tienen raíces iguales; es decir cuyo primer miembro (núm. 240) contiene factores iguales.

Los métodos que se refieren á esta clase de ecuaciones se llaman *métodos de rebajamiento*, y deben considerarse hasta cierto punto como un ramo de la transformacion de las ecuaciones, puesto que el objeto general de esta teoría es el de reducir la resolucion de una ecuacion á la de otra mas simple.

Método de las raíces iguales.

276. Decir que una ecuacion tiene raíces iguales es decir (número 240) que su primer miembro tiene factores iguales; y desde entónces el primer polinomio derivado, que es (núm. 264) la suma de los productos $(m-1)$ en $(m-1)$ de los m factores contiene en cada una de sus partes al ménos una vez el factor que entra muchas veces en la propuesta. Luego *debe existir un comun divisor entre el primer miembro de la propuesta y su primer polinomio derivado.*

Pero ¿de qué modo se compone este comun divisor, por medio de los factores iguales de la propuesta? Eso es lo que tratamos ahora de examinar.

277. *Dada una ecuacion, se pide reconocer si tiene raices, iguales y en cuanto sea posible, determinar estas raices.*

Designemos por X el primer miembro de la ecuacion

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0;$$

supongamos que encierre n factores iguales á $x-a$, n' factores iguales á $x-b$, n'' factores iguales á $x-c,\ldots$, y que contenga ademas los factores simples $x-p$, $x-q$, $x-r,\ldots$; de modo que se tenga

$$X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}\ldots(x-p)(x-q)(x-r)\ldots$$

Si se considera Y, ó el polinomio derivado de X, hemos visto ya (núm. 264) que este polinomio es la *suma de los cocientes de la division de* X *por cada uno de los* m *factores del primer grado de la propuesta.* Ahora bien, como X encierra n factores iguales á $x-a$, se tendrán desde luego n cocientes parciales iguales á $\frac{X}{x-a}$; igual razonamiento para cada uno de los factores iguales, $x-b$, $x-c\ldots$.; ademas, no se puede formar mas que un solo cociente igual á $\frac{X}{x-p}$, $\frac{X}{x-q}$, $\frac{X}{x-r},\ldots$ Así, pues, Y es necesariamente de la forma

$$Y=\frac{nX}{x-a}+\frac{n'X}{x-b}+\frac{n''X}{x-c}+\ldots+\frac{X}{x-p}+\frac{X}{x-q}+\frac{X}{x-r}+\ldots$$

Segun esta composicion del polinomio Y, es visible que $(x-a)^{n-1}$ $(x-b)^{n'-1}$ $(x-c)^{n''-1},\ldots$ son factores comunes á todas las partes de este polinomio; luego el producto

$$(x-a)^{n-1},\ (x-b)^{n'-1}\ (x-c)^{n''-1}\ldots$$

es un *divisor relativo* de Y (núm. 230); ademas X encierra tambien evidentemente á este divisor; de suerte que X é Y tienen por comun