La ecuacion en z, á que se ha llegado en el momento, se llama por esta razon *la ecuacion de los cuadrados de las diferencias*; y se la considera ordinariamente con preferencia á la ecuacion de las diferencias, por ser de un grado *mitad*.

De modo que en el ejemplo del número anterior la ecuacion de las diferencias es del 6º. grado, es decir, de un grado marcado por 3 (3—1), ó por 6. No contiene mas que potencias de grado par; y si se supone $u^2=z$, se convierte en

$$z^3-36z^2+324z+459=0,$$

ecuacion cuyas raíces son los *cuadrados de las diferencias de las raíces de la propuesta.*

La ecuacion *de las diferencias* ó mas bien la ecuacion de *los cuadrados* de las diferencias nos será muy útil para lo sucesivo.

---

§ III. DE LAS ECUACIONES SUSCEPTIBLES DE REBAJAMIENTO.

Compréndense bajo este título todas las ecuaciones en las que dos ó mas raíces tienen entre sí relaciones particulares, porque en general se puede hacer depender la resolucion de estas ecuaciones de la de otras de *grado menor*. Tales son las ecuaciones que tienen raíces iguales; es decir cuyo primer miembro (núm. 240) contiene factores iguales.

Los métodos que se refieren á esta clase de ecuaciones se llaman *métodos de rebajamiento*, y deben considerarse hasta cierto punto como un ramo de la transformacion de las ecuaciones, puesto que el objeto general de esta teoría es el de reducir la resolucion de una ecuacion á la de otra mas simple.

Método de las raíces iguales.

276. Decir que una ecuacion tiene raíces iguales es decir (número 240) que su primer miembro tiene factores iguales; y desde en-

tónces el primer polinomio derivado, que es (núm. 264) la suma de los productos $(m-1)$ en $(m-1)$ de los m factores contiene en cada una de sus partes al ménos una vez el factor que entra muchas veces en la propuesta. Luego *debe existir un comun divisor entre el primer miembro de la propuesta y su primer polinomio derivado.*

Pero ¿de qué modo se compone este comun divisor, por medio de los factores iguales de la propuesta? Eso es lo que tratamos ahora de examinar.

277. *Dada una ecuacion, se pide reconocer si tiene raices, iguales y en cuanto sea posible, determinar estas raices.*

Designemos por X el primer miembro de la ecuacion

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0;$$

supongamos que encierre n factores iguales á $x-a$, n' factores iguales á $x-b$, n'' factores iguales á $x-c,\ldots$, y que contenga ademas los factores simples $x-p$, $x-q$, $x-r,\ldots$; de modo que se tenga

$$X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}\ldots(x-p)(x-q)(x-r)\ldots$$

Si se considera Y, ó el polinomio derivado de X, hemos visto ya (núm. 264) que este polinomio es la *suma de los cocientes de la division de* X *por cada uno de los* m *factores del primer grado de la propuesta.* Ahora bien, como X encierra n factores iguales á $x-a$, se tendrán desde luego n cocientes parciales iguales á $\frac{X}{x-a}$; igual razonamiento para cada uno de los factores iguales, $x-b$, $x-c\ldots$; ademas, no se puede formar mas que un solo cociente igual á $\frac{X}{x-p}$, $\frac{X}{x-q}$, $\frac{X}{x-r},\ldots$ Así, pues, Y es necesariamente de la forma

$$Y=\frac{nX}{x-a}+\frac{n'X}{x-b}+\frac{n''X}{x-c}+\ldots+\frac{X}{x-p}+\frac{X}{x-q}+\frac{X}{x-r}+\ldots$$

Segun esta composicion del polinomio Y, es visible que $(x-a)^{n-1}$ $(x-b)^{n'-1}$ $(x-c)^{n''-1},\ldots$ son factores comunes á todas las partes de este polinomio; luego el producto

$$(x-a)^{n-1},(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''-1}\ldots$$

es un *divisor relativo* de Y (núm. 230); ademas X encierra tambien evidentemente á este divisor; de suerte que X é Y tienen por comun

divisor relativo á $(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''-1}$... digo, pues, que este es su máximo comun divisor. En efecto, los factores primeros de X son $x-a$, $x-b$, $x-c$,... y $x-p$, $x-q$, $x-r$,...; así que Y no puede tener por divisor á $x-p$, $x-q$, $x-r$,... pues cada uno de ellos entra como factor en todas las partes de Y, escepto una sola.

Luego en fin, el mayor divisor comun de X é Y es

$$D=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''-1}\ldots;$$

es decir que *este máximo comun divisor es el producto de los factores que entran muchas veces en la propuesta, elevados respectivamente á potencias cuyos esponentes son menores en una unidad que en la propuesta.*

278. De aquí puede concluirse el método siguiente:

Para reconocer si una ecuacion X=0 encierra raíces iguales *fórmese* Y ó el *polinomio derivado de* X; en seguida *búsquese* (número 246) *el mayor divisor comun relativo entre* X y Y, y si no se encuentra, la ecuacion no tiene raíces iguales ó factores iguales.

Si se encuentra uno, y este comun divisor D es del primer grado, ó de la forma $x-h$, *supóngase* $x-h=0$, de donde $x=h$; entónces se puede ya concluir que la ecuacion tiene dos raíces iguales á h, y que solo tiene esta especie de raíces iguales, de las cuales se la puede desembarazar dividiendo X por $(x-h)^2$.

Si D es del segundo grado en x, *resuélvase la ecuacion* D=0; y entónces pueden ocurrir dos casos: ó las dos raíces son iguales ó no. 1º. Si resulta $D=(x-h)^2$, puede concluirse que la *ecuacion tiene* TRES *raíces iguales á* h, *y que no admite mas que esta especie de raíces iguales*, de las cuales se la puede despojar dividiendo X por $(x-h)^3$. 2º. Si D es de la forma $(x-h)(x-h')$ es prueba de que la propuesta tiene dos raíces iguales á h y dos á h', de que se la puede desembarazar dividiendo X por $(x-h)^2(x-h')^2$, ó por D^2.

Supongamos ahora que sea D de un grado cualquiera; *será preciso*, para conocer las diversas especies de raíces iguales, y el número de las raíces de cada especie, *resolver completamente la ecuacion* D=0, *y toda raíz simple* D=0 *será doble en la propuesta; y toda raíz doble de* D=0 *triple en la propuesta*; y así sucesivamente.

279. Apliquemos este método á algunos ejemplos:

Se pregunta si la ecuacion $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0$ *tiene raíces iguales.*

Se tiene (núm. 262), para el polinomio derivado,

$$8x^3-36x^2+38x-6.$$

Ahora bien; buscando (núm. 259) el mayor divisor relativo comun a estos dos polinomios, se encuentra $D=x-3=0$, de donde $x=3$; luego la propuesta tiene *dos* raíces iguales á 3.

Dividiendo su primer miembro por $(x-3)^2$, se obtiene

$$2x^2+1=0;\ \text{de donde}\ x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

De este modo queda completamente resuelta la ecuacion y tiene por raíces.

$$3,\ 3,\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{-2},\ \text{y}\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

Sea para el segundo ejemplo, $x^5-2x^4+3x^3-7x^2+8x-3=0$;
se tiene para el polinomio derivado $5x^4-8x^3+9x^2-14x+8$,
y para comun divisor, x^2-2x+1 ó $(x-1)^2$:

luego la propuesta tiene tres raíces iguales á 1.

Dividiendo su primer miembro por $(x-1)^3$ ó por... x^2-3x^2+3x-1, se encuentra por cociente

$$x^2+x+3=0;\ \text{de donde}\ x=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2};\ \text{la ecuacion queda,}$$

pues, tambien completamente resuelta.

Sea la nueva ecuacion

$$x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4=0;$$

el polinomio derivado es

$$7x^6+30x^5+30x^4-24x^3-45x^2-6x+8;$$

y se halla para comun divisor

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2.$$

La ecuacion $x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$ no puede ser inmediatamente resuelta; pero aplicando á ella el método de las raíces iguales, es decir, buscando el mayor divisor comun entre el primer miembro y su polinomio derivado, $4x^3+9x^2+2x-3$, se encuentra para comun divisor, $x+1$; lo que prueba que $x+1$ entra *cuadrado* en $x^4+3x^3+x^2-3x-2$, y *elevado al cubo* en el primer miembro de la propuesta.

Si se divide $x^4+3x^3+x^3-3x-2$ por $(x+1)^2$ ó x^2+2x+1, sale por

cociente, x^2+x-2, polinomio que igualado á cero da las dos raíces $x=1$, $x=-2$ ó los dos factores $x-1$ y $x-2$. Se tiene, pues,

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2=(x+1)^2\ (x-1\ (x+2).$$

De esta manera el primer miembro de la propuesta es de la forma

$$(x+1)^3\ (x-1)^2\ (x+2)^2;$$

ó en otros términos, la ecuacion tiene *tres* raíces iguales á -1, *dos* iguales á $+1$, y *dos* á -2.

Hé aquí nuevas aplicaciones :

1°. $x^7-7x^6+10x^5+22x^4-43x^3-35x^2+48x+36=0$,

$$(x-2)^2)\ (x-3)^2\ (x+1)^3=0;$$

2°. $x^7-3x^6+9x^5-19^4+27x^3-33x^2+27x-9=0$,

$$(x-1)^3\ (x^2+3)^2=0.$$

280. Cuando aplicando el método precedente se obtiene una ecuacion $D=0$ de un grado superior al segundo, como esta misma ecuacion puede tambien someterse á dicho método, se llega así muchas veces á lograr la descomposicion de $D=0$ en sus factores; y se conocen por este medio las diferentes especies de raíces iguales de la ecuacion $X=0$, como tambien el número de las raíces de cada especie. En cuanto á las raíces simples de $X=0$, se empieza por despojar á esta ecuacion de los factores iguales que encierra; y resolviendo la ecuacion resultante da á conocer estas raíces simples.

Las raíces iguales de $X=0$ no siempre pueden ser descubiertas inmediatamente: esto es, por ejemplo, lo que sucede cuando D no tiene mas que raíces simples y escede al segundo grado, en cuyo caso cada una de estas raíces entra dos veces en la propuesta; y solo se las puede obtener resolviendo la ecuacion $D=0$ segun los métodos que espondremos ulteriormente.

281. Pero para no dejar nada que desear en esta materia, vamos á hacer ver que, *cualquiera que sea la ecuacion propuesta*, si tiene raíces iguales, *se puede siempre hacer depender su resolucion de la de una serie de ecuaciones, de las que la primera no admite mas que las raíces simples de la propuesta, una segunda de las dobles* (es decir, las raíces que entran en ella dos veces), *una tercera las triples, etc.*

En efecto, sea $X=0$ la ecuacion propuesta, designemos por X' el

producto de los factores del primer grado que corresponden á las raíces simples; por X'' el producto de los factores del primer grado, correspondiente á las raíces dobles; por X''', X^{IV}... el producto de los factores correspondientes á las raíces triples, cuádruplas,...; de modo que se tenga

$$X=X'.\ X''.^2\ X'''.^3\ X^{IV}.^4\ X^{V\ 5}...;$$

resulta de lo dicho en el núm. 277, que el máximo comun divisor entre X y su polinomio derivado, Y, es de la forma

$$D=X''\ X'''^2\ X^{IV\ 3}\ X^{V\ 4}...$$

pues que los factores iguales de la propuesta deben entrar en D con una potencia cuyo esponente sea menor en una unidad que en la propuesta.

Sentado esto, operemos sobre D como lo hemos hecho sobre X, y designemos por D' el máximo comun divisor que existe entre D y su polinomio derivado. Se tiene

$$D'=X'''.\ X^{IV}.^2\ X^{V\ 3}...$$

Se encontraria asimismo, operando sobre D' como sobre D

y X, $\quad D''=X^{IV}.\ X^{V\ 2}...;$

y finalmente $\quad D'''=X^{V}.$

(Supondremos, para fijar las ideas, que sea 5 el mayor número de veces que una raíz entra en la ecuacion propuesta, es decir que la ecuacion $D'''=0$ no tenga mas que raíces simples.)

Ahora, si se divide sucesivamente X por D, D por D', D' por D'', D'' por D''', y si se designan respectivamente por Q, Q' Q'', Q''' los cocientes obtenidos, se podrá formar el cuadro siguiente :

$$\left.\begin{array}{l} X=X'\ X''^2\ X'''^3\ X^{IV\ 4}\ X^{V\ 5} \\ \\ D=X''\ X'''^2\ X^{IV\ 3}\ X^{V\ 4} \\ \\ D'=X'''\ X^{IV\ 2}\ X^{V\ 3} \\ \\ D''=X^{IV}\ X^{V\ 2} \\ D'''=X^{V}=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} Q=X'\ X''\ X'''\ X^{IV}\ X^{V} \\ \\ Q'=X''\ X'''\ X^{IV}\ X^{V} \\ \\ Q''=X'''\ X^{IV}\ X^{V} \\ \\ Q'''=X^{IV}\ X^{V} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{Q}{Q'}=X'=0 \\ \\ \dfrac{Q'}{Q''}=X''=0 \\ \\ \dfrac{Q''}{Q'''}=X'''=0 \\ \\ \dfrac{Q'''}{D'''}=X^{IV}=0 \end{array}\right.$$

Se ve pues, que con ayuda de tres sistemas de operaciones, á saber, una serie de operaciones del máximo comun divisor y dos series de divisiones se consigue aislar sucesivamente los factores X', X'', X''', X^{iv} y X^{v}, que igualados separadamente á 0, dan, la primera las raíces simples, la segunda las dobles, etc.

Hay que observar ademas que el grado de $X'=0$ espresa el número de raíces simples de la propuesta; el grado de $X''=0$, el número de las raíces dobles, el de $X'''=0$, el número de las raíces triples, etc., haciendo conocer la resolucion completa de estas ecuaciones las diferentes especies de raíces dobles, triples, cuádruplas, etc.

De modo que el método de las raíces iguales no es por lo general un método de resolucion completo, sino mas bien *un método de rebajamiento*. Solo en el caso en que las ecuaciones $X'=0$, $X''=0$, $X'''=0$,... son del primero ó segundo grado pueden obtenerse inmediatamente todas las raíces de la ecuacion propuesta.

282. Se puede aplicar la teoría de las raíces iguales á la investigacion de las relaciones que deben existir entre los coeficientes de un polinomio en x del segundo, del tercer... grado, para que este polinomio sea un cuadrado, un cubo... perfecto. Basta para ello formar el polinomio derivado del polinomio propuesto, y espresar despues (núm. 277) la condicion necesaria para que este polinomio derivado sea divisor relativo del polinomio propuesto.

Sea, por ejemplo, el trinomio del segundo grado ax^2+bx+c, cuyo polinomio derivado es $2ax+b$,

$$\begin{array}{l|l} 2ax^2+2bx+2c & 2ax+b \\ \hline \qquad\qquad bx+2c & x+b \\ 2abx+4ac & \\ \hline 4ac-b^2. & \end{array}$$

Aplicando á estos dos polinomios el procedimiento del máximo comun divisor con sus modificaciones (núm. 259) se halla para resta, $4ac-b^2$; y si se supone $4ac-b^2=0$, ó $b^2-4ac=0$, $2ax+b$, será el mayor divisor comun entre ax^2+bx+c y su derivado que no es otro que $2ax+b$ mismo; de modo que se puede considerar á ax^2+bx+c como el cuadrado de $2ax+b$, y un factor independiente de x.

Vimos en efecto (núm. 102), que $b^2-4ac=0$ es la condicion necesaria y suficiente para que un trinomio del segundo grado sea un cuadrado perfecto.

Sea ahora el polinomio. . . . . ax^3+bx^2+cx+d,
cuyo derivado es. . . . . $3ax^2+2bx+c$;

buscando su máximo comun divisor se halla para resta $(6ac-2b^2)x+9ad-bc$. Ahora bien: si se escribe que esta resta es nula, se establece la condicion de que $3ax^2+2bx+c$ es comun divisor entre el polinomio y su derivado; pero esta resta debe ser nula, cualquiera que sea el valor de x; de este modo (núm. 180) se tiene separadamente

$$6ac-2b^2=0,\ 9ad-bc=0.$$

En efecto, la primera de estas dos condiciones da $c=\frac{b^2}{3a}$ y la segunda, $d=\frac{bc}{9a}=\frac{b^3}{27a^2}$; de donde sustituyendo en el polinomio propuesto

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{3a^2}x+\frac{b^3}{27a^3}\right)=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3.$$

El mismo razonamiento para los polinomios del cuarto, del quinto... grado.

Nota. Las dos relaciones $6ac-2b^2=0$, $9ad-bc=0$, incluyen necesariamente la condicion de que el dividendo $3ax^2+2bx+c$ sea un *cuadrado perfecto*; porque si los dos factores del primer grado en x, de que se compone, pudiesen ser desiguales; como segun la teoría estos factores deberian hallarse en la segunda potencia en el polinomio propuesto, seria preciso que este fuera por lo ménos del cuarto grado, cuando solo lo es del tercero.

Y en efecto, la condicion para que $3ax^2+2bx+c$ sea un cuadrado perfecto, es, como vimos hace poco,

$$(2b)^2-4.\ 3ac=0,\quad ó\quad b^2-ac=0;$$

quedando comprendida esta relacion en la primera de las dos anteriores.

Otras aplicaciones de la teoría del máximo comun divisor.

283. El procedimiento del máximo comun divisor sirve ademas, en otros casos, para disminuir el grado de una ecuacion: tal sucede

cuando se da de antemano una relacion determinada entre dos de las raíces de la ecuacion propuesta.

Sea, para fijar las ideas, la ecuacion general

$$(1) \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0,$$

y supongamos que entre dos de las raíces a y b se tenga la relacion $b = ka + h$, (siendo k y h números conocidos y dados *a priori*).

Como la ecuacion (1) debe quedar satisfecha por las dos cantidades a y $ka+h$, se sigue que si se introduce en esta ecuacion, $kx+h$ en lugar de x, lo que da la nueva ecuacion

$$(2) \qquad (kx+h)^m + P(kx+h)^{m-1} + \ldots + T(kx+h) + U = 0,$$

las ecuaciones (1) y (2) deben quedar satisfechas por el mismo valor a, luego (núm. 237) debe existir un comun divisor relativo entre los dos primeros miembros.

Aplicando de esta manera á ambos polinomios el procedimiento del máximo comun divisor relativo, é igualando á 0 el divisor obtenido, se sacará de él el valor de la raíz a: valor que sustituido en la relacion $b = ka + h$, hará conocer el valor correspondiente de b.

Si este comun divisor es del primer grado en x, puede concluirse de aquí que solo *dos* raíces de la ecuacion tienen entre sí la relacion dada. Si este divisor es del segundo grado, es señal de que existen *dos pares* de raíces que gozan de esta propiedad; y su determinacion no presenta tampoco ninguna dificultad. Despues de esto, se podrá dividir el primer miembro de la propuesta por cada uno de los factores del primer grado que corresponden á las raíces obtenidas.

En general sea D el comun divisor á que se haya llegado. La resolucion de la ecuacion propuesta no depende ya mas que de la resolucion de la ecuacion que se obtiene dividiendo el primer miembro de la propuesta por cada uno de los factores del primer grado que corresponden á las raíces de $D=0$ y á las que se han deducido de la relacion $b = ka + h$.

Sea por ejemplo la ecuacion

$$(1) \qquad x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 71x + 30 = 0,$$

en la que supondremos que dos de las raíces a y b se hallan ligadas por la relacion $b = 2a + 1$.

Poniendo $2x+1$ por x en la propuesta, y desarrollando los cálculos, se obtiene hecha la reduccion,

$$8x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 7x - 2 = 0.$$

Aplicando á los primeros miembros de esta ecuacion y de la propuesta el procedimiento del máximo comun divisor, se llega al divisor relativo $x-2$; lo que da

$$x - 2 = 0; \text{ de donde } x = 2, \text{ ó } a = 2.$$

Este valor de a, sustituyendo en la relacion $b = 2a + 1$, da en seguida $b = 5$.

El primer miembro de la propuesta es pues divisible por

$$(x-2)(x-5) \text{ ó } x^2 - 7x + 10;$$

y efectuando esta division se tiene para cociente

$$x^2 - 5x + 3 = 0, \text{ de donde } x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

De este modo la ecuacion propuesta se halla completamente resuelta.

De las ecuaciones recíprocas.

284. Entre las ecuaciones susceptibles de rebajamiento, se distinguen particularmente las llamadas *recíprocas*, que son aquellas que permanecen las mismas cuando se cambia x en $\frac{1}{x}$.

Así, por ejemplo, toda ecuacion de la forma

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + qx^2 + px + 1 = 0,$$

es decir, tal que los coeficientes de los términos sean iguales entre sí á igual distancia que los estremos, es una ecuacion recíproca; porque si se reemplaza en ella x por $\frac{1}{x}$, se convierte en

$$\frac{1}{x^m} + \frac{p}{x^{m-1}} + \frac{q}{x^{m-2}} + \ldots + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} + 1 = 0;$$

de, multiplicando por x^m, é invirtiendo el órden de los tér-

$$x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots qx^2+px+1=0,$$

acion idéntica á la propuesta.

La denominacion de *recíprocas*, dada á estas ecuaciones, procede de que, si se supone que a es raíz, $\frac{1}{a}$ lo es necesariamente tambien.

285. Para poder asignar la forma general de las ecuaciones recíprocas, consideraremos sucesivamente el caso en que la ecuacion es de grado *impar*, y el en que lo es de *par*.

PRIMER CASO. Sea una ecuacion cualquiera de grado impar.

$$(1)\qquad x^{2n+1}+px^{2n}+qx^{2n-1}+\ldots+sx^2+tx+u=0.$$

Para que esta ecuacion sea recíproca es preciso, segun la definicion, que permanezca la misma cuando se reemplace en ella x por $\frac{1}{x}$. Efectuemos esta sustitucion: sale

$$\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{p}{x^{2n}}+\frac{q}{x^{2n-1}}+\ldots+\frac{s}{x^2}+\frac{t}{x}+u=0;$$

de donde, multiplicando por x^{2n+1}, dividiendo por u é invirtiendo el órden de los términos

$$(2)\qquad x^{2n+1}+\frac{t}{u}x^{2n}+\frac{s}{u}x^{2n-1}+\ldots+\frac{q}{u}x^2+\frac{p}{u}x+\frac{1}{u}=0.$$

Ahora bien: para que las ecuaciones (1) y (2) sean idénticas entre sí, es preciso que sean iguales los coeficientes de las mismas potencias de x, es decir que se tengan las relaciones

$$\frac{t}{u}=p,\ \frac{s}{u}=q,\ldots,\ \frac{q}{u}=s,\ \frac{p}{u}=t,\ \frac{1}{u}=u.$$

Se deduce de la última, $u^2=1$, de donde $u=\pm1$, y si se toma desde luego el valor $u=+1$, resultará

$$t=p,\ s=q,\ldots,\ q=s,\ p=t.$$

Tomando en seguida el valor $u=-1$, se halla

$$t=-p,\ s=-q,\ldots,\ q=-s,\ p=-t;$$

por donde se ve que *una ecuacion de grado impar es recíproca* cuando los coeficientes de los términos á igual distancia de los estremos *son iguales y del mismo signo*, ó bien *iguales y de signos contrarios*. No puede por otra parte ser *recíproca* sino en uno de estos dos casos.

SEGUNDO CASO. Sea una ecuacion cualquiera de grado par,

$$(3)\qquad x^{2n}+px^{2n-1}\ldots+rx^n+\ldots+sx^2+tx+u=0.$$

(En este caso como el número total de los términos es $2n+1$, el término rx^n se halla á igual distancia de los dos estremos.)

Reemplacemos x por $\frac{1}{x}$ en esta ecuacion; sale

$$\frac{1}{x^{2n}}+\frac{p}{x^{2n-1}}+\frac{q}{x^{2n-2}}+\ldots+\frac{r}{x^n}+\ldots+\frac{s}{x^2}+\frac{t}{x}+u=0;$$

de donde multiplicando por x^{2n}, dividiendo por u, é invirtiendo el órden de los términos,

$$(4)\ x^{2n}+\frac{t}{u}x^{2n-1}+\frac{s}{u}x^{2n-2}+\ldots+\frac{r}{u}x^n+\ldots,+\frac{q}{u}x^2+\frac{p}{u}x+\frac{1}{u}=0:$$

pero para que las ecuaciones (3) y (4) sean idénticas entre sí es preciso tener las relaciones

$$\frac{t}{u}=p,\ \frac{s}{u}=q,\ldots,\ \frac{r}{u}=r,\ldots,\ \frac{q}{u}=s,\ \frac{p}{u}=t,\ \frac{1}{u}=u.$$

La última se convierte en $u^2=+1$, de donde $u=\pm1$.

Sentado esto, para el primer valor $u=+1$, se halla

$$t=p,\ s=q,\ldots,\ q=s,\ p=t;$$

y para el segundo $u=-1$,

$$t=-p,\ s=-q,\ldots,\ r=-r,\ldots,\ q=-s,\ p=-t,$$

igualdades, de las que la del medio, $r=-r$ no puede existir á no ser que se suponga $r=0$.

Luego toda ecuacion de grado par es recíproca siempre que, 1°. *los coeficientes de los términos á igual distancia de los estremos sean iguales y del mismo signo*; 2°. que *faltando en la ecuacion el término del medio, son iguales y de signos contrarios los coeficientes de los términos á igual dis-*