*tancia de los estremos.* Es necesario, ademas, una ú otra de estas dos circunstancias.

**286.** Pasemos ahora á la resolucion de esta especie de ecuaciones, y supongamos primeramente que se trate de una de *grado par*, tal que los coeficientes de los términos á igual distancia de los estremos sean *iguales y del mismo signo.*

Tomaremos, para fijar las ideas, una ecuacion de octavo grado, pero será fácil conocer que podria aplicarse el mismo método á cualquiera otra ecuacion que satisfaciese la hipótesis establecida.

Sea, pues, la ecuacion

$$(1)\qquad x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+rx^3+qx^2+px+1=0,$$

y supongamos en la ecuacion (2) $x+\frac{1}{x}=z$.

[Se llega á esta transformacion por la observacion siguiente: pues que las raíces son recíprocas dos á dos, se sigue que son conocidos los productos $a\times\frac{1}{a}$, $b\times\frac{1}{b}$, $c\times\frac{1}{c}$,... de las raíces recíprocas (cada uno de estos productos es igual á 1); bastaria pues (núm. 114), para obtener las dos raíces $a$ y $\frac{1}{a}$, ó $b$ y $\frac{1}{b}$,..., conocer las sumas $a+\frac{1}{a}$, $b+\frac{1}{b}$,..., ó lo que es lo mismo, los valores de la funcion $x+\frac{1}{x}$.]

Sentado esto, se divide la ecuacion (1) por $x^4$, y se reunen los términos afectados de los mismos coeficientes, sale

$$(3)\quad x^4+\frac{1}{x^4}+p\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+q\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+r\left(x+\frac{1}{x}\right)+s=0;$$

quedando así reducida la dificultad á espresar en funcion de $z$ las cantidades $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^4+\frac{1}{x^4}$.

Pero se tiene en general

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}+{}^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}},$$



ecuacion de donde se deduce, reemplazando $x+\frac{1}{x}$ por $z$,

$$x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}},=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)z-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

fórmula que da la espresion $x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}$ por medio de las dos espresiones semejantes de grados inmediatamente inferiores $m$ y $m-1$.

Hágase sucesivamente $m=1, 2, 3, 4, 5,...$; se halla

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)z-\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)=z^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)z-\left(x+\frac{1}{x}\right)z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)z-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=z^4-4z^2+2;$$

. . . . . .

. . . . . .

y así sucesivamente hasta el infinito.

En una palabra, estas espresiones forman (núm. 183) á partir de $x^2+\frac{1}{x^2}$, una serie recurrente de segundo órden, cuya escala de relacion es $(z-1)$.

Solo se trata ya, pues, de sustituir en la ecuacion (3), en lugar de $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^4+\frac{1}{x^4}$, los valores que se acaban de obtener; lo que da para la ecuacion resultante,

$$z^4-4z^2+2+r\,(z^3-3z)+q\,(z^2-2)+pz=0,$$

ó, reduciendo y ordenando relativamente á $z$,

$$z^4+rz^3+(q-4)\,z^2+(p-3r)\,r-2\,q+2=0,$$

ecuacion de un grado mitad que el de la propuesta.

Luego *la resolucion de toda ecuacion de grado par tal que los coeficientes de los términos á igual distancia de los estremos sean iguales y*

*del mismo signo, puede reducirse á la resolucion de una ecuacion de grado mitad.*

**287.** Consideremos, en segundo lugar, la ecuacion de *grado impar*,

$$x^{2n+1}+px^{2n}+\ldots+qx^2+px+1=0,$$

en la cual los coeficientes de los términos á igual distancia de los estremos son *iguales y del mismo signo.*

Es pues deste luego visible que $-1$ es raiz de esta ecuacion; porque el primer miembro se hace por la hipótesis $x=-1$,

$$-1+p-q+\ldots+q-p+1;$$

luego este primer miembro es divisible por $x+1$;

Digo ademas que el cociente es un polinomio *recíproco de grado par*, cuyos coeficientes á igual distancia de los estremos son *iguales y del mismo signo.*

En efecto, se ve claramente que si se divide

sea $\quad x^{2n+1}+px^{2n}-qx^{2n-1}+\ldots+qx^2+px+1$ por $x+1$

sea $\quad 1+px+qx^2+\ldots+qx^{2n-1}+px^{2n}$ por $1+x$,

los coeficientes de los términos de mismo órden en los dos cocientes son necesariamente iguales (basta por otro lado para convencerse de ello efectuar las dos divisiones); pero el segundo cociente no es otra cosa que el primero obtenido en un órden inverso; luego es preciso necesariamente que los últimos coeficientes del primer cociente sean dos á dos iguales á los primeros.

De aquí resulta que despues de haber dividido el primer miembro de la propuesta por $x+1$, se obtendrá una ecuacion recíproca de grado par, de la misma forma que la del número precedente, y que se resolverá del mismo modo.

**288.** Nos quedan aun que considerar las ecuaciones de grado par ó impar, cuyos términos á igual distancia de los estremos tienen *coeficientes iguales y de signos contrarios.*

Sea la ecuacion

$$x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}-\ldots-qx^2-px-1=0.$$

(Aquí no hay término medio porque si $m$ es impar, el número



total de los términos, $m+1$, es par, y si $m$ es par, el término del medio debe faltar (núm. 285, 2°. caso) para que la ecuacion sea *recíproca*).

Sentado esto, es tambien visible que la ecuacion propuesta queda satisfecha por $x=+1$; luego el primer miembro es divisible por $x-1$

Si se divide, pues,

1°. $\quad x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}\ldots-qx^2-px-1$ por $x-1$.

2°. $\quad 1-px-qx^2-\ldots q+x^{m-2}+px^{m-1}+x^m$ por $-1+x$,

ó, lo que es lo mismo (cambiando los signos),

$$1+px+qx^2+\ldots-qx^{m-2}-px^{m-1}-x^m \text{ por } 1-x,$$

se deberá obtener, para los términos del mismo órden en ambos cocientes, coeficientes absolutamente idénticos (lo cual es fácil de verificar, efectuando las dos divisiones).

Luego el primer cociente es necesariamente un polinomio cuyos términos á igual distancia de los estremos tienen *coeficientes iguales y del mismo signo*; y de este modo el polinomio vuelve á entrar en uno de los dos casos anteriormente examinados.

Nota. En la hipótesis que nos ocupa actualmente, si se supone que $m$ sea *par*, como, dividiendo el primer miembro de la propuesta por $x-1$, se obtiene un cociente de grado *impar* cuyos coeficientes son *iguales y del mismo signo*, este cociente es asimismo divisible por $x+1$ (núm. 286). El primer miembro de la propuesta, pues, es divisible por $(x-1)(x+1)$ ó $x^2-1$; y el cociente es un polinomio de grado par que entra en la clase de los ya tratados en el número 286.

**289.** Reasumiendo todo lo dicho, se ve:

1°. Que, *si la ecuacion recíproca propuesta es de grado par, y los coeficientes de los términos á igual distancia de los estremos son iguales y del mismo signo*, puede reducirse su resolucion (núm. 286) á la de una ecuacion de grado *mitad.*

2°. Que, *si la ecuacion es de grado impar siendo los coeficientes á igual distancia iguales y del mismo signo*, es divisible el primer miembro por $x+1$ (núm. 287); y efectuada esta division, la ecuacion resultante puede reducirse á una ecuacion de grado *mitad.*

3°. Que, *si la ecuacion es de grado impar, siendo los coeficientes á igual distancia de los estremos iguales y de signos contrarios*, el primer miembro es divisible por $x-1$ (núm. 288); y efectuada la division, se llega á una ecuacion susceptible de rebajarse á un grado *mitad.*

4°. Que, *si la ecuacion es de grado par, siendo los coeficientes los términos tomados á igual distancia de los estremos iguales y de signos contrarios*, el primer miembro es divisible por $x^2-1$ (NOTA número 288); y si se efectúa la division, la ecuacion que se halla resuelta puede tambien rebajarse á un grado *mitad*.

**290.** *Aplicaciones.* Sea la ecuacion general de dos términos $x^m-1=0$ esta ecuacion tiene evidentemente 1 por raíz; y efectuando su division por $x-1$, se halla (núm. 31) para cociente,

$$x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots+x^2+x+1=0,$$

ecuacion recíproca, cuya resolucion, por medio de los principios precedentes, puede reducirse á la resolucion de una ecuacion de grado mas simple.

Sea por ejemplo la ecuacion $x^5-1=0$

Dividiendo por $x-1$, se tiene

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

ecuacion que puede ponerse bajo la forma

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0.$$

Supongamos $x+\frac{1}{x}=z$, de donde $x^2-zx+1=0$; y resulta

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2, \quad \text{ó} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$$

Volviendo á llevar estos valores de $x+\frac{1}{x}$ y de $x^2+\frac{1}{x^2}$

á la ecuacion, se obtiene $\qquad z^2-2+z+1=0,$

ó reduciendo, $\qquad z^2+z-1=0;$

luego $\qquad z=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}.\sqrt{5}.$

Por otra parte, la ecuacion $x^2-zx+1=0$ da

$$x=\frac{z}{2}\pm\frac{1}{2}.\sqrt{z^2-4}.$$



Luego sustituyendo en lugar de $z$ sus dos valores, se tiene, hecha toda la reduccion,

$$x=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{5}\pm\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}.$$

La ecuacion $x^{10}-1=0$ puede tambien resolverse completamente por el mismo medio.

En efecto, se tiene $x^{10}-1=(x^5-1)(x^5+1)=0$.

Se conocen ya las raíces de la ecuacion $x^5-1=0$; en cuanto á la de la ecuacion $x^5+1=0$, como por el cambio de $x$ en $-x$ se convierte en $x^5-1=0$, se ve que todo se reduce á tomar con signos contrarios las raíces de esta última ecuacion.

---

## § IV. TEORÍA DE LAS FUNCIONES SIMÉTRICAS.

Para completar el conjunto de los medios necesarios para la resolucion de las ecuaciones de un grado cualquiera, nos resta esponer una de las teorías mas curiosas y mas importantes del Análisis: tal es la teoría de las *funciones simétricas*. El ilustre Lagrange ha hecho de ella la base de un método para resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

**291.** Llámase *funcion simétrica* de las raíces de una ecuacion á *toda espresion algebráica que encierra estas raices combinadas del mismo modo, ya entre sí, ya con otras cantidades.* Así la suma $a+b+c+\ldots+i+l$ de las raíces de una ecuacion, la suma $ab+ac+ad+\ldots+il$ de sus productos dos á dos, la suma $abc+abd+\ldots$ de sus productos tres á tres... se llaman funciones simétricas de las raíces.

El carácter distintivo de una funcion simétrica de diversas cantidades es el de *conservar el mismo valor numérico, cualquiera que sea la permutacion que se haga esperimentar á estas cantidades.*

Vimos ya (núm. 242) que siendo P, Q, R,... T, U, los coeficientes de una ecuacion, se tienen entre las raíces y los coeficientes las relaciones $a+b+c+\ldots=-P\ldots$, $ab+ac+ad+\ldots=Q\ldots$, $abcd\ldots=\pm U$; vere-