4°. Que, *si la ecuacion es de grado par, siendo los coeficientes los términos tomados á igual distancia de los estremos iguales y de signos contrarios*, el primer miembro es divisible por x^2-1 (NOTA número 288); y si se efectúa la division, la ecuacion que se halla resuelta puede tambien rebajarse á un grado *mitad*.

290. *Aplicaciones.* Sea la ecuacion general de dos términos $x^m-1=0$ esta ecuacion tiene evidentemente 1 por raíz; y efectuando su division por $x-1$, se halla (núm. 31) para cociente,

$$x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots+x^2+x+1=0,$$

ecuacion recíproca, cuya resolucion, por medio de los principios precedentes, puede reducirse á la resolucion de una ecuacion de grado mas simple.

Sea por ejemplo la ecuacion $x^5-1=0$

Dividiendo por $x-1$, se tiene

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

ecuacion que puede ponerse bajo la forma

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0.$$

Supongamos $x+\frac{1}{x}=z$, de donde $x^2-zx+1=0$; y resulta

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2, \quad \text{ó} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$$

Volviendo á llevar estos valores de $x+\frac{1}{x}$ y de $x^2+\frac{1}{x^2}$

á la ecuacion, se obtiene $\qquad z^2-2+z+1=0,$

ó reduciendo, $\qquad z^2+z-1=0;$

luego $\qquad z=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}.\sqrt{5}.$

Por otra parte, la ecuacion $x^2-zx+1=0$ da

$$x=\frac{z}{2}\pm\frac{1}{2}.\sqrt{z^2-4}.$$

Luego sustituyendo en lugar de z sus dos valores, se tiene, hecha toda la reduccion,

$$x=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{5}\pm\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}.$$

La ecuacion $x^{10}-1=0$ puede tambien resolverse completamente por el mismo medio.

En efecto, se tiene $x^{10}-1=(x^5-1)(x^5+1)=0$.

Se conocen ya las raíces de la ecuacion $x^5-1=0$; en cuanto á la de la ecuacion $x^5+1=0$, como por el cambio de x en $-x$ se convierte en $x^5-1=0$, se ve que todo se reduce á tomar con signos contrarios las raíces de esta última ecuacion.

---

§ IV. TEORÍA DE LAS FUNCIONES SIMÉTRICAS.

Para completar el conjunto de los medios necesarios para la resolucion de las ecuaciones de un grado cualquiera, nos resta esponer una de las teorías mas curiosas y mas importantes del Análisis: tal es la teoría de las *funciones simétricas*. El ilustre Lagrange ha hecho de ella la base de un método para resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

291. Llámase *funcion simétrica* de las raíces de una ecuacion á *toda espresion algebráica que encierra estas raices combinadas del mismo modo, ya entre sí, ya con otras cantidades.* Así la suma $a+b+c+\ldots+i+l$ de las raíces de una ecuacion, la suma $ab+ac+ad+\ldots+il$ de sus productos dos á dos, la suma $abc+abd+\ldots$ de sus productos tres á tres... se llaman funciones simétricas de las raíces.

El carácter distintivo de una funcion simétrica de diversas cantidades es el de *conservar el mismo valor numérico, cualquiera que sea la permutacion que se haga esperimentar á estas cantidades.*

Vimos ya (núm. 242) que siendo P, Q, R,... T, U, los coeficientes de una ecuacion, se tienen entre las raíces y los coeficientes las relaciones $a+b+c+\ldots=-P\ldots$, $ab+ac+ad+\ldots=Q\ldots$, $abcd\ldots=\pm U$; vere-

mos ahora que *toda funcion simétrica* RACIONAL *de estas mismas raices* puede espresarse igualmente por medio de los coeficientes de la ecuacion.

292. *Suma de las potencias semejantes de las raices de una ecuacion.* Las mas simples de las funciones simétricas; aquellas por cuyo medio se puede, como lo vamos á ver, formar todas las demas, son las sumas de las potencias semejantes de las raíces; tales como $a+b+c+d+\ldots$, $a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots$, y en general $a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots$, siendo n un número cualquiera.

Digo, pues, que sín conocer las raíces es posible espresar las sumas de sus potencias semejantes por medio de los coeficientes P, Q, R,... que son cantidades conocidas.

Sea en efecto $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots+Tx+U=0$ la ecuacion propuesta; y designemos sus raíces por $a, b, c, d\ldots$

Si se divide sucesivamente el primer miembro por cada uno de los m factores del primer grado, $x-a$, $x-b$, $x-c\ldots$ se obtendrá (núm. 238), para los diferentes cocientes,

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}+a^3 & x^{m-4}+\ldots+a^{m-1} \\
\quad\;\;+P & \qquad\;\;+Pa & \qquad\;\;+Pa^2 & \qquad\;\;+Pa^{m-2} \\
 & \qquad\;\;+Q & \qquad\;\;+Qa & \qquad\;\;+Qa^{m-3} \\
 & & \qquad\;\;+R & \qquad\;\;+Ra^{m-4} \\
 & & & \qquad\;\;+\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\;\;+T, \\
x^{m-1}+b & x^{m-2}+b^2 & x^{m-3}+b^2 & x^{m-4}+\ldots+b^{m-1} \\
\quad\;\;+P & \qquad\;\;+Pb & \qquad\;\;+Pb^2 & \qquad\;\;+Pb^{m-2} \\
 & \qquad\;\;+Q & \qquad\;\;+Qb & \qquad\;\;+Qb^{m-3} \\
 & & \qquad\;\;+R & \qquad\;\;+\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\;\;+T,
\end{array}$$

. . . . . .

y así sucesivamente para cada uno de los factores $x-c$, $x-d\ldots$

Ahora, si se efectúa la suma de estos m cocientes, y se supone para mayor sencillez,

$$\begin{array}{llll}
a & +b & +c & +\ldots\ldots=S_1 \\
a^2 & +b^2 & +c^2 & +\ldots\ldots=S_2 \\
a^3 & +b^3 & +c^3 & +\ldots\ldots=S_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a^{m-1} & +b^{m-1} & +c^{m-1} & +\ldots\ldots=S^{m-1},
\end{array}$$

Se obtiene evidentemente para esta suma,

$$\begin{array}{l|l|l|l}
mx^{m-1}+S_1 & x^{m-2}+S_2 & x^{m-3}+S_3 & x^{m-4}+\ldots+S_{m-1} \\
\quad\;\;+mP & \qquad\;\;+PS_1 & \qquad\;\;+PS_2 & \qquad\;\;+PS_{m-2} \\
 & \qquad\;\;+mQ & \qquad\;\;+QS_1 & \qquad\;\;+QS_{m-3} \\
 & & \qquad\;\;+mR & \qquad\;\;+RS_{m-4} \\
 & & & \qquad\;\;+\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\;\;+\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\;\;+mT.
\end{array}$$

Por otra parte, vimos (núm. 264) que Y, ó el polinomio derivado del primer miembro de la propuesta representa tambien la suma de los m cocientes de la division de X, por $x-a$, $x-b$, $x-c$, de modo que se tiene (núm. 262).

$$Y=mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}+(m-3)Rx^{m-4}+\ldots+T.$$

Luego comparando término á término estas dos espresiones *idénticas* de la suma de los m cocientes, se obtienen las relaciones

$$\begin{array}{ll}
S_1+mP=(m-1)P, \text{ ó simplificando,} & S_1+P=0; \\
S_2+PS_1+mQ=(m-2)Q, \quad \text{ó bien} & S_2+PS_1+2Q=0; \\
S_3+PS_2+QS_1+mR=(m-3)R, \quad \text{ó} & S_3+PS_2+QS_1-3R=0;
\end{array}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$S_{m-1}+PS_{m-2}+QS_{m-3}+\ldots+mT=T,$$

ó

$$S_{m-1}+PS_{m-2}+QS_{m-3}+\ldots+(m+1)T=0.$$

La primera fórmula da desde luego el valor de S_1 como funcion de P; la segunda da en seguida S_2 como funcion de P, Q, y de S_1, y así sucesivamente: en fin, la última hace conocer S_{m-1} por medio de P, Q, R,..., T, y de S_{m-2}, $S_{m-3}\ldots$, que se miran como conocidos segun las relaciones precedentes.

Para estender estas fórmulas al caso de una potencia cualquiera, tomemos de nuevo la ecuacion propuesta y reemplacemos por x cada una de las raíces $a, b, c, d,\ldots$; se tienen las igualdades

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}+\ldots+Ta+U=0,$$
$$b^m+Pb^{m-1}+Qb^{m-2}+\ldots+Tb+U=0,$$

. . . . . .

. . . . . .

Multiplicando todas estas igualdades respectivamente por a^n, b^n, c^n ...

y sumando los productos término á término, se obtiene, segun las anotaciones convenidas,

$$S_{m+n}+PS_{m+n-1}+QS_{m+n-2}+\ldots,+TS_{n+1}+US_n=0.$$

Sentado esto, hé aquí el uso de esta fórmula:

Sea $n=0$; de donde $S_n=S_0=a^0+b^0+c^0+\ldots=m$; se convierte en

$$S_m+PS_{m-1}+QS_{m-2}+\ldots+TS_1=mU=0.$$

Esta última fórmula se enlaza inmediatamente con la última de las obtenidas arriba.

Hágase en seguida $n=1, 2, 3, 4, 5,\ldots$; se encuentra

$$S_{m+1}+PS_m+QS_{m-1}+\ldots+TS_2+US_1=0$$
$$S_{m+2}+PS_{m+1}+QS_m+\ldots+TS_3+US_2=0,$$
$$S_{m+3}+PS_{m+2}+QS_{m+1}+\ldots+TS_4+US_3=0$$

. . . . . .

. . . . . .

Es fácil conocer, con la sola inspeccion de estas fórmulas, que una vez formadas las sumas de las m primeras potencias, las siguientes forman (núm. 184) una serie recurrente cuya escala de relacion es la suma de los m coeficientes P, Q, R,..., T, U, de la propuesta, tomada con signos contrarios.

La fórmula $S_{m+n}+PS_{m+n-1}+\ldots$ puede dar igualmente las sumas de las potencias de índices enteros y negativos. En efecto, sea primeramente $m=-1$; resultará

$$S_{m-1}+PS_{m-2}+\ldots+TS_0+US_{-1}=0,$$

ecuacion de la cual se puede sacar el valor de S_{-1} como funcion de S_{m-1}, S_{m-2}...., S_1 S_0 que se suponen conocidos.

Sean tambien $n=-2$, $n=-3$....; se obtendrán nuevas fórmulas que darán S_{-2} como funcion de S_{m-2}, S_{m-3},..., S_0, S_{-1},....; despues S_{-3} como funcion de S_{m-3}, S_{m-4},.... S_{-1}, S_{-2}; y así sucesivamente.

Concluyamos de aquí que, *dada una ecuacion cualquiera, se puede siempre, sin conocer sus raíces, obtener las sumas de sus potencias semejantes, siendo el grado de la potencia un número entero cualquiera positivo ó negativo.*

Sea por ejemplo la ecuacion

$$x^4+x^3-7x^2-x+6=0.$$

Se tiene para esta ecuacion particular,

$$P=1,\ Q=-7,\ T=-1,\ U=6,$$

lo que da

$S_1=-P=-1$,
$S_2=-PS_1-2Q=1+14=15$,
$S_3=-PS_2-QS_1-3TS=-15-7+3=-19$,
$S_4=-PS_3-QS_2-TS_1-4U=19+105-1-24=99$,
$S_5=-PS_4-QS_3-TS_2-US_1=-99-133+15+6=-211$,
$S_6=-PS_5-QS_4-TS_3-US_2=211+693-19-90=795$;

. . . . . .

$$S_{-1}=\frac{-S_3-PS_2-QS_1-TS_0}{U}=\frac{19-15-7+4}{6}=\frac{1}{6},$$

$$S_{-2}=\frac{-S_2-PS_1-QS_0-TS_{-1}}{U}=\frac{-15+1+28+\frac{1}{6}}{6}=\frac{85}{36},$$

. . . . . .

. . . . . .

Valores que pueden comprobarse fácilmente, porque la ecuacion ha sido formada por la multiplicacion de los factores $x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+3$: lo que da $+1$, -1, $+2$, y -3, para las cuatro raíces.

Consideremos ahora otras especies de funciones simétricas.

293. Se distinguen las funciones racionales y enteras de las raíces de una ecuacion en funciones simétricas *de una, dos y tres letras*, etc.

Las funciones simétricas de una *letra son aquellas en que cada término no encierra mas que una raíz;* tal es la funcion $a^n+b^n+c^n\ldots$ que sabemos ya espresar (núm. 292) por medio de los coeficientes de la ecuacion.

Las funciones de *dos* letras *son aquellas en que cada término encierra dos raíces;* tal es la funcion $a^n b^p+a^n c^p+b^n a^p+a^n d^p+\ldots$, cuya formacion se concibe fácilmente tomando todas las combinaciones *dos á dos* de las m raíces, y afectando las dos letras de cada producto, con los esponentes respectivos n y p, de donde se sigue que el número total de los términos de esta funcion es (núm. 146) igual á $m(m-1)$.

Las funciones de *tres* letras *son aquellas en que cada término encierra tres raíces;* tal es la funcion $a^n b^p c^q+b^n a^p c^q+\ldots$, que se obtiene formando todas las combinaciones *tres á tres*, de las m raíces, y afectando las tres letras de cada producto, de los esponentes respectivos, n, p, q;

así el número total de los términos se halla marcado por $m(m-1)(m-2)$; y así sucesivamente.

Como un término cualquiera de una funcion simétrica *tiene muchas letras*, cuando está escrito se pueden obtener todos los demas, sus ti tuyendo á la combinacion de las letras que entran en este término las otras combinaciones de que son susceptibles m letras, y conservando á los esponentes el mismo órden : se ha convenido, para abreviar, representar las funciones de una, dos, tres... letras de esta manera: Ta^n $Ta^n b^p$, $Ta^n b^p c^r$,...; es decir que se coloca delante de uno de los términos de la funcion la letra T; y estas anotaciones son equivalentes á : $a^n+b^n+c^n+\ldots$, $a^n b^p+a^n c^p+\ldots$, $a^n b^p c^q+a^n b^p d^q+\ldots$

Las funciones de que acabamos de hablar se llaman *funciones simétricas elementales.*

Se concibe en seguida que todos los términos de una misma funcion puedan ser afectados de coeficientes ; pero para que la funcion sea simétrica es preciso que todos estos coeficientes sean iguales; y entónces se puede poner este coeficiente por factor comun.

Así es como la espresion $4a^3 b^2+4a^3 c^2+4b^3 a^2+\ldots$, que se supone simétrica en $a, b, c\ldots$, puede ponerse bajo la forma $4(a^3 b^2+a^3 c^2+b^3 a^2+\ldots)$, ó $4\,Ta^2 b^2$.

En fin un polinomio simétrico en $a, b, c,\ldots$, puede componerse de la reunion, por adicion ó sustraccion, de muchas *funciones simétricas elementales;* y su valuacion se reduce entónces á la de cada una de las funciones elementales que le componen. Pasemos pues á la determinacion de estas.

Valuacion de las funciones simétricas de dos, tres... letras.

294. Dimos ya fórmulas (núm. 292) para valuar las funciones tales como Ta^n, que no es otra cosa que S_n. Procuremos ahora valuar la funcion de dos letras $Ta^n b^p$. Para ello multipliquemos entre sí las dos espresiones

$$a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots=Ta^n,$$
$$a^p+b^p+c^p+d^p+\ldots=Ta^p.$$

El segundo miembro es $Ta^n \times Ta^p$.

En cuanto al primer miembro pueden ocurrir dos casos en la multiplicacion. *O* los dos términos del multiplicando y del multiplicador

tienen la misma letra; y en este caso el producto parcial es uno de los términos de la funcion Ta^{n+p}: *O bien* los dos términos tienen letras diferentes, en cuyo caso el producto parcial es un término de la funcion $Ta^n b^p$. Por otra parte, como el producto total debe ser simétrico, por serlo estos dos factores, se sigue que el primer miembro tiene por espresion,

$$Ta^{n+p}+Ta^n b^p.$$

De modo que se tiene la ecuacion $Ta^{n+p}+Ta^n b^p=Ta^n \times Ta^p$; de donde se deduce

$$(1)\qquad Ta^n b^p=Ta^n \times Ta^p-Ta^{n+p}.$$

Siendo conocidos Ta^n, Ta^p, Ta^{n+p}, por las fórmulas del número 292, la fórmula (1) podrá servir para determinar todas las *funciones de dos letras.*

Caso particular. Si se supone esta fórmula $n=p$, circunstancia que ocurre con frecuencia, el segundo miembro se reduce á $(Ta^n)^2-Ta^{2n}$. Para saber en qué se convierte el primero (que en apariencia se reduce á $Ta^n b^n$) es preciso observar que se tiene

$$Ta^n b^p=a^n b^p+a^n c^p+a^n a^p+\ldots+b^n a^p\ldots+c^n a^p+\ldots,$$

pero en la hipótesis de $n=p$, todos los términos de este polinomio se hacen iguales *dos á dos*, á saber : $a^n b^p$ y $b^n a^p$, $a^n c^p$ y $c^n a^p$ ... luego $Ta^n b^p$ se reduce realmente á $2Ta^n b^p$; es decir al doble de la funcion espresada por $Ta^n b^n$, y cuyo número de términos no representa ya (núm. 233) el número de permutaciones sino el de combinaciones *dos á dos.*

Luego suponiendo en la fórmula (1) $n=p$, se halla

$$(2)\qquad Ta^n b^n=\frac{(Ta^n)^2-Ta^{2n}}{2}.$$

Procuremos ahora valuar la funcion $Ta^n b^p c^q$.

Para consiguirlo, multipliquemos entre sí las ecuaciones

$$a^n b^p+a^n c^p+a^n d^p+\ldots\ldots+b^n a^p\ldots\ldots+c^n a^p+\ldots\ldots=Ta^n b^p$$
$$a^q+b^q+c^q+d^q+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=Ta^q.$$

Se tiene desde luego $Ta^n b^p \times Ta^q$ para el producto de los segundos miembros.

En cuanto á los primeros se deben obtener tres especies de funciones simétricas para el producto total.

Porque, *ó bien* la letra del término multiplicador es semejante á la letra del multiplicando, afectado del esponente n; en cuyo caso el producto parcial es uno de los términos de la funcion $Ta^{n+q}\,b^p$.

O bien la letra del término multiplicador es semejante á la letra del término multiplicando afectado del esponente p; y en este caso el producto parcial pertenece á la funcion $Ta^n\,b^{p+q}$.

O bien en fin es diferente de las dos letras que entran en el término multiplicando; y entónces el producto parcial es uno de los términos de la funcion $Ta^n\,b^p\,c^q$.

Luego el producto total de los dos primeros miembros tiene por espresion, $Ta^{n+q}\,b^p + Ta^n\,b^{p+q} + Ta^n\,b^p\,c^q$.

De modo que se tiene para nueva ecuacion,

$$Ta^{n+q}\,b^p + Ta^n\,b^{p+q} + Ta^n\,b^p\,c^q = Ta^n\,b^p \times Ta^q,$$

de donde se deduce

$$(3) \qquad Ta^n\,b^p\,c^q = Ta^n\,b^p \times Ta^q - Ta^{n+q}\,b^p - Ta^n\,b^{p+q}.$$

Casos particulares. 1°. Supongamos *dos* de los tres esponentes, iguales, $p=q$, por ejemplo; el primer miembro se reduce á $2Ta^n\,b^p\,c^p$, pues que todos los términos de la funcion general $Ta^n\,b^p\,c^q$ son entónces iguales dos á dos; y la fórmula (3) se convierte en

$$(4) \qquad Ta^n\,b^p\,c^p = \frac{Ta^n\,b^p \times Ta^p - Ta^{n+p}\,b^p - Ta^n\,b^{2p}}{2}.$$

Esta fórmula servirá para todas las funciones de *tres* letras en que son iguales dos esponentes.

2°. Supongamos iguales los *tres* esponentes, es decir, $n=p=q$; el primer miembro de la fórmula (3) se reduce á $6Ta^n\,b^n\,c^n$, porque todos los términos se hacen iguales (núm. 145) *seis á seis.*

De modo que esta fórmula se convierte en

$$(5) \qquad Ta^n\,b^n\,c^n = \frac{Ta^n\,b^n \times Ta^n - 2Ta^{2n}\,b^n}{6}.$$

Se llegaria al mismo resultado con la fórmula (4) observando que $n=p$ da $Ta^n\,b^p\,c^q = 3Ta^n\,b^n\,c^n$, porque todos los términos de $Ta^n\,b^p\,c^p$ son iguales *tres á tres.*

Por poco que se reflexione sobre la marcha que acabamos de seguir para valuar $Ta^n\,b^p$, $Ta^n\,b^p\,c^q$, es fácil conocer lo que habria que hacer para la evaluacion de las funciones de *cuatro*, de *cinco* letras, etc.

295. Observamos ya (núm. 293) que toda funcion simétrica racional y entera de las raíces de una ecuacion no es mas que el resultado de la reunion por adicion ó sustraccion, de las funciones Ta^n, $Ta^n\,b^p$. $Ta^n\,b^p\,c^q$,....; estamos, pues, autorizados para concluir este teorema, que es uno de los mas bellos é importantes del análisis algebráico:

Toda funcion simétrica racional y entera de las raíces de una ecuacion, puede, sin que se conozcan sus raíces, *ser valuada por medio de los coeficientes de la ecuacion.*

NOTA. Lo mismo sucede con una funcion simétrica racional y fraccionaria; porque si se concibe que todos los términos quedan reducidos al mismo denominador, se tendrá una sola espresion fraccionaria cuyo numerador, segun el carácter distintivo de una funcion simétrica (núm. 291), deberá ser, así como el denominador, una funcion simétrica racional y entera; luego valuando cada una de estas funciones separadamente se obtendrá el valor de la funcion propuesta.

Aplicaciones de la teoría de las funciones simétricas.

296. La teoría de las funciones simétricas da los medios de resolver esta cuestion, que hemos tratado ya (número 272) con ayuda de la eliminacion:

Dada una ecuacion cuyas raíces no se conocen, formar una nueva ecuacion que tenga por raíz una combinacion DETERMINADA *de dos, tres... cualesquiera de las raíces de la propuesta.*

Para fijar las ideas supongamos primeramente que se pide

Una ecuacion cuyas raíces sean la suma de dos cualesquiera de las raíces de la ecuacion $X=0$.

Sean $a, b, c, d...$, las raíces de la ecuacion; las de la nueva ecuacion, que llamaremos $Z=0$, serán $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$,....; y su número estará espresado por el número de sumas ó combinaciones diferentes, dos á dos, que se pueden hacer con las m letras a, b, c, d,... es decir (núm. 147) por $\frac{m(m-1)}{2}$.

Así $\frac{m(m-1)}{2}$ representa ya el grado de la ecuacion.

En cuanto á la composicion de sus coeficientes, como (núm. 242) el

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
MONTERREY, MEXICO

coeficiente del segundo término es igual á la suma de las raíces tomada con signos contrarios; tiene por valor,

$$-(a+b)-(a+c)-(a+d)\ldots,$$

espresion en que $a, b, c\ldots$ entran todas del mismo modo; de suerte que esta funcion simétrica racional y entera puede espresarse por medio de los coeficientes P, Q, R... de la propuesta.

Se tiene asimismo para el coeficiente del tercer término la suma de los productos, dos á dos, de las mismas cantidades, ó bien

$$(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)+(a+c)(b+c)+\ldots,$$

espresion que es tambien simétrica en $a, b, c\ldots$ y puede por consiguiente valuarse por medio de los coeficientes P, Q, R... Igual conclusion relativamente á los coeficientes del cuarto, quinto.... término, y en general con relacion al coeficiente del órden $(n+1)$, pues que no es otra cosa, fuera del signo, que la suma de los *productos* n á n de las cantidades $a+b$, $a+c\ldots$, suma que es necesariamente una funcion simétrica de $a, b, c\ldots$. Toda la dificultad consiste en poner en evidencia estas diversas funciones simétricas, y valuarlas segun las fórmulas precedentemente establecidas.

Por lo demas, pronto veremos un medio mas simple de valuar los coeficientes de la ecuacion buscada.

Se puede igualmente formar una ecuacion cuyas raíces sean combinaciones de la forma

$$a+b+kab,\ a+c+kac,\ a+d+kad\ldots,$$

siendo k un número conocido y determinado.

El grado de esta nueva ecuacion, que se puede tambien designar p $Z=0$, se marca siempre por

$$m.\ \frac{m-1}{2};$$

Y siendo sus coeficientes fuera del signo, las sumas de los productos, *una á una, dos á dos, tres á tres...*, de las cantidades $a+b+kab$, $a+c+kac\ldots$; son necesariamente funciones simétricas racionales y enteras de las raíces de la propuesta.

297. Propongámonos, como segunda aplicacion, *formar la ecuacion de las diferencias de las raíces de una ecuacion dada*, cuestion que ha sido ya tratada por eliminacion.

Hemos hecho conocer (núm. 275) la forma y el grado de esta ecuacion. Sea m el grado de la propuesta; el de la ecuacion *de las diferencias* se halla espresado por $m(m-1)$. Ademas, es de grado par, y no encierra mas que potencias de grado par, de manera que, si se supone en la ecuacion,

$$u^2=z \quad \text{y} \quad \frac{m(m-1)}{2}=n,$$

la ecuacion toma la forma

$$(1) \qquad z^n+P'z^{n-1}+Q'z^{n-2}+\ldots+T'z+U'=0,$$

y las raíces de esta nueva ecuacion son los *cuadrados de las diferencias* de las raíces de la propuesta.

Los coeficientes P', Q'..., T', U', son los mismos que los de la ecuacion de las *diferencias*; pero de grado *mitad*, y por esto mismo mas simple para considerarse.

Sentado esto, si $a, b, c, d,\ldots$ son las raíces de la propuesta, se tiene, para las de la ecuacion (1),

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (b-c)^2,\ldots;$$

luego, segun la composicion conocida de las ecuaciones, los coeficientes P', Q', R',... fuera del signo para algunos, son las sumas de los productos 1 á 1, 2 á 2, 3 á 3,... de las cantidades

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (b-c)^2,\ldots;$$

es decir, que se tiene

$$-P'=(a-b)^2+(a-c)^2+\ldots,$$
$$Q'=(a-b)^2(a-c)^2+(a-b)^2(b-c)^2+\ldots,$$
$$-R'=(a-b)^2(a-c)^2(b-c^2)+\ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

Todas estas espresiones, pues, son funciones simétricas que pueden valuarse por medio de los coeficientes P, Q, R,... de la propuesta.

Sin embargo, si se efectuasen estos desarrollos, las diversas funciones que se obtendrian serian funciones de una, dos, tres, etc.; y en general de p letras (si se considera el coeficiente del órden $p+1$; valuándose en la práctica estos coeficientes con mucho trabajo.

Pero *existe* un medio mas simple de calcular P', Q', R'...