Las fórmulas $S_1+P=0$, $S_2+PS_1+2Q=0$..., obtenidas en el núm. 292 hacen conocer á S_1, S_2, S_3,..., en funcion de P, Q, R,...

Recíprocamente, conociendo *a priori* las sumas S_1, S_2, S_3,..., de las raíces de una ecuacion, se podrian calcular los coeficientes P, Q, R,..., con arreglo á las mismas fórmulas; porque dan

$$P=-S_1,\ Q=\frac{-S_2-PS_1}{2},\ R=\frac{-S_3-PS_2-QS_1}{3},\ldots,$$

luego si pudiésemos valuar las sumas de las potencias semejantes *de los cuadrados de las diferencias* $(a-b)^2$, $(a-c)^2$,..., obtendríamos fácilmente los valores de P′, Q′, R′,...

Llamando, pues, S'_1, S'_2, S'_3, S'_4,..., las sumas de las potencias semejantes de las raíces de la ecuacion (3), se tiene

$$S'_1=(a-b)^2+(a-c)^2+a-d)^2+..=(m-1)\,Ta^2-2Tab,$$
$$S'_2=(a-b)^4+(a-c)^4+\ldots=(m-1)\,Ta^4-4Ta^3b+6Ta^2b^2,$$
$$S'_3=(a-b)^6+(a-c)^6+\ldots=(m-1)\,Ta^6-6Ta^5b+15Ta^4b^2-20Ta^3b^3.$$

. . . . . .

. . . . . .

Esplicacion de este cuadro. Es evidente ante todo, que los desarrollos de S'_1, S'_2, S'_3,..., no puedan componerse sino de funciones simétricas de *una* ó *dos* letras á lo mas. En cuanto al modo de obtenerlos se observará que en cada uno de ellos, a^2, ó a^4, ó a^6,..., deben repetirse tantas veces como diferencias pueden formarse entre la raíz a y todas las demas cuyo número es $m-1$; luego las funciones Ta^2, Ta^4, Ta^6,... tienen todas $(m-1)$ por coeficiente.

Los coeficientes de las otras funciones son por otra parte los de los desarrollos de las potencias $(a-b)^2$, $(a-b)^4$, $(a-b)^6$,..., *desde el coeficiente del segundo término inclusive hasta el del término que ocupa el medio, tambien inclusive.* Finalmente, las diferentes partes son alternativamente positivas y negativas, como en los desarrollos de $(a-b)^2$, $(a-b)^4$...

El número de las sumas S'_1, S'_2, S'_3,..., que es necesario valuar, es igual al número de los coeficientes P′, Q′, R′,... de la ecuacion (3); por consiguiente, la última suma es S′.

Sentado esto, hé aquí la marcha que debe seguirse en la práctica para valuar estas sumas:

Se comienza por calcular las sumas S_1, S_2, S_3,... *hasta* S_{2n} ó $S_{m(m-1)}$ *de las raíces de la propuesta* (1); *despues, con ayuda de las fórmulas del* número 294, *se valúan todas las funciones* Tab Ta^3b, Ta^2b^2,...; de donde se

concluyen los valores de S'_1, S'_2, S'_3,..., S'_n, y por consiguiente, los de P′, Q′, S′,..., T′, U′,

298. Supongamos que se haya propuesto formar la ecuacion de los *cuadrados de las diferencias de las raíces* de la ecuacion $x^3-7x+7=0$.

Como esta ecuacion es de tercer grado, se tiene $\frac{m(m-1)}{2}=3$; de modo que la ecuacion buscada es de la forma $z^3+P's^2+Q'z+R'=0$; es decir, que hay tres coeficientes que determinar y por consiguiente tres sumas, S'_1, S'_2, S'_3, que calcular. Sentado esto, se tiene

$$P=0,\ Q=-7,\ R=7;$$

de donde se deduce, hecho el cálculo,

$$S_1=0,\ S_2=14,\ S_3=-21,\ S_4=98,\ S_5=-245,\ S_6=833,$$

$$Ta^2=S_2=14,\quad Tab=Q=-7,\quad Ta^4=S_4=98,\quad Ta^3b=-S_4=-98,$$

$$Ta^6=S_6=833,\quad Ta^5b=S_5\ S_1-S_6=-833,\quad Ta^4b^2=S_4\ S_2-S_6=539,\quad Ta^3b^3=\frac{(S_3)^2-S_6}{2}=-196;$$

$$Ta^2b^2=\frac{(S_2)^2-S_4}{2}=\frac{196-98}{2}=49;$$

luego
$$S'_1=2Ta^2-2Tab=42,$$
$$S'_2=2Ta^4-4Ta^3b+6Ta^2b^2=882,$$
$$S'_3=2Ta^6-6Ta^5b+15Ta^4b^2-20Ta^3b^3=18669:$$

así á causa de las fórmulas,

$$S'_1+P'=0,\ S'_2+P'S'_1+2Q'=0,\ S'_3+P'S'_3+Q'S'_1+3R'=0,$$

se tiene
$$P'=-S'_1=-42,\ Q'=\frac{-S'_2-P'S'_1}{2}=441,$$

$$R'=\frac{-S'_3-P'S'_2-Q'S'_1}{3}=-49.$$

Luego en fin se obtiene

$$z^3-42z^2+441z-49=0,$$

para la ecuacion *de los cuadrados de las diferencias de las raices* de la ecuacion $x^3-7x+7=0$.

Aconsejamos á los principiantes que traten este mismo ejemplo por eliminacion, á fin de comparar ambos métodos.

299. Este medio de determinar los coeficientes de la ecuacion *de las mas de las raices tomadas dos á dos*, $a+b$, $a+c$, $b+c$,... (Véase el núm. 296.)

Sea $x^3+Px^2+Qx+R=0$ la ecuacion propuesta; la ecuacion *de las* sumas $a+b$, $a+c$, $b+c$, seria de la forma

$$z^3+P'z^2+Q'z+R'=0;$$

y llamando S'_1, S'_2, S'_3, las sumas de las potencias semejantes de las raíces de esta segunda ecuacion, se tendrian para determinar S'_1, S'_2, S'_3, las fórmulas

$$S'_1=(a+b)+(a+c)+(b+c)=2(a+b+c)=2Ta,$$
$$S'_2=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2=2Ta^2+2Tab,$$
$$S'_3=(a+b)^3+(a+c)^3+(b+c)^3=2Ta^3+3Ta^2b.$$

Despues de haber calculado las sumas S_1, S_2, S_3, de la propuesta, se deducirian de ellas los valores de Ta^2, Tab, Ta^3, Ta^2b, lo que haria conocer á S'_1, S'_2, S'_3; y se obtendrian en fin P', Q', R', con arreglo á las fórmulas

$$S'_1+P'=0,\ S'_2+P'S'_1+2Q'=0,\ S'_3+P'S'_2+Q'S'_1+3R'=0.$$

Se operaria de un modo análogo para formar una ecuacion cuyas raíces fuesen combinaciones de las de la propuesta, de la forma $a+b+kab$, $a+c+kab$,...; y se tendria para una ecuacion del n^{mo} grado,

$$S'_1=(a+b+kab)+(a+c+kac)+\ldots=(m-1)Ta_1+kTab,$$
$$S'_2=(a+b+kab)^2+\ldots=(m-1)Ta^2+2Tab+2kTa^2b+k^2Ta^2b^2,$$
$$S'_3=(a+b+kab)^3+\ldots=(m-1)Ta^3+3Ta^2b$$
$$+3k(Ta^3b+2\,Ta^2b^2)$$
$$+3k^2Ta^3b^2+k^3Ta^3b^3.$$

. . . . . .

. . . . . .

Propondremos los ejercicios siguientes:

Determinar: 1.° *La ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raices* de la ecuacion $x^3-6x-7=0$.

(*Resultado...* $z^3-36z^2+324z+459=0$.)

Este ejemplo ha sido ya tratado (núm. 274) por el método de eliminacion.

2°. *La ecuacion de las sumas dos á dos* de las raices de la ecuacion $x^3-3x+2=0$

(*Resultado...* $z^3-3z-2=0$.)

3°. *La ecuacion cuyas raices sean combinaciones de la forma* $a+b+ab$, de las raíces de la ecuacion $x^3+3x^2-4x-12=0$.

(*Resultado...* $z^3+10z^2+17z-28=0$.)

4°. *La ecuacion cuyas raices sean las sumas dos á dos* de las raíces de la ecuacion $x^4-6x^3-5x^2+42x+40=0$.

(*Resultado...* $z^6-18z^5+98z^4-96z^3-747z^2+2322z-1944=0$.)

300. Terminaremos las aplicaciones de la teoría de las funciones simétricas con la demostracion de un escelente teorema acerca de la eliminacion.

Este teorema, debido á Bezout, consiste en que *el grado de la ecuacion final que resulta de la eliminacion de una de las incógnitas, entre dos ecuaciones de un grado cualquiera con dos incógnitas, no puede ser mayor que el producto de los grados de las dos ecuaciones; y es exactamente igual á este producto cuando las ecuaciones propuestas son las mas generales de sus grados.*

Ántes de desarrollar la demostracion, es indispensable dar á conocer la forma de una ecuacion completa del m^{mo} grado con dos incógnitas.

Vimos ya (núm. 116) que toda ecuacion de segundo grado puede reducirse á la forma $Mx^2+Nx+P=0$, siendo M una cantidad conocida, N un polinomio de primer grado en y, y P un polinomio del segundo grado.

En general una ecuacion de dos incógnitas se llama del m^{mo} grado, cuando siendo m el esponente mas alto de cada incógnita, la suma de los esponentes de estas dos incógnitas en un mismo término no escede á m. De aquí resulta evidentemente que toda ecuacion del grado m puede reducirse á la forma

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+\ldots+Tx+U=0,$$

siendo A una cantidad *conocida*, numérica ó algebráica,

B un polinomio del 1er. grado en y, tal como $by+b'$,
C. . . . . del 2°. grado. . . . . $cy^2+c'y+c''$,
D. . . . . del 3er. grado . . . $dy^3+d'y^2+d''y+d'''$,
. . . . . .
. . . . . .
T. . . . . del $(m-1)^{mo}$ grado.. $ty^{m-1}+t'y^{m-2}+\ldots$,
U. . . . . del m^{mo} grado. . $uy^m+u'y^{m-1}+\ldots$.

301. Sentado esto, consideremos las dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$
$$A'x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}+\ldots+T'x+U'=0,$$

que designaremos, para abreviar, por M=0, N=0.

Concibamos ademas que sea resuelta completamente la primera ecuacion relativamente á x (aunque no tengamos aun los medios de efectuar esta operacion) y que dé los m valores $x=a$, $x=b$, $x=c$,... (siendo entónces a, b, c,... funciones de y).

Cada uno de estos m valores de x, sustituido en la ecuacion M=0, debe verificarla, cualquiera que sea el valor que se atribuya á y despues de esta sustitucion.

Por otro lado, si se llevan estos m valores sucesivamente á el primer miembro de la ecuacion N=0, se obtienen las espresiones

$$A'a^n+B'a^{n-1}+\ldots,\ A'b^n+B'b^{n-1}+\ldots,\ A'c^n+B'c^{n-1}+\ldots,$$

que son, en general, funciones irracionales de y. Digo, pues, que todo valor, $y=\beta$, que haga nula á una de estas funciones, es un valor conveniente (núm. 267).

En efecto, supongamos por ejemplo, que β haga nula la funcion

$$A'a^n+B'a^{n-1}+\ldots;$$

y designemos por $x=\alpha$ lo que viene á ser $x=a$ cuando se reemplaza y por β en a: el sistema $(x=\alpha,\ y=\beta)$ hace evidentemente M=0, pues que vimos ya que $x=\alpha$ la verifica, cualquiera que sea y.

En segundo lugar, como $y=\beta$ hace nula la funcion

$$A'a^n+B'a^{n-1}+\ldots,$$

que no es otra cosa que el primer miembro de N=0, en el cual se ha

puesto a en vez de x, hace tambien N=0 al mismo tiempo que $x=\alpha$, valor de a que corresponde á $y=\beta$.

Se ve pues que $(x=\alpha,\ y=\beta)$ forman un sistema comun á las dos ecuaciones M=0 y N=0; de modo que $y=\beta$ es un *valor conveniente*.

Recíprocamente, *todo valor conveniente de* y *debe destruir á una de las funciones anteriores.*

Porque para ser *conveniente* es preciso que satisfaga á las dos ecuaciones al mismo tiempo que á un valor de x; pero todos los valores de x convenientes están comprendidos en $x=a$, $x=b$, $x=c$,...; y en cuanto se hace $x=a$, ó $x=b$,..., el primer miembro de N=0 está de nuevo en una de las funciones anteriores, que debe por consiguiente desvanecerse por la hipótesis $y=\beta$.

De aquí se puede concluir que, *si se iguala á* 0 *el producto de todas estas funciones, la ecuacion que se obtenga será* (sin factor ninguno estraño) *la ecuacion final que debe resultar de la eliminacion de x entre las dos propuestas.*

Esta ecuacion final, que llamaremos *la ecuacion* (Y), es pues

$$(A'a^n+B'a^{n-1}+\ldots)(A'b^n+B'b^{n-1}+\ldots)(A'c^n+B'c^{n-1}+\ldots)=0$$

Su formacion parece fundada en la resolucion completa de la ecuacion M=0 relativamente á x; pero vamos á ver que no es necesaria esta última operacion; y reconoceremos en cuanto va dicho un nuevo *método de eliminacion.*

Observemos primeramente que la ecuacion (Y) no cambia, por las permutaciones que se hagan entre las raíces a, b, c, d,...; de modo que el primer miembro es (núm. 291) una funcion simétrica racional y entera de las raíces de la ecuacion M=0, resuelta con relacion á x. Luego, en virtud del teorema establecido en el número 295, puede espresarse este primer miembro por medio de los coeficientes A, B, C,... de la ecuacion M=0; siendo posible formar la ecuacion (Y) sin que nos veamos obligados á resolver desde luego la ecuacion M=0.

Este método, que es bastante simple para dos ecuaciones del segundo grado, se hace muy trabajoso cuando se intenta aplicarlo á ecuaciones de un grado mas elevado. Sin embargo, tiene sobre el espuesto en el núm. 269 y sobre muchos otros la ventaja de *conducir siempre á la verdadera ecuacion final*, sin la introduccion de ningun factor estraño.

Pero nuestro principal objeto ahora es el de demostrar el teorema *sobre el grado de la ecuacion final.*

302. Para determinar el grado en y de la ecuacion (Y), basta considerar un término de cualquier órden. Cada término, pues, del producto

que compone al primer miembro se forma de la multiplicacion de un término del primer factor por un término del segundo, del tercero..... Sean Ka^h, $K' b^{h'}$, $K'' c^{h''}$,... términos tomados á la ventura en cada uno de los m factores : el término correspondiente del producto será

$$K.\ K'.\ K''...+ a^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$$

Pero, el producto total es simétrico en $a, b, c,...$, luego este término hace parte de una de las funciones simétricas que entran en la composicion de (Y); pudiendo tambien esta funcion parcial hallarse representada (núm. 293) por

$$K.\ K'.\ K''...+Ta^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$$

Basta, pues, determinar el grado mas alto en y de esta funcion.

Ahora bien; si se recuerda la composicion de las fórmulas que dan $S_1, S_2, S_3,...$ (núm. 292) y se atiende á los grados en y de los coeficientes A, B, C,... de la ecuacion M=0 (núm. 300), se verá que $S_1, S_2, S_3,...., S_h$ son del primero, segundo, tercero... y en general, del grado h en y. Luego $S^h \times S^{h'} \times S^{h''},...$ es de un grado marcado por $h+h'+d''+...$; y segun las fórmulas del núm. 294, que dan la espresion de una funcion simétrica cualquiera, $Ta^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$ es tambien del grado $h+h'+h''...$, y no puede pasar de este grado.

Por otra parte, sean $k, k', k'',...$ los esponentes de y en los coeficientes K, K', K'',...; la suma de los esponentes del producto K. K'. K'', es $k+k'+k''...$ Así en la funcion K, K', K''...$\times$ $Ta^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$, la suma de los esponentes es $k+k'+k''+h+h'+h''+...$, pero segun la composicion de la ecuacion N=0, se tiene á lo mas $k+h=n$, $k'+h'=n$, $k''+h''=n,...$

Luego, en fin, la funcion simétrica anterior es á lo mas de un grado marcado por $n+n+n+....$, ó $m \times n$. Q. E. L. Q. Q. D.

Nota. Siendo la *ecuacion de las diferencias* (núm. 273) resultado de la eliminacion de x entre las ecuaciones X=0, y

$$Y+ \frac{Z}{2} u+ \frac{V}{2.\ 3} u^2 +...+u^{m-1}=0,$$

en que la primera es del grado m en x, y la segunda de $m-1$ en x y u, se sigue que la ecuacion final debe ser del grado $m\ (m-1)$; y esto es efectivamente lo que reconocimos (núm. 275).

El teorema precedente es igualmente aplicable á un número m de ecuaciones que contengan igual número de incógnitas.

CAPÍTULO VIII.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS CON UNA Ó MUCHAS INCÓGNITAS.

Los principios que hemos establecido en el capítulo precedente son aplicables á todas las ecuaciones de cualquier naturaleza que sean sus coeficientes, numéricos ó algebráicos; y estos principios deben considerarse como los elementos de los métodos empleados para resolver las ecuaciones de grado superior.

Dijimos ya que los analistas no han llegado hasta ahora mas que á la resolucion de las ecuaciones generales de tercero y cuarto grado. Pero las fórmulas que han obtenido para los valores de las incógnitas son tan complicadas y de uso tan poco cómodo, cuando es dado aplicarlas (lo que no es siempre posible), que se debe mirar el problema de la resolucion de las ecuaciones algebráicas de un grado cualquiera como mas curioso que útil. Tambien han dirigido muy principalmente los analistas sus esfuerzos hácia la resolucion de las *ecuaciones numéricas*, es decir, de las que provienen de la traduccion algebráica de un problema cuyos datos son números particulares, y han hallado métodos con ayuda de los cuales :

Dada una ecuacion numérica de un grado cualquiera (con los coeficientes reales) se pueden siempre determinar sus raíces.

El conjunto de estos métodos es el que nos proponemos desarrollar en la primera parte de este capítulo.

La segunda tendrá por objeto el complemento de la eliminacion, ó la resolucion de las ecuaciones numéricas con muchas incógnitas.

Primera parte. *Ecuaciones numéricas de una incógnita.* (Para la generalidad de nuestros razonamientos representaremos tambien la ecuacion propuesta por $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+...=0$; pero supondremos que las letras P, Q..., designan números particulares y cantidades reales, positivas ó negativas.)