que compone al primer miembro se forma de la multiplicacion de un término del primer factor por un término del segundo, del tercero..... Sean Ka^h, $K' b^{h'}$, $K'' c^{h''}$,... términos tomados á la ventura en cada uno de los m factores : el término correspondiente del producto será

$$K.\ K'.\ K''...+ a^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$$

Pero, el producto total es simétrico en $a, b, c,...$, luego este término hace parte de una de las funciones simétricas que entran en la composicion de (Y); pudiendo tambien esta funcion parcial hallarse representada (núm. 293) por

$$K.\ K'.\ K''...+Ta^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$$

Basta, pues, determinar el grado mas alto en y de esta funcion.

Ahora bien; si se recuerda la composicion de las fórmulas que dan $S_1, S_2, S_3,...$ (núm. 292) y se atiende á los grados en y de los coeficientes A, B, C,... de la ecuacion M=0 (núm. 300), se verá que $S_1, S_2, S_3,...., S_h$ son del primero, segundo, tercero... y en general, del grado h en y. Luego $S^h \times S^{h'} \times S^{h''},...$ es de un grado marcado por $h+h'+d''+...$; y segun las fórmulas del núm. 294, que dan la espresion de una funcion simétrica cualquiera, $Ta^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$ es tambien del grado $h+h'+h''...$, y no puede pasar de este grado.

Por otra parte, sean $k, k', k'',...$ los esponentes de y en los coeficientes K, K', K'',...; la suma de los esponentes del producto K. K'. K'', es $k+k'+k''...$ Así en la funcion K, K', K''...$\times$ $Ta^h\ b^{h'}\ c^{h''}...$, la suma de los esponentes es $k+k'+k''+h+h'+h''+...$, pero segun la composicion de la ecuacion N=0, se tiene á lo mas $k+h=n$, $k'+h'=n$, $k''+h''=n,...$

Luego, en fin, la funcion simétrica anterior es á lo mas de un grado marcado por $n+n+n+....$, ó $m \times n$. Q. E. L. Q. Q. D.

Nota. Siendo la *ecuacion de las diferencias* (núm. 273) resultado de la eliminacion de x entre las ecuaciones X=0, y

$$Y+ \frac{Z}{2} u+ \frac{V}{2.\ 3} u^2 +...+u^{m-1}=0,$$

en que la primera es del grado m en x, y la segunda de $m-1$ en x y u, se sigue que la ecuacion final debe ser del grado $m\ (m-1)$; y esto es efectivamente lo que reconocimos (núm. 275).

El teorema precedente es igualmente aplicable á un número m de ecuaciones que contengan igual número de incógnitas.

CAPÍTULO VIII.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS CON UNA Ó MUCHAS INCÓGNITAS.

Los principios que hemos establecido en el capítulo precedente son aplicables á todas las ecuaciones de cualquier naturaleza que sean sus coeficientes, numéricos ó algebráicos; y estos principios deben considerarse como los elementos de los métodos empleados para resolver las ecuaciones de grado superior.

Dijimos ya que los analistas no han llegado hasta ahora mas que á la resolucion de las ecuaciones generales de tercero y cuarto grado. Pero las fórmulas que han obtenido para los valores de las incógnitas son tan complicadas y de uso tan poco cómodo, cuando es dado aplicarlas (lo que no es siempre posible), que se debe mirar el problema de la resolucion de las ecuaciones algebráicas de un grado cualquiera como mas curioso que útil. Tambien han dirigido muy principalmente los analistas sus esfuerzos hácia la resolucion de las *ecuaciones numéricas*, es decir, de las que provienen de la traduccion algebráica de un problema cuyos datos son números particulares, y han hallado métodos con ayuda de los cuales :

Dada una ecuacion numérica de un grado cualquiera (con los coeficientes reales) se pueden siempre determinar sus raíces.

El conjunto de estos métodos es el que nos proponemos desarrollar en la primera parte de este capítulo.

La segunda tendrá por objeto el complemento de la eliminacion, ó la resolucion de las ecuaciones numéricas con muchas incógnitas.

Primera parte. *Ecuaciones numéricas de una incógnita.* (Para la generalidad de nuestros razonamientos representaremos tambien la ecuacion propuesta por $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+...=0$; pero supondremos que las letras P, Q..., designan números particulares y cantidades reales, positivas ó negativas.)

§ I. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES. — LÍMITES DE LAS RAÍCES.

303. PRIMER PRINCIPIO. *Si dos números* p *y* q (de signos cualesquiera) *sustituidos en lugar de* x *en una ecuacion numérica* X=0, *dan dos resultados de signos contrarios, estos dos números comprenden por lo ménos una raiz real de la propuesta.*

Ántes de demostrar esta proposicion haremos ver que si un *número* a *puesto en lugar de* x *en un polinomio* X, funcion entera de x (núm. 230), pero cuyos coeficientes son numéricos y reales, *ha dado cierto resultado* A, *se podrá*, reemplazando x por $a+h$, y tomando h bastante pequeño, *obtener un nuevo resultado que difiera del primero en una cantidad menor que cualquiera magnitud dada.*

Sean en efecto A, B, C, D..... en lo que se convierten los polinomios X, Y, $\frac{Z}{2}$, $\frac{V}{2.3}$,... (núm. 264) cuando se sustituye en ellos a en vez de x; el polinomio X, por la sustitucion de $a+h$, se volverá

$$A+Bh+Ch^2+Dh^3+\ldots+h^m,$$

ó bien

$$A+h(B+Ch+Dh^2+\ldots+h^{m-1}).$$

La cantidad h (B+Ch+...) es la espresion de la diferencia entre los resultados de las sustituciones de $a+h$ y de a; y esta diferencia es la que debe reconocerse como susceptible de ser menor que cualquiera cantidad dada, con un valor conveniente de h.

Siendo, pues, B, C, D,... cantidades finitas de signos cualesquiera, consideremos el caso mas desfavorable que puede presentarse, cuando fuesen todas del mismo signo é iguales á K (la mayor de ellas). La espresion h (B+Ch+...) se convierte en

$$Kh(1+h+h^2+\ldots+h^{m-1}),$$

ó (núm. 31) $\frac{Kh\,(1-h^m)}{1-h}$, cantidad menor que $\frac{K\,h}{1-h}$, en el caso de $h<1$.

Sentado esto, si se quiere, por ejemplo, que la diferencia sea menor que una cantidad dada N, no hay mas que suponer

$\frac{K\,h}{1-h}$ =ó <N, lo que da h= ó < $\frac{N}{N+K}$; y todo valor de h que satisfaga á esta última condicion satisfará necesariamente la desigualdad

$$Kh\,(1+h+h^2+\ldots+h^{m-1})<N,$$

y con mayor razon á la desigualdad

$$h(B+Ch+Dh^2+\ldots)<N$$

que es por cierto el resultado pedido.

Podemos ya actualmente demostrar el principio enunciado arriba, conviniendo, para fijar las ideas, en que, de los dos números p y q, p será el *menor*, es decir, el que se aproxime mas al *infinito negativo*. Sentado esto, dando, por hipótesis, los dos números p y q, puestos en lugar de x en la ecuacion X=0, dos resultados de *signos contrarios*, P_1 y Q_1 se concibe sin dificultad que se haga variar x por grados insensibles desde p hasta q; variando tambien los resultados de las sustituciones sucesivas por grados insensibles, es decir, de modo que no difieran uno de otro sino en cantidades tan pequeñas como se quiera (lo que se espresa diciendo que el polinomio X se halla sometido á la ley de continuidad en el intervalo de P_1 á Q_1). Ahora bien: una cantidad que es constantemente finita no puede pasar de positiva á negativa, ó recíprocamente, sino pasando por el valor 0. Luego entre los números comprendidos entre p y q, hay *al ménos uno* que da un resultado igual á 0; y este número es entónces una raíz de la ecuacion X=0.

304. SEGUNDO PRINCIPIO. De que dos números sustituidos en lugar de x en una ecuacion dan dos resultados de signos contrarios, se debe concluir que comprenden *por lo ménos una raiz real*; pero no puede afirmarse que solo comprendan una, *pudiendo comprender un número cualquiera impar de ellas.*

Lo cual resulta de otra proposicion que vamos á demostrar, y que consiste en que,

Si dos números comprenden un número impar cualquiera, 2n+1, *de raices reales, los resultados de su sustitucion en lugar de* x *son de signos contrarios; y si comprenden un número par cualquiera,* 2n. *los resultados de su sustitucion son necesariamente del mismo signo.*

Para evidenciar esta proposicion, designemos por a, b, c,... las raíces de la ecuacion propuesta X=0, que se suponen comprendidas entre dos números dados p y q, de *signos cualesquiera*, y por Y el

producto de los factores de primer grado en x, que corresponden á las raíces reales no comprendidas, y las raíces imaginarias.

El primer miembro, X, de la ecuacion puede ponerse bajo la forma $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\times Y$.

Sustituyamos ahora en el producto precedente, p y q en lugar de a (siendo $p<q$); obtendremos los dos resultados

$$(p-a)(p-b)(p-c)\ldots\times Y',$$
$$(q-a)(q-b)(q-c)\ldots\times Y'',$$

designando Y′ é Y″ en lo que se convierte Y cuando x es reemplazada por p y q (estas dos cantidades Y′ é Y″ son *necesariamente del mismo signo;* porque de otro modo, en virtud del primer principio, Y tendria aun por lo ménos una raíz real comprendida entre p y q, lo cual seria contra la hipótesis).

Sentado esto, para determinar mas fácilmente los signos de los dos resultados anteriores, dividamos el primero por el segundo; sale

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\ldots\times Y'}{(q-a)(q-b)(q-c)\ldots\times Y''},$$

ó bien $$\frac{p-a}{q-a}\times\frac{p-b}{q-b}\times\frac{p-c}{q-c}\times\ldots\times\frac{Y'}{Y''}.$$

Pero comprendiendo p y q á las raíces $a, b, c, d, \ldots$, y siendo $p<q$, se tiene necesariamente $p<a, b, c, d, \ldots$,

y $q>a, b, c, d, \ldots$;
de donde se deduce $p-a, p-b, p-c, \ldots <0$,
y $q-a, q-b, q-c, \ldots >0$;

uego, pues que $p-a$ y $q-a$ son de signos contrarios, lo mismo que $p-b$ y $q-b$, $p-c$ y $q-c, \ldots$ los cocientes parciales $\frac{p-a}{q-a}, \frac{p-b}{q-b}, \frac{p-c}{q-c}, \ldots$ son todos negativos: ademas $\frac{Y'}{Y''}$ es esencialmente positivo, pues que Y′ é Y″ son de un mismo signo; de manera que el producto, $\frac{p-a}{q-a}\times\frac{p-b}{q-b}\times\frac{p-c}{q-c}\times\ldots\times\frac{Y'}{Y''}$ será *negativo* si las raíces omprendidas $a, b, c, \ldots$ son en número impar y *positivo* si es par.

Luego, en fin, los dos resultados $(p-a)(p-b)(p-c)\ldots\times Y'$ y $(q-a)$

$(q-b)(q-c)\ldots\times Y''$, serán de signos contrarios ó del mismo signo, segun que las raíces comprendidas entre p y q sean en número *impar* ó *par*.

Consecuencia. Resulta necesariamente de esta proposicion, que *si dos números sustituidos en lugar de* X *en una ecuacion, dan dos resultados de signos contrarios, comprenden por lo ménos una raíz, pero pueden tambien comprender un número impar cualquiera de ellas; y si dan dos resultados del mismo signo, ó no comprenden raíces, ó comprenden un* NÚMERO PAR cualquiera de ellas.

Límites de las raíces reales de las ecuaciones.

Los diversos métodos inventados para la resolucion de las ecuaciones numéricas, se reducen en último análisis, á sustituir en la ecuacion números particulares, que se reconocen entónces como *raíces*, por verificarla, ó que al ménos se considera que deben comprender una ó muchas raíces.

Pero reflexionando sobre el crecimiento rápido del primer término (á medida que aumenta x) relativamente á los otros que son de grado menor, se conoce que debe existir un número susceptible de hacer á solo este primer término superior á todos los demas reunidos, es decir, á su *suma aritmética* (núm. 62), y que por consiguiente, sustituido en la ecuacion da necesariamente un resultado del mismo signo que este primer término (que puede mirarse siempre como *positivo*). Este número, pues, es un límite, mas allá del cual llegaria á ser inútil cualquiera sustitucion, pues que se estaria seguro de obtener resultados constantemente positivos y jamas *nulos*. Así que conviene hacer preceder al desarrollo de los métodos de resolucion la determinacion de un número semejante.

305. Llámase LÍMITE SUPERIOR de las raíces positivas de una ecuacion cualquiera, á *todo número que escede á la mayor de las raíces positivas de esta ecuacion.*

Resulta de esta difinicion que este límite es susceptible de una infinidad de determinaciones, porque tan luego como se reconoce á un número superior á la mayor raíz positiva, cualquiera otro número mayor que él goza con mas razon de esta propiedad; luego entónces debemos proponernos obtener el límite mas pequeño posible. Se está,

pues, seguro de obtener un límite así que se ha obtenido *un número que, sustituido en lugar de* x, *hace positivo al primer miembro siendo al mismo tiempo tal, que cualquiera otro número mayor daria tambien un resultado positivo.*

Ocupémonos, pues, de la determinacion de un número que goce de esta doble propiedad.

306. Comencemos ante todo por resolver la cuestion siguiente: *se pide un número que, sustituido en lugar de* x *en una ecuacion, haga al primer término* x^m *mayor, él solo, que la* SUMA ARITMÉTICA *de todos los demas.*

Supongamos al efecto que todos los términos de la ecuacion sean negativos, á partir del segundo, de modo que se tenga

$$x^m - Px^{m-1} - Qx^{m-2} - \ldots - Tx - U = 0;$$

se trata ahora de encontrar para x un número que haga

$$(1) \qquad x^m > Px^{m-1} + Qx^{m-1} + \ldots + Tx + U.$$

De modo que si se designa por K el mayor de todos los coeficientes, y se supone la nueva desigualdad

$$(2) \qquad x^m > Kx^{m-1} + Kx^{m-2} + \ldots + Kx + K,$$

es evidente que todo número que, colocado en lugar de x satisfaga á esta, satisfará á la precedente con mayor razon.

Pongamos ademas el factor x^m en evidencia en la desigualdad (2); y se convertirá en

$$(3) \qquad x^m > x^m\left(\frac{K}{x} + \frac{K}{x^2} + \ldots + \frac{K}{x^{m-1}} + \frac{K}{x^m}\right);$$

y se ve, bajo esta forma, que cuando un número sustituido en lugar de x ha satisfecho la desigualdad, cualquiera otro número mayor la satisfará tambien; porque la suma de las cantidades $\frac{K}{x} + \frac{K}{x^2} + \ldots$ se hace tanto menor cuanto mayor es x.

Sentado esto, si se hace desde luego $x = K$ en la desigualdad (3) se tiene á K^m para primer miembro, y para el segundo,

$$K^m\left(1 + \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} + \ldots\right),$$

cantidad mayor que K^m. Así el número K no satisface á la desigualdad.

Ensayemos ahora K+1; y obtendremos $(K+1)^m$ para el primer miembro.

En cuanto al segundo, para calcular mas fácilmente su valor, subiremos á la espresion

$$Kx^{m-1} + Kx^{m-2} + \ldots + Kx + K,$$
$$K(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$$

que, segun la propiedad del número 31, ó segun la fórmula del número 193, vuelve á ser $K.\frac{x^{m-1}}{x-1}$;

y reemplazamos en ella x por K+1.

Sale por esta sustitucion,

$$K.\frac{(K+1)^m - 1}{K+1-1}, \text{ ó reduciendo, } K+1)^m - 1,$$

resultado menor que $(K+1)^m$.

Por otra parte reconocemos ya que cualquier otro número mayor satisfaria con doble razon á la desigualdad (3).

Luego en fin (K+1), ó el *mayor coeficiente* de la ecuacion, *aumentado en la unidad, y todo número superior á* (K+1), gozan de la propiedad de hacer al *primer término* x^m por sí solo *mayor que la suma aritmética de todos los demas.*

307. *Límite ordinario de las raices positivas.* El número que se acaba de obtener puede considerarse como un primer límite, porque como este número, ó cualquiera otro mayor, hace al primer término superior á la suma de todos los demas, los resultados de las sustituciones de estos números en lugar de x deben ser constantemente positivos; pero este límite es por lo comun demasiado grande, porque la ecuacion encierra generalmente muchos términos positivos. Busquemos, pues, *un límite mas aproximado* á la mayor raíz.

Designemos por x^{m-1} la potencia de x, correspondiente al primer término negativo que haya despues del término x^m, y consideremos el caso evidentemente mas desfavorable (pero mas fácil de tratar), ó sea el en que todos los términos son negativos á partir de x^{m-1}, y afectados del mayor de los coeficientes negativos que entran en la ecuacion.

Sea S este coeficiente; procuremos primeramente satisfacer la condicion

$$(1) \qquad x^m > Sx^{\frac{m-n}{+}} Sx^{\frac{m-n-1}{+}} \ldots + Sx + S;$$

ó, poniendo el factor x^m en evidencia,

$$(2) \qquad x^m > x^m\left(\frac{S}{x^n}+\frac{S}{x^{n+1}}+\ldots+\frac{S}{x^{m-1}}+\frac{S}{x^m}\right).$$

Esta otra forma prueba ya que cuando se haya encontrado para x un número que satisfaga á la desigualdad, la satisfará tambien cualquier otro número mayor, pues la cantidad de entre paréntesis se hace menor cuanto mayor es x.

Si se supone, pues, $x^n = S$, ó $x = \sqrt[n]{S} = S'$, el primer miembro de la desigualdad (2) se convierte en S'^m, y el segundo en

$$S'^m\left(1+\frac{S'^n}{S'^{n+1}}+\frac{S'^n}{S'^{n+2}}+\ldots\right)$$

cantidad mayor que S'^m.

Luego S' ó $\sqrt[n]{S}$ no satisface á la desigualdad.

Haciendo actualmente $x = S'+1$ (ó $\sqrt[n]{S}+1$), se obtiene desde luego $(S'+1)^m$ para el primer miembro.

En cuanto al segundo, para calcular su valor es mucho mas sencillo subir á la desigualdad (1), cuyo segundo miembro vuelve a ser (número 31 ó 393)

$$S.\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1}.$$

Reemplazando x por $S'+1$, se tiene para esta espresion,

$$S.\frac{(S'+1)^{m-n+1}-1}{S'+1-1}, \text{ ó } S'^{n-1}\left[(S'+1)^{m-n+1}-1\right]$$

[á causa de $S = S'^n$]; ó bien tambien efectuando los cálculos,

$$(S'+1)^m - S'^{n-1}.$$

Esta última espresion, pues, es menor que $(S'+1)^m$; luego $S'+1$ ó $1+\sqrt[n]{S}$, y cualquiera otro número mayor, gozan de la propiedad de hacer al primer término, mayor, por sí solo, que la suma aritmética de los únicos términos que son negativos en la ecuacion, y por consiguiente, de dar para el primer miembro *resultados constantemente positivos.*

Luego en fin $1+\sqrt[n]{S}$, ó la *unidad aumentada de la raiz del mayor coeficiente negativo, raiz de un grado marcado por el número de los términos que preceden al primer término negativo, es un límite superior de las raices positivas de la ecuacion.*

Cuando el primer término negativo lo es el segundo de la ecuacion, es preciso hacer $n=1$, y el límite se convierte en $S+1$, ó el *mayor coeficiente negativo aumentado en la unidad;* este es el límite que se emplea mas comunmente.

Si son positivos los dos primeros términos, ó falta el segundo, se tiene $n=2$, y el límite es entónces $1+\sqrt{S}$.

En caso de $n=3$ se tiene para límite $1+\sqrt[3]{S}$; y así sucesivamente.

Tomemos para ejemplos las ecuaciones siguientes:

1°. $x^4-5x^3+37x^2-3x+39=0$ $\qquad S+1=5+1=6$;

2°. $x^4+7x^4-12x^3-49x^2+52x-13=0$, $\qquad 1+\sqrt{S}=1+\sqrt{49}=8$;

3°. $x^4+11x^2-25x-67=0$ $\qquad 1+\sqrt[3]{S}=1+\sqrt[3]{67}=6$;

4°. $3x^3-2x^2-11x+4=0$, $\qquad S+1=\frac{11}{3}+1<5$.

Nota. Se ha dividido primeramente la ecuacion por 3 en el último ejemplo, ántes de establecer el límite, porque en la investigacion del límite general se ha supuesto igual á la unidad el coeficiente del primer término.

Se acostumbra ademas espresar este límite en números enteros.

308. Muchas veces, por medio de una transformacion ejecutada sobre la ecuacion, se obtiene un límite menor que $\sqrt[n]{S}+1$.

Consideremos por ejemplo la primera de las ecuaciones anteriores, la cual puede ponerse bajo la forma

$$x^3(x-5)+37x\left(x-\frac{3}{37}\right)+39=0.$$

Es pues visible que poniendo en ella por x, el 5 ó cualquiera otro número mayor, se obtendria un resultado constantemente positivo; luego 5 es un límite, al paso que se ha encontrado 6 segun la fórmula.

Se tiene igualmente para la segunda ecuacion,

$$x^2(x^3-49)+7x^3\left(x-\frac{12}{7}\right)+52\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$$

(reuniendo el primero y cuarto término, el segundo y el tercero, etc.); de modo que $x=\sqrt[3]{49}$, es decir 4, ó cualquiera otro número mayor daria un resultado positivo.

El artificio de este método, que no puede aplicarse sino á ciertas ecuaciones, consiste *en descomponer el primer miembro en muchas partes compuestas cada una de dos factores, el primero de los cuales sea un monomio positivo, y el otro un binomio en* x, *cuyo segundo término sea numérico y negativo: y en determinar luego á* x *de modo que todos los factores entre paréntesis sean positivos.*

Rara vez es aplicable este método á ecuaciones que encierren muchos términos consecutivos afectados del signo —.

No puede aplicarse, por ejemplo, á una ecuacion tal como

$$x^5-5x^4-13x^3+17x^2-69=0.$$

Sin embargo, como el primer miembro de esta ecuacion puede ponerse bajo la forma

$$x^5-5x^4-13x^3+17\left(x^2-\frac{69}{17}\right),$$

se conoce fácilmente que 13+1 ó 14 seria un límite superior.

309. *Método de Newton para determinar el límite superior, mas pequeño posible* (en números enteros).

Sea X=0 la ecuacion propuesta; si se hace en esta ecuacion $x=x'+u$, siendo x' una indeterminada, se obtiene (núm. 262) la transformada $X'+Y'u+\frac{Z'}{2}+\ldots+u^m=0$, cuyos coeficientes se obtienen con arreglo á una ley conocida.

Sentado esto, concibamos que por ensayos sucesivos se haya llegado á determinar para x un número que sustituido en X', V', $\frac{Z'}{2}$..., haga á todos estos coeficientes positivos á la vez: digo que este número es *superior á la mayor raiz positiva de la ecuacion* X=0.

En efecto, siendo los coeficientes de la transformada, positivos todos, ningun número absoluto puede verificar esta ecuacion; asi es que los valores reales de u deben ser *todos negativos;* pero de la ecuacion $x=x'+u$, se saca $u=x-x'$; y para que los valores de u que corresponden á cada valor de x y al valor de x' (ya determinado) sean negativos es absolutamente preciso que el mayor valor

positivo de x sea menor que el valor de x'; que *era lo que convenia demostrar.*

Hé aquí por otra parte el modo de aplicar el método:

Sea la ecuacion $x^4-5x^3-6x^2-19x+7=0.$

Como x' es un carácter indeterminado, se puede conservar la letra x en la formacion de los polinomios derivados; y se tiene

$$X=x^4-5x^3-6x^2-19x+7,$$
$$Y=4x^3-15x^2-12x-19,$$
$$\frac{Z}{2}=6x^2-15x-6,$$
$$\frac{V}{2.\,3}=4x-5.$$

Queda, pues, reducida la cuestion, como acaba de verse, á encontrar para x un número entero (el menor posible) que haga positivos á todos estos polinomios.

Comencemos por el polinomio del primer grado: es visible que 2, ó cualquiera otro número > 2 lo hace positivo.

2, sustituido en el polinomio del segundo grado, da un resultado negativo; pero 3 ó cualquiera otro número > 3 da un resultado positivo.

3 y 4, sustituidos en el polinomio del tercer grado, dan un resultado negativo; pero 5 lo da positivo, y lo mismo sucederia con cualquiera otro número mayor.

En fin, 5, sustituido en X, da un resultado negativo; y lo mismo sucede con el 6; porque los tres primeros términos $x^4-5x^3-6x^2$ equivalen á $x^3(x-5)-6x^2$, espresion que se reduce á 0 tan luego como se hace $x=6$; pero $x=7$ da evidentemente un resultado positivo.

Luego 7 *es un límite superior de las raíces positivas de la propuesta*, y es ademas en números enteros el límite menor, pues acaba de reconocerse que 6 daba un resultado negativo, de donde se sigue (número 303) que hay por lo ménos una raíz comprendida entre 6 y 7.

Se obtendrá *en general* por este método el límite menor en números enteros, siempre que se haya reconocido que aunque cierto número entero K y cualquiera *otro número mayor* hacen *positivos* todos los polinomios derivados y *negativo* el polinomio propuesto, K+1 hace á este *positivo*. El límite menor es entónces K+1.