Sustitúyase sucesivamente $+1$ y -1 en la propuesta, y desígnense por M y M' los valores numéricos de los resultados de esta doble sustitucion.

(Si uno de los resultados fuese 0, en cuyo caso $+1$ ó -1 seria raíz, se deberia empezar por suprimir esta raíz en la propuesta ántes de aplicar la regla.)

1°. *Debe desecharse todo divisor positivo del último término, que, disminuido de 1, no divida á* M, *y que aumentado de 1, no divida á* M'.

2°. *No debe desecharse ningun divisor negativo, cuyo valor numérico, aumentado de 1, no divida á* M, *y disminuido de 1, no divida á* M'.

Para poner mas fácilmente en evidencia estos dos caractéres de exclusion, conviene descomponer desde luego los dos resultados M y M en sus divisores.

Supongamos, por ejemplo, que se haya propuesto determinar las raíces conmensurables de la ecuacion

$$x^4-5x^3-37x^2+257x-360=0.$$

El límite superior de las raíces positivas de esta ecuacion es $37+1$ ó 38, porque $257x-360$ se convierten en $257\left(x-\frac{360}{257}\right)$; y el límite superior de las negativas es $-(1+\sqrt{360})$ ó -20.

Los divisores de 360 que deben someterse á las pruebas del método del núm. 320, son, pues,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30,\ 36,$$
$$\text{y } -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -8,\ -9,\ -10,\ -12,\ -15,\ -18;$$

siendo el resultado de la sustitucion de $+1$ en la propuesta, haciendo abstraccion del signo, 144 ó $2^4.\ 3^2$; y el de la sustitucion de -1; 648 ó $2^3.\ 3^4$.

Sentado esto, recorramos primeramente los divisores positivos, á partir de 36 que es el mayor.

$36-1$ ó $35=7\times5$ no divide á 144 que es igual á $2^4.\ 3^2$; de modo que debe desecharse 36.

Por la misma razon se desecharán, 30, 24, 20, 18, 15, 12.

$10-1$, ó 9, divide á 144; pero $10+1$ ó 11 no divide á 648 que es igual á $2^3.\ 3^4$; de modo que debe desecharse 10.

Se reconocerá igualmente que deben desecharse 9, 8, 6, 4; es decir, que los únicos divisores positivos que satisfacen á la regla son 5, 3 y 2.

Pasemos á los divisores negativos: $18+1$, ó 19, no divide á 144; de modo que debe desecharse 18.

$15+1$, ó 16, divide á 144; pero $15-1$, ó 14, no divide á 648; luego debe desecharse 15.

Se veria tambien que deben desecharse -12, -10, -9, -8, -6, -4. No deben someterse, pues, al método del núm. 320 sino los divisores -5, -3, y -2.

Aplicando este método á los divisores

$$+5, +3, +2, -2, -3, -5,$$

se reconocerá que 5 es el único que llena todas las condiciones, y es por consiguiente raíz de la propuesta.

Efectuemos la division por $x-5$; y saldrá por resultado.

$$x^3-37x+72=0;$$

ecuacion que no puede tener otra vez á 5 por raíz, pues que 5 no divide á 72. De modo que esta ecuacion no tiene ya mas que raíces inconmensurables y raíces imaginarias.

323. Hé aquí otros ejercicios:

1°. $$x^4-5x^3+25x-21=0,$$
$$(x-1)(x-3)(x^2-x-7)=0;$$

2°. $$15x^5-19x^4+6x^3+15x^2-19x+6=0,$$
$$(3x-2)(5x-3)(x+1)(x^2-x+1)=0;$$

3°. $$9x^6+30x^5+22x^4+10x^3+17x^2-20x+4=0,$$
$$(x+2)^2(3x-1)^2(x^2+1)=0.$$

[Para resolver las dos últimas ecuaciones, es preciso primeramente hacer desaparecer el coeficiente del primer término, segun la regla del núm. 265; aplicar en seguida el método del núm. 320 á las dos transformadas; y despues de haber obtenido las raíces enteras de estas transformadas, sustituir en la ecuacion $x=\frac{y}{k}$, que ha servido para la transformacion, los valores de las raíces obtenidas.]

324. Lo que precede basta para la determinacion de las raíces conmensurables de cualquiera ecuacion numérica cuyos coeficientes son *racio-*

nales, enteros ó *fraccionarios*. Sin embargo observaremos que hay cuestiones cuyos enunciados conducen á ecuaciones de grado superior, y que no admiten por su naturaleza mas que números enteros por *soluciones;* es decir, que toda solucion fraccionaria conmensurable ó inconmensurable debe mirarse como enteramente estraña á la cuestion.

Supongamos, por ejemplo, que se haga *propuesto determinar la base del sistema de numeracion en que el número* 2147 (*sistema decimal*), *se halle representado por el conjunto de las cifras* 32042 (sistema que se busca).

Sea x *la base* desconocida; los términos 2, $4x$, 0. x^2, $2x^3$, $3x^4$, espresarán los valores relativos de las cifras 2, 4, 0, 2, 3, del número 32042: de modo que se tiene la ecuacion

$$3x^4+2x^3+0.\ x^2+4x+2=2147,$$

ó bien

$$3x^4+2x^3+4x-2145=0,$$

que se ha de resolver en nuestros números enteros y positivos: porque x, por su naturaleza, debe ser un número entero absoluto.

Así, pues, por poco que se reflexione acerca del método espuesto en el núm. 320 para encontrar las raíces enteras de una ecuacion cuyo coeficiente del primer término es la unidad, se verá que es igualmente aplicable al caso en que el coeficiente del primer término es un número entero cualquiera; la *única diferencia*, si la ecuacion es, por ejemplo, de la forma

$$Ax^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Sx^2+Tx+U=0,$$

consiste en que, *cuando se ha llegado á la última de las condiciones de que es susceptible el método*, el resultado en lugar de ser igual á -1, debe ser igual á $-A$.

Se puede pór otra parte reconocer la exactitud de esta asercion, reproduciendo las mismas trasformaciones y razonamientos que se hicieron en el núm. 319.

Así, por ejemplo, para hallar las raíces *conmensurables enteras* de una ecuacion cuyo primer término tiene un coeficiente diferente de la unidad, es inútil recurrir á la desaparicion de este coeficiente, transformacion (núm. 265) que tiene el inconveniente de conducir á una ecuacion cuyos coeficientes son muy grandes por lo general.

Con sujecion á esto, busquemos las raíces enteras de la ecuacion

$$3x^4+2x^3+4x-2145=0.$$

El límite superior de las raíces positivas es (núm. 307)

$$1+\sqrt[4]{2145}=1+7=8;$$

el número 2145 es descomponible en $3\times5\times11\times13$; de modo que no cabe ensayar mas que los números 3 y 5;

5,	3,
—429,	—715,
—425,	—711,
— 85,	—237,
— 17,	— 79,
— 15,	— 77,
— 3,	— ».

El número 5 solo da por último resultado, —3, ó el coeficiente del primer término, tomado como signo contrario; luego *cinco* es la base del sistema que se busca.

En efecto, 32042, escrito en el sistema *quinario* equivale en el sistema decimal á

$$3\times5^4+2\times5^3+0\times5^2+4\times5+2,$$

ó efectuando,

$$3\times625+2\times125+4\times5+2=2147.$$

Pueden servir para ejercitarse los ejemplos siguientes:

1º. *Determinar la base del sistema de numeracion en que* 7329 (sistema decimal) *se halla representado por* 5563 (sistema que se busca). [x=*once.*]

2º. *La base del sistema en que* 81479 (sistema decimal) *se halla representado por* 456356 (sistema que se busca). [x=*siete.*]

Investigacion de los divisores conmensurables de segundo grado.

325. *Observaciones preliminares.* El método de las raíces conmensurables, espuesto en el número 320, se llama tambien *método de los divisores conmensurables de primer grado*, porque conociendo una raíz conmensurable, entera ó fraccionaria, de una ecuacion, se puede (núm. 238) dividir el primer miembro por el factor del primer grado

en x, correspondiente á esta raíz; y los coeficientes de este factor son necesariamente conmensurables tambien.

Cuando una ecuacion numérica se halla desembarazada de sus divisores conmensurables de primer grado, la ecuacion resultante no tiene mas que raíces reales inconmensurables y raíces imaginarias; pero se concibe que muchos de los factores de primer grado que corresponden á estas raíces, aunque tienen coeficientes inconmensurables, pueden muy bien, por su combinacion dos á dos, dar orígen á productos cuyos coeficientes sean racionales; así es como

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=x^2-3,$$

$$(x-1+\sqrt{-5})(x-1-\sqrt{-5})=x^2-2x+6.$$

Sin embargo, si hubiese algun medio de descubrir en una ecuacion los divisores conmensurables del segundo grado, igualándolos á cero, se deducirian de ellos raíces de la ecuacion propuesta; obteniéndolas ademas bajo su verdadera forma.

Vamos á ver de qué manera conducen á este objeto los principios de la eliminacion y el método del núm. 320.

326. Sea $X=0$ una ecuacion desembarazada de sus divisores conmensurables del primer grado.

Designemos por x^2+px+q uno cualquiera de los divisores del segundo grado de X; siendo p y q dos *indeterminadas* cuyos valores es menester obtener *en números conmensurables*, si es posible.

Para ello *dividamos* X *por* x^2+px+q : *y concibamos que se haya llevado la operacion hasta llegar á una resta del primer grado en* x *de la forma* $Mx+N$, siendo M y N funciones indeterminadas de p y de q. Igualando á cero esta resta, se establecerá la condicion de que x^2+px+q se convierte en divisor exacto de X; ademas esta division debe hacerse independientemente de cualquier valor particular attribuido á x; luego, en virtud del principio del núm. 180 sobre las ecuaciones idénticas, *la ecuacion* $Mx+N$ *se dividirá* necesariamente en otras dos,

$$M=0.\ N=0,\ \text{ó bien}\ F(p,q)=0,\ F'(p,q)=0.$$

Sentado esto, la cuestion se reducirá á *encontrar* (en números conmensurables) todos los sistemas de valores de p y de q propios para verificar estas dos ecuaciones.

Se empezará por formar con arreglo á los métodos conocidos, *la*

ecuacion final en q, *á la cual se aplicará el método de las raíces conmensurables* (núm. 320). *Obtenidos todos los valores racionales de* p *se los sustituirá* (núm. 270) *en la resta del primer grado relativamente á* q, *cuya resta, igualada en seguida á cero, dará los valores racionales de* q, *correspondientes á los valores de* p *ya encontrados. Y finalmente, se sustituirá cada uno de los sistemas de valores de* p *y de* q *en el trinomio* x^2+px+q; *lo que dará otros tantos divisores conmensurables de segundo grado.*

Es evidente que la ecuacion final en p debe ser de un grado marcado por $m\left(\frac{m-1}{2}\right)$, siendo m el grado de la ecuacion, pues que esta es la espresion del número total de los divisores conmensurables ó inconmensurables de segundo grado.

Por aquí se podrá venir en conocimento de lo complicado que este método es en la práctica, aunque fácil en teoría.

Se ve á primera vista lo que habria que hacer para obtener los divisores conmensurables de 3º, y 4º.... grado; pero estas últimas cuestiones no son de utilidad alguna.

---

§ III. INVESTIGACION DE LAS RAÍCES REALES INCONMENSURABLES.

Cuando se ha despojado á una ecuacion de todos los divisores de primer grado que corresponden á sus raíces conmensurables, la ecuacion resultante no admite ya mas que raíces *reales inconmensurables* y raíces *imaginarias*.

La verdadera forma de las raíces reales inconmensurables de una ecuacion de cualquier grado permanecerá desconocida miéntras no se conozca un método general para resolver las ecuaciones algebráicas de grado superior.

Pero si la determinacion de su forma es aun un problema por resolver, no sucede lo mismo con el valor numérico de cada una de estas raíces; pues existen métodos para obtenerlos con todo el grado de aproximacion que puede desearse.