en x, correspondiente á esta raíz; y los coeficientes de este factor son necesariamente conmensurables tambien.

Cuando una ecuacion numérica se halla desembarazada de sus divisores conmensurables de primer grado, la ecuacion resultante no tiene mas que raíces reales inconmensurables y raíces imaginarias; pero se concibe que muchos de los factores de primer grado que corresponden á estas raíces, aunque tienen coeficientes inconmensurables, pueden muy bien, por su combinacion dos á dos, dar orígen á productos cuyos coeficientes sean racionales; así es como

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=x^2-3,$$

$$(x-1+\sqrt{-5})(x-1-\sqrt{-5})=x^2-2x+6.$$

Sin embargo, si hubiese algun medio de descubrir en una ecuacion los divisores conmensurables del segundo grado, igualándolos á cero, se deducirian de ellos raíces de la ecuacion propuesta; obteniéndolas ademas bajo su verdadera forma.

Vamos á ver de qué manera conducen á este objeto los principios de la eliminacion y el método del núm. 320.

326. Sea $X=0$ una ecuacion desembarazada de sus divisores conmensurables del primer grado.

Designemos por x^2+px+q uno cualquiera de los divisores del segundo grado de X; siendo p y q dos *indeterminadas* cuyos valores es menester obtener *en números conmensurables*, si es posible.

Para ello *dividamos* X *por* x^2+px+q : *y concibamos que se haya llevado la operacion hasta llegar á una resta del primer grado en* x *de la forma* $Mx+N$, siendo M y N funciones indeterminadas de p y de q. Igualando á cero esta resta, se establecerá la condicion de que x^2+px+q se convierte en divisor exacto de X; ademas esta division debe hacerse independientemente de cualquier valor particular attribuido á x; luego, en virtud del principio del núm. 180 sobre las ecuaciones idénticas, *la ecuacion* $Mx+N$ *se dividirá* necesariamente en otras dos,

$$M=0.\ N=0,\ \text{ó bien}\ F(p,q)=0,\ F'(p,q)=0.$$

Sentado esto, la cuestion se reducirá á *encontrar* (en números conmensurables) todos los sistemas de valores de p y de q propios para verificar estas dos ecuaciones.

Se empezará por formar con arreglo á los métodos conocidos, *la*

ecuacion final en q, *á la cual se aplicará el método de las raíces conmensurables* (núm. 320). *Obtenidos todos los valores racionales de* p *se los sustituirá* (núm. 270) *en la resta del primer grado relativamente á* q, *cuya resta, igualada en seguida á cero, dará los valores racionales de* q, *correspondientes á los valores de* p *ya encontrados. Y finalmente, se sustituirá cada uno de los sistemas de valores de* p *y de* q *en el trinomio* x^2+px+q; *lo que dará otros tantos divisores conmensurables de segundo grado.*

Es evidente que la ecuacion final en p debe ser de un grado marcado por $m\left(\frac{m-1}{2}\right)$, siendo m el grado de la ecuacion, pues que esta es la espresion del número total de los divisores conmensurables ó inconmensurables de segundo grado.

Por aquí se podrá venir en conocimento de lo complicado que este método es en la práctica, aunque fácil en teoría.

Se ve á primera vista lo que habria que hacer para obtener los divisores conmensurables de 3º, y 4º.... grado; pero estas últimas cuestiones no son de utilidad alguna.

---

§ III. INVESTIGACION DE LAS RAÍCES REALES INCONMENSURABLES.

Cuando se ha despojado á una ecuacion de todos los divisores de primer grado que corresponden á sus raíces conmensurables, la ecuacion resultante no admite ya mas que raíces *reales inconmensurables* y raíces *imaginarias*.

La verdadera forma de las raíces reales inconmensurables de una ecuacion de cualquier grado permanecerá desconocida miéntras no se conozca un método general para resolver las ecuaciones algebráicas de grado superior.

Pero si la determinacion de su forma es aun un problema por resolver, no sucede lo mismo con el valor numérico de cada una de estas raíces; pues existen métodos para obtenerlos con todo el grado de aproximacion que puede desearse.

Para mayor sencillez dividiremos esta teoría en dos partes : *En la primera* supondremos que la propuesta es tal que pueda UNA SOLA raíz real hallarse comprendida entre dos números enteros consecutivos ; y *en la segunda* que dos números enteros consecutivos pueden comprender mas de una raíz.

PRIMERA PARTE. *Caso en que una sola raiz real pueda hallarse comprendida entre dos números enteros consecutivos.*

[Admitiremos tambien, en todo lo que sigue, que se han determinado los limites $+L$ y $-L'$, lo mas próximos posible, ya sea por el método de las descomposiciones (núm. 308) ya por el de Newton (núm. 309.)]

327. *Investigacion de la parte entera.* Como cada una de las raíces inconmensurables se halla necesariamente compuesta de una parte entera (que puede ser 0 algunas veces) y de *una parte menor que la unidad*, el primer objeto de que tenemos que ocuparnos consiste en determinar la parte entera de cada raíz.

Para esto *se sustituyen en lugar de* x, *en la ecuacion las series naturales de los números*, 0, 1, 2, 3..., y $-1, -2, -3$..., *comprendidas entre* $+L$ y $-L'$. Como entre dos números sustituidos que dan dos resultados de signos contrarios, hay al ménos una raíz (número 303), se sigue que *cada par* de números que da resultados de signos contrarios *comprende una raíz real, y no comprende mas que una sola*, segun la hipótesis establecida. Ademas ; la parte entera de la raíz es el menor de los dos números que la comprenden.

Pueden, pues, presentarse dos casos : — ó se obtienen por todas sustituciones, *tantos cambios de signos* (ó de pares de resultados de signos contrarios) *como unidades hay en el grado de la ecuacion;* y entónces se concluye de aquí que *son reales todas las raices*: — ó bien el número de los cambios de signo *es menor que el grado de la ecuacion*; en cuyo caso *hay tantas raices reales* como cambios de signo ; y son *imaginarias* las demas raíces.

En ambos casos hace conocer este método la *parte entera* de cada raíz real ; quedando solo por determinar *la parte menor que la unidad.*

MÉTODO DE APROXIMACION DE LAGRANGE.

328. Sea $X=0$ una ecuacion cuyas raíces reales tienen respectivamente una parte entera diferente que se supone estar ya determinada.

Designemos por a y $a+1$ dos números enteros que comprendan á una de ellas ; a espresará entónces la parte entera de esta raíz, quedando solo que buscar la parte menor que la unidad.

Para ello, en la ecuacion

$$X=0, \text{ ó } x^m+Px^{m-1}+\ldots+Tx+U=0,$$

supongamos $x=a+\frac{1}{y}$; y resulta la transformada.

$$Ay^m+A'y^{m-1}+\frac{A''}{2}y^{m-2}+\frac{A'''}{2.3}y^{m-3}+\ldots+1=0.$$

[Para obtener esta transformada se empieza por reemplazar x por $x+u$, lo cual da (núm. 262)

$$A+A'u+\frac{A''}{2}u^2+,\ldots+u^m=0,$$

designando A lo que es X cuando se reemplaza a por x, y siendo A', A'',... polinomios derivados de A segun la ley establecida en el núm. 262; despues se vuelve á poner $\frac{1}{y}$ por u, y se quitan los denominadores en y.]

Designemos, para abreviar, por $Y=0$ esta transformada, que es del mismo grado que la propuesta, y tiene por consiguiente m raíces.

Ahora bien ; puesto que la relacion $x=a+\frac{1}{y}$ debe dar todos los valores de x, así que se conozcan los valores de y, y por hipótesis a y $a+1$ comprenden un valor de x, y solo comprenden uno, es absolutamente preciso que entre los valores reales de y *haya uno mayor que* 1, *y que no haya mas que uno solo;* pues de otra manera seria suponer que a y $a+1$ comprenden mas de un valor de x.

Si se ponen pues, sucesivamente en lugar de y en la ecuacion $Y=0$ los números enteros 1, 2, 3,... á partir de la unidad, hay seguridad de obtener tarde ó temprano un *cambio de signo;* comprendiendo los dos números que hayan producido este cambio de signo el valor buscado de y.

Sean b y $b+1$ estos dos números ; supongamos en $Y=0$; $y=b+\frac{1}{y'}$; y resulta una transformada $Y'=0$ (que se obtendrá por el medio arriba

indicado); y esta ecuacion, entre sus raíces reales tendrá tambien *una sola*, *mayor* que 1, que se pondrá en evidencia por la sustitucion de los números enteros 1, 2, 3,..... en $Y'=0$.

Sean c y $c+1$ los dos números enteros que debiendo producir un cambio de signo, comprendan el valor de y'. Se supondrá en la ecuacion $Y'=0$, $y'=c+\frac{1}{y''}$, lo cual dará la nueva transformada $Y''=0$, teniendo *sólo una raíz mayor que* 1.

Sean d y $d+1$ los dos números que la comprenden; se supondrá otra vez en $Y''=0$, $y''=d+\frac{1}{y'''}$; y se llevará esta serie de transformaciones tan léjos como se quiera.

Reuniendo ahora las relaciones

$$x=a+\frac{1}{y},\ y=b+\frac{1}{y'},\ y'=c+\frac{1}{y''},\ y''=d+\frac{1}{y'''};$$

resulta
$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots\ldots}}}$$

Pero se sabe que cuantas mas fracciones integrantes se toman en una fraccion continua, tanto mas próximo se está del valor que representa; espresándose el grado de aproximacion por $\frac{1}{N^2}$, siendo N el denominador de la última reducida.

Así, pues, el método que se acaba de esponer dará el valor de x con el grado de aproximacion que se desee.

329. Apliquemos la teoría precedente á la ecuacion

$$(1)\qquad x^3-3x-3=0.$$

Desde luego, como es fácil verlo, los límites superiores de las raíces positivas y de las negativas son $+3$ y -2.

Pónganse sucesivamente en lugar de x, en la ecuacion, los números

$$-2,\ -1,\ =0,\ +1,\ +2,\ +3;$$

y se obtendrán los resultados

$$-1,\ +1,\ -3,\ -7,\ -5,\ +9;$$

y como hay tres cambios de signo, se sigue que la ecuacion tiene sus tres raíces reales, á saber: una *positiva* comprendida entre 2 y 3, y dos *negativas* comprendidas respectivamente entre 0 y -1, y entre -1 y -2.

Ocupémonos primeramente del *valor positivo*.

Supongamos en la ecuacion (1) $x=2+\frac{1}{y}$; y resulta (núm. 328) una ecuacion de la forma

$$Ay^3+A'y^2+\frac{A''}{2}y+1=0,$$

en la cual se tiene

$$\begin{aligned} A &= (2)^3-5\,(2)^1-3=-5,\\ A' &= 3\,(2)^2-5\ldots\ldots=+7,\\ \frac{A''}{2} &= 3\,(2)^1\ldots\ldots\ldots=+6,\\ \frac{A'''}{2.3} &= 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=+1; \end{aligned}$$

de donde, sustituyendo y cambiando los signos,

$$(2)\qquad 5y^3-7y^2-6y-1=0.$$

Hagamos en esta ecuacion, $y=1,\ 2,\ 3\ldots$;

Sale para
$$\begin{aligned} y&=1\ \ldots\ldots\ -9,\\ y&=2\ \ldots\ldots\ -1,\\ y&=3\ \ldots\ldots\ +53; \end{aligned}$$

luego el valor buscado de y está comprendido entre 2 y 3.

Supongamos en la ecuacion (2), $y=2+\frac{1}{y'}$

resulta la transformada

$$By'^3+B'y'^2+\frac{B''}{2}y'+\frac{B'''}{2.3}=0,$$

en la cual $B = 5(2)^3 - 7(2)^2 - 6(2)^1 - 1 = -1$,

$B' = 15(2)^2 - 14(2)^1 - 6 \ldots\ldots = +26$,

$\frac{B''}{2} = 15(2)^1 - 7 \ldots\ldots = +23$,

$\frac{B'''}{2.3} = 5 \ldots\ldots = +5$;

de donde, sustituyendo y cambiando los signos,

(3) $$y'^3 - 26y'^2 - 23y' - 5 = 0.$$

Como esta ecuacion se convierte en

$$y'^2(y' - 26) - 23y' - 5 = 0,$$

es visible que cualquier valor menor que 26, sustituido por y', daria un resultado negativo.

Pero si se supone $y' = 26$, resulta. . . . . -603,
$y' = 27$. . . . . $+103$;

luego y' se halla comprendido entre 26 y 27.

Suponiendo en la ecuacion (3) $y' = 26 + \frac{1}{y''}$,

se obtiene la nueva transformada

$$Cy''^3 + C'y''^2 + \frac{C''}{2}y'' + \frac{C'''}{2.3} = 0,$$

en la cual $C = (26)^3 - 26(26)^2 - 23(26) - 5 = -603$,

$C' = 3(26)^2 - 52(26)^1 - 23 \ldots = +653$,

$\frac{C''}{2} = 3(26)^1 - 26 \ldots\ldots = +52$,

$\frac{C'''}{2.3} = 1 \ldots\ldots = +1$;

de donde, sustituyendo y cambiando los signos,

(4) $$603y''^3 - 653y''^2 - 52y'' - 1 = 0,$$

ecuacion que se reduce á esta:

$$y''^2(603y'' - 653) - 52y'' - 1 = 0.$$

Como $y'' = 1$ da por resultado, -103.
é $y'' = 2$. . . . . $+2107$,

se sigue que y'' se halla comprendido entre 1 y 2.

Suponiendo de nuevo $y'' = 1 + \frac{1}{y'''}$,

se obtendria, hecho el cálculo, para la transformada,

(5) $$103y'''^3 - 451y'''^2 - 1156y''' - 603 = 0,$$
ó bien $$y'''^2(103y''' - 451) - 1156y''' - 603 = 0.$$

Es fácil conocer, pues, que el valor de y''' se halla comprendido entre 6 y 7; de modo que si se quisiese continuar la operacion, seria preciso suponer $y''' = 6 + \frac{1}{y^{IV}}$.

Pero limitémonos á los resultados ya obtenidos.
Los valores de x, y, y', y'', y''', dan lugar á la fraccion continua

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{26 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}$$

y siendo las reducidas consecutivas

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{132}{53}, \frac{137}{55}, \frac{954}{383},$$

se sigue que la última espresa el valor de x con diferencia de ménos de la fraccion, marcada por $\frac{1}{(383)^2}$ ó $\frac{1}{146689}$.

Reduciendo $\frac{954}{383}$ á decimales, y llevando la operacion hasta 100000 inclusive, se halla 2,49086, resultado que se considera que expresa el valor de x con una diferencia de ménos de 0,00001.

Sin embargo, como este valor es mas pequeño, por dos razones,

1°. porque la reducida $\frac{954}{383}$ es de lugar impar; 2°. porque 2,49086 es una fraccion menor que dicha reducida, seria dable que la última cifra, 6, debiese ser aumentada en una unidad.

Pero si se sustituye sucesivamente 2,49086 y 2,49087 en la propuesta, se hallan dos resultados de signos contrarios.

De modo que 2,49086 representa *en ménos* con la diferencia de 0,00001, la raíz positiva de la ecuacion propuesta.

En cuanto á las dos raíces negativas, observemos que si se cambia x en $-x$ en la ecuacion (1), se convierte en

$$x^5-5x+3=0;$$

y las raíces positivas de la nueva ecuacion, tomadas con el signo —, dan las raíces negativas de la propuesta. De esta manera queda la cuestion reducida á la investigacion de las raíces positivas de la transformada que se acaba de obtener.

Así, pues, repitiendo sobre esta transformada cálculos análogos á los precedentes, se encuentra

1°. Para la raíz comprendida entre 0 y 1, ... 0,65662;

2°. Para la raíz comprendida entre 1 y 2, ... 1,83424.

Luego en fin las raíces de la ecuacion

$$x^5-5x-3=0,$$

son $x=2,49086$, $x=-0,65662$, $x=-1,83424$.

(Se reconoce en efecto que la suma algebráica de las tres raíces *es nula*; y así debe ser, pues que falta en la ecuacion el coeficiente del segundo término.)

330. *Observacion.* Reflexionando acerca del método precedente que supone esencialmente que entre dos números enteros a y $a+1$, no hay mas que *una sola* raíz de la propuesta, puesto que sin esta condicion no se podria afirmar que cada una de las transformadas tiene *una sola* raíz mayor que la unidad, y que por consiguiente la sustitucion de los números 1, 2, 3,... en lugar de las y, y', y'', en estas transformadas, debe producir tarde ó temprano un cambio de signo.

Sin embargo, cuando se conoce de antemano *el número* de las raíces comprendidas entre a y $a+1$, es posible que el método sirva todavía. (Véase el ejemplo del número 353.)

Supongamos, para fijar las ideas, que a y $a+1$ comprendan *dos* raíces

y no comprendan mas que dos. Sustituyendo $a+\frac{1}{y}$ por x, se obtendrá una transformada que tendrá dos raíces mayores que la unidad, y *no tendrá mas que dos.*

Así, pues, cuando se ponga por y la serie de los números 1, 2, 3,..., se presentará una de estas dos circunstancias:

O bien no se obtendrá *ningun* cambio de signo; y en este caso nada podrá concluirse, es decir que *faltará* entónces el método, en cuanto serán necesarias nuevas transformaciones para operar la separacion completa de las raíces;

O bien esta sustitucion producirá *dos* cambios de signos: admitamos por un instante que los números n y $n+1$, p y $p+1$, produzcan respectivamente estos cambios de signo.

Se pondrá primeramente en la transformada, $y=n+\frac{1}{y}$, lo cual dará una nueva transformada que tendrá *una sola* raíz mayor que la unidad, y sobre la que se podrá operar como anteriormente: entónces el *primer* valor de x se espresará por una fraccion continua de la forma

$$x=a+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n'+\cfrac{1}{n''+\ldots}}}$$

Poniendo luego en la misma transformada en y, $y=p+\frac{1}{z}$, se obtendrá una nueva transformada que tendrá *una sola* raíz mayor que la unidad, y sobre la cual se operará tambien como anteriormente; el *segundo* valor de x se presentará, pues, bajo la forma de una nueva fraccion continua,

$$x=a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p'+\cfrac{1}{p''+\ldots}}}$$

que tendrá la misma parte entera que la precedente, pero cuyas fracciones integrantes serán diversas.

Seria fácil estender estos razonamientos al caso en que se supiese de antemano que a y $a+1$ comprenden *tres* raíces reales... Pero lo dicho

basta para probar que no hay una gran ventaja real en el empleo del método de Lagrange, sino en el caso de que a y $a+1$ *no comprendan mas que una sola raiz.* Sin embargo, ya espondremos mas adelante (núm. 254) un medio general de operar para la determinacion de las raíces en la práctica de este método.

Conversion en fraccion continua de un número irracional cualquiera.

331. El método de aproximacion por fracciones continuas puede servir para valuar las raíces de cualquier grado de los números.

Sea P un número absoluto de que sea preciso estraer la raíz m.

Si se supone $\sqrt[m]{P}=x$, resulta

$$x^m-P=0.$$

Como $x=0$ y $x=P+1$ (núm. 306), sustituidos en lugar de x en esta ecuacion, dan dos resultados *de signos contrarios*, se sigue que tiene cuando ménos una *raiz positiva.* Ademas tampoco presenta mas que una *variacion de signo;* luego, segun la regla de los signos de Descartes (núm. 315), tiene *una sola* raiz real positiva, que se puede obtener aproximadamente por el método de Lagrange; y se tendrá de este modo $\sqrt[m]{P}$ bajo la forma de fraccion continua.

Sea por ejemplo, $\sqrt[3]{11}$ la que haya que valuar en fraccion continua. Basta aplicar el método del número 328 á la ecuacion

$$x^3-11=0.$$

Se hallarán sucesivamente las relaciones

$$x=2+\frac{1}{y},\ y=4+\frac{1}{y'},\ y'=2+\frac{1}{y''},\ y''=6+\frac{1}{y'''},\ldots,$$

y por consiguiente las reducidas

$$\frac{2}{1},\ \frac{9}{4},\ \frac{20}{9},\ \frac{129}{58},$$

de las que la última convertida en decimales, da 2,224 hasta 0,001, con corta diferencia, pues se tiene evidentemente $\frac{1}{(58)^2}<0{,}001$ (este valor es un poco mayor).

332. Indicaremos con este motivo el medio de desarrollar toda especie de números (absolutos) en fraccion continua. Este medio supone únicamente que se sabe estraer de un número dado la *parte entera* que se halla comprendida en él.

Sea A el número propuesto, a su parte entera (que se supone se sabe encontrar).

Se tiene desde luego la igualdad. . . . . $A=a+\frac{1}{B}$

(siendo $B>1$);

de donde se deduce $\frac{1}{B}=A-a$, y $B=\frac{1}{A-a}$.

Sea b la parte entera de B ó de $\frac{1}{A-a}$, obtenida por un medio cualquiera.

Se tiene la nueva igualdad. . . . . $B=b+\frac{1}{C}$

(siendo $C>1$);

de donde $\frac{1}{C}=B-b$, $C=\frac{1}{B-b}$, ó $C=c+\frac{1}{D}$;

$\frac{1}{D}=C-c$, $D=\frac{1}{C-c}$, ó $D=d+\frac{1}{E}$;

y así sucesivamente.

Reuniendo actualmente las relaciones

$$A=a+\frac{1}{B},\ B=b+\frac{1}{C},\ C=c+\frac{1}{D},\ldots,$$

se obtiene finalmente A en forma de una fraccion continua,

$$A=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}$$