últimas con cerca de una fraccion $\frac{1}{k}$. Esto resulta evidentemente de la relacion $x=\frac{y}{k}$.

**342.** Apliquemos este método á la eccacion

$$(1) \qquad 8x^3-6x-1=0.$$

Los límites superiores de las raíces así positivas como negativas son evidentemente $+1$ y $-1$.

Haciendo en esta ecuacion, $x=+1,\ 0,-1,$
se encuentra por resultados. . . $+1,-1,-3;$

la sustitucion no da lugar mas que á *un solo* cambio de signo; de modo que es preciso recurrir á la ecuacion de los *cuadrados de las diferencias.*

Si se forma esta ecuacion, ya sea por el método de eliminacion (número 273), ya por las funciones simétricas (número 297), se encuentra por resultado,

$$64z^3-288z^2+324z-81=0.$$

Supongamos $z=\frac{v}{1}$; resulta

$$(2) \qquad 81v^3-324v^2+288v-64=0,$$

ecuacion que puede ponerse bajo la forma

$$81v^2(v-4)+32(9v-2)=0;$$

siendo fácil de reconocer que 3, número entero, es el límite superior mas inmediato de las raíces positivas. De modo que se tiene

$$l=3;\ \text{de donde}\ \frac{1}{l}=\frac{1}{3},\ \text{y}\ \frac{1}{\sqrt{l}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Reemplazando $\sqrt{3}$ por el número entero 2, inmediatamente superior, se obtiene $\frac{1}{2}$ para la cantidad menor que la mas pequeña diferencia que pueda existir entre las raíces reales de la propuesta.



Haciendo, pues, en la propuesta, conforme á la regla del número 341, $x=\frac{y}{2}$, se tiene la transformada

$$(3) \qquad y^3-3y-1=0,$$

ecuacion en que todas las raíces reales tienen entre sí una diferencia mayor que la unidad.

Siendo por otra parte los límites superiores de las raíces positivas y negativas $+2$ y $-2$, basta hacer en la ecuacion (3),

$y=+2,+1,\ 0,-1,-2,$
lo que da los resultados $+1,-3,-1,+1,-3.$

Se obtienen evidentemente con estas sustituciones *tres* cambios de signo; de manera que la ecuacion (3) tiene sus *tres* raíces reales, la una comprendida entre 1 y 2, otra entre 0 y $-1$, y la tercera entre $-1$ y $-2$.

Luego en fin la ecuacion (1) tiene tambien sus *tres* raíces reales, la una comprendida entre $\frac{1}{2}$ y 1, la segunda entre 0 y $-\frac{1}{2}$, la tercera entre $-\frac{1}{2}$ y $-1$.

Para aproximarse mas á estas raíces se empezará por aplicar á la ecuacion (3) uno de los dos métodos de aproximacion; sustituyendo despues en la relacion $x=\frac{y}{2}$, los valores obtenidos de $y$, lo que dará los correspondientes de $x$.

Se hallará por este medio,

$$\text{para la ecuacion } y^3-3y-1=0,\ \begin{cases} y=\ 1{,}8794, \\ y=-0{,}3474, \\ y=-1{,}5320; \end{cases}$$

$$\text{y para la ecuacion } 8x^3-6x-1=0,\ \begin{cases} x=\ 0{,}9397, \\ x=-0{,}1737, \\ x=-0{,}7660. \end{cases}$$

Estos valores son exactos con una diferencia de casi 1,0001.

**343.** *Primera observacion.* El método espuesto en el número 341

para poner en evidencia las raíces inconmensurables, cuando pueden hallarse comprendidas muchas raíces entre dos números enteros consecutivos, no puede aplicarse á las ecuaciones que tienen raíces iguales.

En efecto, supongamos que una ecuacion tenga *dos* raíces reales iguales á $a$; como dichas dos raíces no forman mas que un solo y mismo número, se hallarán necesariamente comprendidas entre dos de los números sustituidos, por pequeña que sea su diferencia.

Así es que estos números, que comprenden dos raíces, deberán (núm. 304) dar dos resultados del mismo signo, como lo darán dos números que no comprendan ninguna. Si la ecuacion pudiese tener *tres* raíces iguales á $a$, los dos números que las comprendiesen darian dos resultados de signos contrarios, como tambien dos números que comprendieran una sola vez esta raiz.

Observemos ademas que teniendo raíces iguales la ecuacion $X=0$, la ecuacion de los cuadrados de la diferencias, $Z=0$, tendria necesariamente raíces iguales á 0; y entónces el límite inferior de las raíces positivas de esta última ecuacion seria 0; es decir que seria necesario fijar un intervalo *nulo* entre dos sustituciones, lo cual es absurdo.

Concluyamos, pues, que ántes de aplicar el método del número 341, es necesario desembarazar la propuesta de las raíces iguales que pueda tener (véase el núm. 281).

**344.** *Segunda observacion.* Cuando la ecuacion propuesta es del tercero ó cuarto grado, y tiene sus coeficientes conmensurables, es inútil aplicarle el método de las raíces iguales.

En efecto, resulta á primera vista de la naturaleza de este método, que consiste esencialmente en la investigacion del mayor divisor comun entre el primer miembro de la propuesta y su derivada, que no puede conducir mas que á un polinomio, cuyos coeficientes son racionales, como los de la propuesta.

Sentado esto, en el caso en que la ecuacion es del tercer grado, el comun divisor (si lo hay) es del primero, ó del segundo grado, á lo mas. Si es del primero, igualándolo á 0 solo se podrá sacar de la ecuacion resultante una raíz conmensurable. Si es del segundo, el cociente del polinomio propuesto, por este divisor, es del primer grado, y no podrá dar tampoco mas que una raíz conmensurable. Se ve, pues, que *una ecuacion del tercer grado cuyos coeficientes son racionales, y que carece de raíces conmensurables, no puede tener raíces iguales.*

Si la ecuacion es del cuarto grado, el mayor divisor comun (si lo hay) entre el primer miembro y su polinomio derivado, no puede ser ni del primero ni del tercer grado; porque así en uno como en otro caso se deduciria de ello que la ecuacion tenia raíces conmensurab



lo que seria contra la hipótesis; y si es del segundo grado no podrian ser iguales los factores de este polinomio divisor, porque resultaria tambien que la ecuacion tenia raíces conmensurables. Pero si son desiguales ambos factores, entónces resulta necesariamente (277) que cada uno de ellos entra cuadrado en el polinomio propuesto, que es en este caso un cuadrado perfecto.

De modo que en vez de someter en este caso la ecuacion al método de las raíces iguales, nos podemos limitar *á estraer la raíz cuadrada de su primer miembro;* y si la *raíz no es exacta, concluir que la ecuacion no tiene raíces iguales.*

**345.** *Tercera observacion.* Lo que precede basta para demostrar lo fatigosa que es la aplicacion del método del número 341, pues que supone, ademas de la determinacion de las raíces iguales, la formacion de la ecuacion *de los cuadrados de las diferencias.* Pero tan luego como la propuesta es de un grado superior al cuarto, llegan á ser impraticables los cálculos relativos á la determinacion de esta última ecuacion, por su estremada difusion. Será, pues, muy conveniente dar á conocer algunas circunstancias en que pueden evitarse todos estos cálculos.

1°. Si, sustituyendo los números $0, 1, 2, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$, comprendidos entre $+L$ y $-L'$, se obtienen *tantos* cambios de signo como unidades hay en el grado de la propuesta, se está seguro de que *todas las raíces de la ecuacion son reales,* y que cada una de ellas tiene una parte entera diferente.

2°. Puede suceder que sin conocer las raíces de una ecuacion, se sepa *a priori* cuántas raíces reales debe tener (la Trigonometría ofrece de ello algunos ejemplos). Sentado esto, pueden presentarse dos casos:

O la sustitucion de los números $0, 1, 2, \ldots, -1 -2, \ldots$, da lugar á *tantos cambios de signo como raíces reales tiene la ecuacion;* y en este caso están tambien puestas en evidencia todas las raíces reales:

O el número de los cambios de signo es *menor que el de las raíces reales.* Como en este caso estamos seguros de haber dejado escapar algunas raíces cuyas diferencias son menores que la unidad, es preciso procurar hacerlas mayores. Para ello se hace en la propuesta, $x=\frac{y}{k}$, siendo $k$ una indeterminada, lo que da la transformada $Y=0$, cuyas raíces son $k$ veces mayores que las de la propuesta (sucediendo por consiguiente lo mismo con las diferencias). En seguida se dan á $k$ diferentes valores. Sea, en primer lugar, $k=3$; sustituyendo en $Y=0$ la serie natural de los números, se ve si el número de los cambios de signo iguala al de las raíces reales que se sabe deben existir en la propuesta.

Si la hipótesis $k=3$ no aprovecha, se hace $k=4, 5, \ldots$, hasta que por último se obtenga para la transformada correspondiente el número de signo que se exige.

NOTA. Es preciso notar aquí que se supone á la ecuacion despojada de raíces iguales.

## TEORÍA DE M. STURM.

### Su aplicacion á la investigacion de las raíces inconmensurables.

Conviene dar á conocer aquí un hermoso teorema á favor del cual se pueden poner en evidencia, mucho mas simplemente que con la ayuda de la ecuacion de las diferencias, todas las raíces inconmensurables.

Acabamos de ver (núm. 345, 2.°) que si se conociese *a priori* el número de las raíces reales de una ecuacion, se llegaria fácilmente á su determinacion, puesto que bastaria entónces subdividir convenientemente el intervalo de las sustituciones sucesivas. Pues bien, el teorema de M. Sturm llena completamente este objeto, como se va á ver.

**346.** Sea $X=0$ una ecuacion de *coeficientes reales*, que supondremos carecer de raíces iguales. Llamemos $X_1$ á su primer polinomio derivado, y apliquemos á $X$, $X_1$ el procedimiento del m. c. divisor relativo (números 246 y 259) con la condicion, sin embargo, *de cambiar el signo de la resta de cada operacion, y tomar esta resta modificada de este modo por divisor de la operacion siguiente.*

(El indicado cambio de signo es una hipótesis esencial en el teorema que nos proponemos establecer aquí.)

Designemos ademas con las letras $X_2, X_3, X_4, \ldots X_r$, las restas sucesivas, tomadas con signos contrarios.

Podremos espresar la serie completa de las operaciones por la tabla siguiente:

$$\begin{array}{l}
X \;=X_1\; q_1 \;-X_2, \\
X_1 \;=X_2\; q_2 \;-X_3, \\
X_2 \;=X_3\; q_3 \;-X_4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{r-2}=X_{r-1}q_{r-1}-X_r\,;
\end{array}$$



$X_r$ es necesariamente independiente de $x$ y diferente de *cero*, pues que por hipótesis la ecuacion carece de raíces iguales.

Concibamos ahora que despues de haber obtenido de las funciones $X, X_1, X_2, \ldots, X_r$, se sustituyan por $x$ dos números $p$ y $q$, de signos cualesquiera (en que $p$ es $<q$).

La sustitucion de $p$ dará desde luego para cada funcion un resultado generalmente positivo ó negativo (pero que podrá ser *nulo* algunas veces); y no teniendo cuenta sino con los signos de estos resultados, se obtendrá una serie de signos que escritos en una misma línea, presentarán cierta sucesion de variaciones y permanencias.

Igualmente, la sustitucion de $q$ en lugar de $x$ dará una segunda serie de signos que ofrecerán tambien la citada sucesion.

Consiste, pues, el teorema en cuestion en que:

*La* DIFERENCIA *entre el número de las variaciones que presenta la primera serie de signos y el número de las variaciones de la segunda, espresa exactamente el número de las raices reales de la propuesta, que se hallan comprendidas entre* p *y* q.

**347.** De aquí resulta la regla siguiente para determinar el número total de las raíces reales de una ecuacion.

Despues de haber determinado (núm. 310) los límites $-L'$ y $+L$ de las raíces negativas y positivas: 1°. *Se aplica á los dos polinomios* $X$, $X_1$, el procedimiento del *m. c. divisor con la modificacion indicada en el número precedente;* lo que da una serie de funciones $X, X_1, X_2, \ldots, X_r$, que son por lo general en número de $(m+1)$, si es $m$ el grado de la ecuacion.

2°. Se escriben en una primera línea los signos de los resultados de la sustitucion de $-L'$ en cada una de las funciones, y en otra segunda línea los signos de los resultados de la sustitucion de $+L$. (El signo de $X_r$ debe permanecer el mismo, porque $X_r$ es independiente de $x$.)

3°. Se cuentan el número de variaciones que ofrece la primera línea, y el de las que ofrece la segunda. La DIFERENCIA entre estos dos números es la espresion del NÚMERO TOTAL de las raíces reales de la propuesta.

Esta regla es de un uso muy fácil cuando se conocen las funciones $X, X_1, X_2 \ldots$, y aunque las operaciones necesarias para su determinacion son un poco largas, no por eso debe concluirse nada contra su sencillez; porque (fuera de los cambios de signos indicados) en nada se diferencian estas operaciones de las del método de las raíces iguales al cual es indispensable someter previamente á toda ecuacion cuyas raíces inconmensurables se buscan.

**348.** La demostracion del anterior teorema se funda en varios principios que vamos ahora á establecer.

PRIMERAMENTE. Consideremos la funcion X en particular, y sea $a$ una raiz real de $X=0$. Si se pone $a+u$ en lugar de $x$ en X, se obtiene (núm. 328) un resultado de la forma

$$A+A'u+\frac{A''}{2}u^2+\frac{A'''}{2.3}u^3+\ldots+u^m$$

(siendo A el resultado de la sustitucion de $a$ por $x$ en X, y $A'$, $A''$, $A'''$..., los polinomios derivados de A segun la ley conocida).

Como por hipótesis $a$ es raiz de $X=0$, se tiene $A=0$; y la espresion precedente se reduce á

$$u\left(A'+\frac{A''}{2}u+\frac{A'''}{2.3}u^2+\ldots+u^{m-1}\right).$$

Digo, pues, que se puede siempre encontrar para $u$ un número bastante pequeño para que la cantidad de entre paréntesis sea del mismo signo que su primer término $A'$ (que por lo demas es diferente de *cero* miéntras $X=0$ carezca de raices iguales).

Basta en efecto para ello obtener para $u$ un valor que haga á $\frac{A''}{2}u+\frac{A'''}{2.3}u^2+\ldots$ numéricamente menor que $A'$. Pero vimos ya (303) cómo se llena esta última condicion; de modo que es siempre posible satisfacer á la precedente.

Es evidente por otro lado, que tan luego como se ha obtenido para la indeterminada $u$ un valor que llena esta condicion, la satisface con mayor razon cualquiera otro valor mas pequeño.

**349.** EN SEGUNDO LUGAR. Si se concibe que en las funciones $X, X_1, X_2\ldots$, se reemplace $x$ por un número cualquiera $a$, *no podrá suceder nunca* que se desvanezcan á la vez dos funciones consecutivas.

En efecto, consideremos las tres funciones consecutivas de órden cualquiera,

$$X_{n-1},\ X_n,\ X_{n+1}.$$

Se tiene (núm. 346) la igualdad

$$X_{n-1}=X_n\,q_n-X_{n+1}.$$



Ahora bien, si se pudiese tener á un tiempo $X_{n-1}=0$, $X_n=0$, se deduciria de aquí $X_{n+1}=0$; pero como se tiene tambien

$$X_n=X_{n+1}q_{n+1}-X_{n+2},$$

resultaria todavía $X_{n+2}=0$; y así sucesivamente. Se llegaria entónces finalmente á la igualdad $X_r=0$; lo que es absurdo, porque como la propuesta no tiene raices iguales no podria $X_r$ ser nulo.

EN TERCER LUGAR. La misma relacion $X_{n-1}=X_n\,q_n-X_{n+1}$ nos dice que si una funcion $X_n$ se hace nula por la sustitucion de $x=a$, las dos funciones $X_{n-1}$, $X_{n+1}$, entre las cuales se halla colocada, son necesariamente de *signos contrarios* para el mismo valor $x=a$.

**350.** Admitidos estos principios, designemos por $k$ una cantidad positiva ó negativa, pero menor (es decir, mas aproximada al *infinito negativo*) que todas las raices reales de las ecuaciones $X=0$, $X_1=0$, $X_2=0\ldots$, $X_{r-1}=0$; y concibamos que haciendo crecer á $x$ de una manera continua (núm. 303) á partir de $k$, se sustituyen todos sus valores sucesivos en las funciones $X, X_1, X_2\ldots, X_r$

Es fácil ver por otra parte que las variaciones y las permanencias suministradas por *los signos* de estas funciones y por el de $X_r$ (que sabemos es constante) se reproducirán todas y en un mismo órden hasta que $x$ llegue á uno de los valores que hacen *nula* á alguna de estas funciones; porque para que llegue á modificarse el número ó el órden de estas variaciones y permanencias será evidentemente preciso que una de las funciones, $X_n$ por ejemplo, cambie de signo, y por consiguiente (núm. 303) que $X_n$ haya desde luego llegado á ser *nulo*.

Supongamos ahora que un valor $x=a$ haga *nula* una ó muchas funciones (siendo por otra parte $a$ el menor de los números que gozan de esta propiedad); y veamos qué es lo que debe suceder.

Pueden presentarse dos circunstancias: ó $x=a$ destruirá una (ó varias) de las funciones intermedias: $X_1, X_2, X_3,\ldots, X_{n-1}$, sin desvanecer á X; ó bien $x=a$ destruirá á X, pudiendo ademas hacer tambien *nula* á una ó muchas de las funciones intermedias. Digo, pues, que *en el primer caso* no desaparecerá variacion alguna en el paso de $x$ por los tres estados consecutivos $a-u$, $a$, $a+u$ (siendo $u$ el intérvalo de las sustituciones sucesivas), y que *en el segundo* desaparecerá una variacion y que solo desaparecerá una si $u$ es suficientemente pequeño.

Consideremos el primer caso, en que la funcion $X^n$, por ejemplo, se hace *nula* por $x=a$, sin que X lo sea al mismo tiempo.

Como para el mismo valor $x=a$. $X_{n-1}$ y $X_{n+1}$, no pueden llegar á ser *nulas*, y como son de *signos contrarios* (núm. 349), se sigue que las tres funciones consecutivas

$$X_{n-1},\ X_n,\ X_{n+1},$$

formarán, en cuanto á los signos, una de las dos combinaciones

$$+,0,-,\text{ó}-,0,+;$$

y ya se tome 0 con el signo + ó con el signo —, se ve que resulta una variacion y una permanencia.

Por otra parte, cada una de las funciones $X_{n-1}$, $X_{n+1}$, ha debido conservar el mismo signo para los valores de $x$ comprendidos desde $x=k$ hasta $x=a$, y los signos no deben cambiar en el paso de $x=a$ á $x=a+u$, puesto que se puede siempre suponer á $u$ bastante pequeño para que ninguna raiz de $X_{n-1}=0$, $X_{n+1}=0$, se halle comprendida entre $a$ y $a+u$.

Se puede pues afirmar que las tres funciones anteriores que presentan para $x=a$ una variacion y una permanencia, dán igualmente una variacion y una permanencia para todos los valores comprendidos desde $x=k$ hasta $x=a+u$. De modo que la hipótesis $x=a$, introducida en la serie de las funciones $X, X_1, X_2,\ldots$, no ha hecho perder ni producir ninguna variacion.

**351.** Pasemos al caso en que X se hace *nulo* por poner $a$ por $x$.

Hágase $x=a+u$ en X y $X_1$; y designemos despues por U, $U_1$, en lo que se convierten respectivamente X, $X_1$, por esta sustitucion. Llamemos (núm. 348) A, A′, A″,... los resultados de la sustitucion de $a$ por $x$ en X y sus polinomios derivados, y luego, por analogía, $A_1$, $A'_1$, $A''_1$,... en lo que se convierten $X_1$ y sus polinomios derivados por la misma sustitucion; y tendremos las dos igualdades

$$U=A+A'u+\frac{A''}{2}u^2+\ldots,$$

$$U_1=A_1+A'_1u+\frac{A''_1}{2}u^2+\ldots.$$

Como por hipótesis $a$ es raíz de X=0, se tiene necesariamente A=0. Ademas, espresando las dos cantidades A′ y $A_1$, el resultado de la sustitucion de $a$ por $x$ en $X_1$, no forman mas que una sola que es *diferente* de 0, pues X=0 no tiene raices iguales.



De modo que las dos igualdades precedentes se cambian en estas:

$$U=A'u+\frac{A''}{2}u^2+\ldots,$$

$$U_1=A'+A'_1u+\frac{A''_1}{2}u^2+\ldots,$$

cuyos segundos miembros son necesariamente del mismo signo que sus primeros términos A′$u$ y A′ cuando se toma (núm. 348) para la indeterminada $u$ un valor suficientemente pequeño. Se ve, pues, que U y $U_1$, son del mismo signo cuando $u$ es *positivo*, y de signos contrarios cuando *negativo*.

De donde resulta que los signos de las dos funciones X, $X_1$, que presentaban primero una variacion para $x=a-u$, forman en seguida una permanencia para $x=a+u$.

De suerte que en el paso de $x=a-u$ á $x=a+u$ una variacion se ha cambiado en permanencia.

La misma consecuencia tendria lugar aun cuando $x=a$, que satisface á X=0, destruyese al mismo tiempo una ó muchas funciones, porque, como vimos ántes, cuando llega á desvanecerse una de estas funciones no por esto cambia el número de las variaciones.

Ahora, si á partir de $x=a+u$, se continúa haciendo crecer á $x$ por grados insensibles, el número actual de las variaciones de la serie de signos permanecerá el mismo hasta tanto que llegue $x$ á esceder á una nueva raiz de X=0; en cuyo caso desaparecerá una segunda variacion, y se hallará reemplazada por una permanencia. Y así sucesivamente.

Luego en fin el *número de las variaciones* perdidas cuando $x$ crece desde un valor cualquiera $k$ hasta otro valor $k'$, es igual al número de las *raices reales* de X=0, comprendidas entre $k$ y $k$.

Lo que demuestra evidentemente el teorema enunciado en el número 346.

**352.** Antes de pasar á las aplicaciones, haremos algunas observaciones en estremo importantes.

1°. En la investigacion de las funciones X, $X_1$..., se pueden introducir ó suprimir factores numéricos (núm. 259), con tal que estos factores sean *positivos;* pero es preciso tener cuidado en cuanto á los signos, de no hacer mas que los cambios indicados en el número 346, porque de la consideracion de los signos de que se hallan afectadas las fun-

ciones X, $X_1$, $X_2$,...., es de lo que depende principalmente el método de M. Sturm.

2°. Cuando se quiere simplemente conocer el *número total* de las raíces reales de la ecuacion propuesta no es necesario operar la sustitucion de los límites — L' y +L en las funciones X, $X_1$,.. : basta sustituir $-\infty$ y $+\infty$ en el primer término de cada una de ellas, pues se sabe (núm. 305) que el signo de la funcion es entónces el mismo que el de este primer término.

La sustitucion de $-\infty$ y de $+\infty$ dispensa de determinar desde luego los dos límites —L' y +L, que seria preciso por otra parte calcular de modo que conviniesen á todas las funciones, si se quisiera operar la sustitucion solamente en su primer término.

Añadiremos ademas que empleando el método de Sturm no hay en ningun caso necesidad de conocer *a priori* los dos límites— L' y +L. En efecto, si despues de haber reconocido *cuántas* raíces reales hay en la propuesta, se quiere en seguida determinar de una manera mas precisa el lugar de las raíces, no hay otra cosa que hacer sino sustituir sucesivamente los números 0, 1, 2, 3..., y 0, —1, —2,...; y tan luego como por la sustitucion de 0, 1, 2,..., se ha llegado á una serie de signos que presente *tantas* variaciones como haya dado la sustitucion de $+\infty$ puede afirmarse que no hay mas raíces mas allá del último número sustituido. Igual razonamiento respecto á los números 0, —1, —2,....

De este modo se obtienen los dos límites superiores mas inmediatos (en números enteros); lo que no siempre da de una manera fija (núm. 309) el método de Newton.

3°. Si se busca en seguida *cuántas* raíces reales hay comprendidas entre dos números particulares $p$ y $q$, puede suceder que $p$ ó $q$ haga *nula* alguna de las funciones. En este caso y cuando la que se desvanece es una funcion intermedia, $X_n$, no hay necesidad de tener en cuenta el resultado 0 en la serie de los signos, pues vimos (número 349) que $X_{n-1}$, $X_{n+1}$ ofrecen una variacion para este mismo valor de $x$; de manera que la combinacion del doble signo $\pm$ de que se supone afectado el 0, con los signos $+-$ ó $-+$, no da aun sino una variacion. Así, pues, el número de las variaciones no se altera absolutamente por la omision del resultado 0.

Cuando es X el que se desvanece para $x=p$, por ejemplo, se concluye inmediatamente que $p$ es raíz de $X=0$; y se cuentan luego las variaciones que existen á partir de $X_1$.

4°. En fin, si despues de haber obtenido las funciones X, $X_1$, $X_2$,..., $X_r$, se reconoce que una de las funciones intermedias, $X_n$, es de tal naturaleza que conserva constantemente el mismo signo para todos



los valores comprendidos entre $p$ y $q$ (siendo $p<q$), es inútil sustituir estos números en las funciones siguientes, porque *tantas variaciones de mas para* x=p *y para* x=q como presente la serie de las funciones hasta $X_n$ inclusive, *otras tantas raíces reales comprendidas entre* p *y* q *habrá.*

Para convencerse de ello basta aplicar á las funciones X, $X_1$, $X_2$..., $X_n$, lo dicho (números 350 y 351) respecto á todas las funciones. Como la serie de signos hasta el de $X_n$ inclusive pierden una variacion para cada raíz de $X=0$, y como el número de las variaciones no se altera en lo mas mínimo por el desvanecimiento de alguna de las funciones intermedias $X_1$, $X_2$,..., $X_{n-1}$, pues que por otra parte $X_n$ conserva siempre el mismo signo por hipótesis, es absolutamente preciso que haya *tantas* raíces de $X=0$ comprendidas entre estos dos números, *como* variaciones perdidas hay en la serie de los signos de X, $X_1$,..., $X_n$, cuando se pasa de $x=p$ á $x=q$.

De aquí se deduce el siguiente caso particular: si en el curso de las divisiones necesarias á la determinacion de las funciones X, $X_1$,..., $X_r$, se reconoce que una cierta funcion, $X_n$, solo puede tener raíces imaginarias, como entónces no puede cambiar de signo (número 313), sea el que quiera el valor que se sustituya en vez de $x$, no hay necesidad de llevar mas adelante las divisiones; ó lo que es lo mismo, es inútil determinar $X_{n+1}$,..., $X_r$.

Es muy importante conservar bien en la memoria estas circunstancias: pues es fácil conocer, que, á causa de la magnitud de los coeficientes numéricos deben ser bastante trabajosos los cálculos relativos á la determinacion de las funciones sucesivas, sobre todo cuando se llega á las últimas.

(Véanse el 3°. y 4°. ejemplo del número siguiente.)

**353.** Hagamos ahora algunas aplicaciones, considerando sin embargo solamente ecuaciones que por la sustitucion de los números enteros consecutivos comprendidos entre los límites den *ménos cambios de signo* que unidades hay en la propuesta.

1^er^. *ejemplo.* (1) $8x^3-6x-1=0$.

(Esta cuestion se trató ya en el número 352.)

Se tiene desde luego $X_1=24x^2-6$, ó mas bien $X_1=4x^2-1$; (con arreglo á la primera observacion del núm. 352).

Divido X por $X_1$, se obtiene para resta, $-4x-1$; de donde. . . . . $X_2=+4x+1$