derivados. Llamemos p y q dos números reales de cualesquiera signos (siendo $p<q$); y concibamos que se hayan sustituido alternativamente p y q en la serie de estas funciones, lo que da las dos series de resultados,

1°. para $p, f(p), f'(p), f''(p), \ldots,$
2°. para $q, f(q), f'(q), f''(q), \ldots.$

Consiste el teorema en probar que *los signos de la primera serie no pueden presentar ménos variaciones que los de la segunda*; *y si* p *y* q *comprenden un número* k *de raíces reales, la primera serie tiene cuando ménos* k *variaciones mas que la segunda.*

Este teorema, mucho ménos esplícito que el de M. Sturm, que en ningun caso deja duda acerca de la existencia de las raíces reales, entre números determinados, suministra sin embargo un método de resolucion bastante completo.

---

§ IV. SEGUNDA PARTE DE LA ELIMINACION.

356. Despues de haber dado á conocer los diferentes medios de resolver (al ménos en *números reales*) las ecuaciones de un grado cualquiera con una sola incógnita, conviene ocuparse de la resolucion de las ecuaciones con muchas incógnitas.

Cuando el número de las ecuaciones propuestas es igual al de las incógnitas, no admiten por lo general mas que un *número limitado de sistemas de valores para estas incógnitas.* En la determinacion de todos estos sistemas, pues, es en lo que consiste principalmente el problema de la eliminacion.

Espusimos ya (números 267 y siguientes) una parte de este problema, el que tiene por objeto formar la ECUACION FINAL, es decir una ecuacion funcion de una sola de las incógnitas, que dé todos los valores de esta incógnita propios para verificar las ecuaciones propuestas al mismo tiempo que ciertos valores de las demas incógnitas.

Se trata ahora de completar la solucion del problema, indicando los medios de obtener todos los sistemas de valores propios para verificar

las ecuaciones, lo que no pudimos hacer entónces, por no saber resolver una ecuacion de una solo incógnita.

357. Consideraremos particularmente el caso de *dos ecuaciones con dos incógnitas* x y y; y para abreviar convendremos en llamar *par* ó *solucion* á todo sistema de valores de x y de y que sustituido á la vez en estas ecuaciones las satisfagan.

Ademas, designando por A=0, B=0, las ecuaciones propuestas, supondremos que los dos polinomios A y B son *primeros entre sí*, y que otro tanto sucede con los coeficientes de estos mismos polinomios ordenados relativamente á la incógnita que se quiere eliminar. Nos reservamos examinar mas adelante (números 368 y siguientes) cuáles son las circunstancias particulares en que no se llenan estas condiciones.

358. Concibamos ahora, qué despues de haber ordenado los dos polinomios con relacion á x, por ejemplo, se les aplique el procedimiento del *máximo comun divisor* con todas sus modificaciones, que consisten (núm. 41): para cada division parcial, en introducir un factor tal que haga posible la division del primer término del dividendo por el primer término del divisor, en suprimir despues en cada resta de grado menor que el precedente los factores en y que pueden existir entre sus coeficientes (salvo el tomar mas tarde en cuenta esta supresion).

Admitamos por fin, para fijar las ideas, que haya habido necesidad de ejecutar *cuatro* divisiones sucesivas ántes de obtener una resta funcion de y solamente; y designemos por m, m', m'', m''', los factores *mas simples* en y que es necesario introducir para evitar los cocientes fraccionarios; por q, q', q'', q''', los cocientes de las diversas operaciones; y por $nr\ n'r', n''r'', n'''$, las restas sucesivas (siendo n, n', n'', n''', los factores en y del grado mas elevado que han podido ponerse en evidencia en las restas, y de los que el último es necesariamente independiente de x, y se designa por esta causa por n''').

Se tendrán de este modo las identidades siguientes:

$$(1) \qquad mA = qB + nr$$
$$(2) \qquad m'B = q'r + n'r',$$
$$(3) \qquad m''r = q''r' + n''r'',$$
$$(4) \qquad m'''r' = q'''r'' + n'''.$$

359. Hay desde luego una observacion importante que hacer acerca de estas identidades, y es que los dos factores en y, que entran el uno en el dividendo y el otro en la resta de cada operacion, deben ser

primeros entre sí. Porque supongamos, por ejemplo, que m'' y n'' pueden tener un factor comun k; como la ecuacion (3) es una identidad, seria preciso absolutamente que k se hallase tambien en $q''r'$; y como, por la naturaleza de las operaciones, r' no tiene ya factores en y, siguese que k dividiria á q''; lo que es imposible, á no ser que contra la hipótesis (núm. 358), sea m'' el factor mas simple en y que deba introducirse en la tercera division.

Concluiremos de aquí que las cantidades m y n, m' y n', m'' y n'', m''' y n''', tomadas de este modo dos á dos, *son primeras entre sí*, si se ha operado bien.

Pero puede suceder, y es bastante frecuente, que m y n', n'', y n''', que m' y n'', n''', que m'' y n''', tengan factores comunes. Sin embargo supondremos por un momento que no existan.

360. Admitido esto, se ve desde luego que, segun la identidad, (1) los pares que satisfacen á ($n=0$, $B=0$), satisfacen necesariamente á $m.A=0$, y por consiguiente á $A=0$, porque siendo m y n *primeros entre sí* no pueden anularse por el mismo valor de y.

De modo que las *soluciones* de ($n=0$, $B=0$) son tambien soluciones de ($A=0$, $B=0$); luego los valores de y sacados de $n=0$, son valores convenientes.

Segun la identidad (2) los pares que verifican á ($n'=0$, $r=0$) verifican necesariamente á $m'.B=0$, y por consiguiente $B=0$, pues que m' y n son primeros entre sí. Pero las ecuaciones ($B=0$, $r=0$ dan necesariamente $m.A=0$, y por consiguiente $A=0$); porque m no puede anularse por los mismos valores de y que n'; de otra manera m y n' no serian primeros entre sí. De modo que las soluciones de ($n'=0$, $r=0$) son tambien soluciones de ($A=0$, $B=0$); luego los valores de y sacados de $n'=0$, son tambien valores convenientes.

Por razonamientos análogos se probará que los valores de y sacados de $n''=0$, y despues de $n'''=0$, son valores convenientes.

Luego en fin, todos los valores de y, comprendidos en la ecuacion

$$n.\ n'.\ n''.\ n'''=0,$$

son valores convenientes, es decir, valores que verifican las ecuaciones ($A=0$, $B=0$) al mismo tiempo que ciertos valores de x, que se deducen sucesivamente,

para n, de $B=0$,
n', de $r=0$,
n'', de $r'=0$,
n''', de $r''=0$.

Digo ademas (siempre en la hipótesis de que m, m', m'', m''', no tienen factores comunes con n, n', n'', n'''), que todos los valores convenientes de y los da la ecuacion

$$n.\ n'.\ n''.\ n'''=0.$$

En efecto, el sistema de las ecuaciones ($A=0$, $B=0$) lleva consigo uno ú otro de los dos sistemas

$$(B=0,\ n=0),\qquad (B=0,\ r=0);$$

este último lleva uno de los dos siguientes:

$$(r=0,\ n'=0),\qquad (r=0,\ r'=0);$$

este uno de los dos que siguen:

$$(r'=0,\ n''=0),\qquad r'=0,\ r''=0);$$

y finalmente este último el sistema único

$$r''=0,\ n'''=0.$$

Luego en fin, el sistema de las ecuaciones propuestas no puede satisfacerse sino por los pares sacados de

$$(B=0,\ n=0),\ (r=0,\ n'=0),\ (r'=0,\ n''=0),\ (r''=0,\ n'''=0).$$

361. Nota. Cuando se opera sobre dos ecuaciones de *segundo grado*, en cuyo caso se ve uno conducido á las dos identidades

$$mA=qB+nr,$$
$$m'B=q'r+n',$$

la ecuacion $n.\ n'=0$ solo encierra valores convenientes.

En efecto, como en este caso las ecuaciones $A=0$, $B=0$, pueden reducirse (núm. 116) á la forma

$$ax^2+bx+c=0,$$

en que es a una cantidad independiente de y, se sigue que el primer factor introducido, m, es una cantidad enteramente conocida; de modo que m es primero en y con n y n'.

Luego el sistema de las ecuaciones (A=0, B=0) puede reemplazarse por los dos sistemas (n=0, B=0), (n'=0, r=0).

La misma consecuencia tiene evidentemente lugar para todo sistema de dos ecuaciones una de las cuales es de segundo grado en x (sea el que quiera por otra parte el grado en y), con tal que el coeficiente de x^2, en esta ecuacion sea una cantidad numérica.

362. Pasemos al caso en que existen factores comunes entre las cantidades m, m', m'',..., y n', n'', n'''...

Tomemos otra vez las identidades

$$(1)\qquad m\,A=q\,B+n\,r,$$
$$(2)\qquad m'\,B=q'\,r+n'\,r',$$
$$(3)\qquad m''\,r=q''\,r'+n''r'',$$
$$(4)\qquad m'''r'=q'''r''+n''';$$

y observemos primeramente que como m y n son primeros entre sí (número 359), el primer sistema de ecuaciones [n=0, B=0] lleva necesariamente consigo el sistema [A=0, B=0]; de suerte que los valores de y sacados de n=0, son valores convenientes.

Supongamos ahora que m y n' encierran un factor comun α; y sean

$$m=\alpha.m_1,\quad n'=\alpha.n'_1;$$

(siendo m_1 y n'_1 primeros entre sí).

Las identidades (1) y (2) se hacen

$$\alpha.m_1.A=q.B+n.r,$$
$$m'.B=q.r+\alpha.n'_1.r'.$$

Ahora bien; si entre estas dos ecuaciones se elimina B, empleando el método por adicion y sustraccion (núm. 51) se obtiene

$$\alpha.m_1m'.A=(nm'+qq')r+q\alpha.n'_1.r',$$

identidad cuyo primer miembro es divisible por α, al mismo tiempo que la segunda parte del otro miembro; luego si r no puede tener factores en y (segun la naturaleza de las operaciones indicadas en el número 358) es preciso que $nm'+qq'$ sea divisible por α.

Llamando k al cociente, y dividiendo los dos miembros de la identidad precedente por α, se halla en fin

$$(5)\qquad m_1m'.A=k.r+q.n'_1.r'.$$

Sentado esto, como n'_1 es primero con m_1 y tambien con m' (pues que $n'=\alpha.n_1'$. y m', n', son primeros entre sí), se sigue que toda solucion de las ecuaciones [n_1'=0, r=0] satisface á A=0.

Por otro lado, la identidad (2) prueba que se tiene al mismo tiempo B=0, puesto que n', y por consiguiente n'_1. es primero con m'.

De manera que las soluciones sacadas de las ecuaciones

$$[n=0,\ B=0],\ [n'_1=0,\ r=0],$$

son otras tantas soluciones de las ecuaciones propuestas.

En otros términos, los valores sacados de $n.n'_1$=0 son valores convenientes.

Admitamos ademas que m_1 $\left(\text{ó } \frac{m}{\alpha}\right)$ y m' tengan factores comunes con n''; y supongamos

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m}{\alpha}\ \text{ó}\ m_1=\beta.m_2\\ n''=\beta.n''_1\end{array}\right\}\ m_2 \text{ y } n''_1 \text{ son primeros entre sí;}$$

$$\text{y}\quad \left.\begin{array}{l}m'=\beta'.m'_1\\ \text{y}\ \frac{n''}{\beta}\ \text{ó}\ n''_1=\beta.n''_2\end{array}\right\}\ m'_1 \text{ y } n''_2 \text{ son primeros entre sí;}$$

(deduciéndose de estas relaciones $m=\alpha\beta.m_2$ y $n''=\beta\beta'.n''_2$).

Introduciendo los valores de m_1. m'_2 n'', en las identidades (5), (2) y (3), se las cambia en estas:

$$\beta\beta'.\,m_2m'_1A=\ k.\,r+\ \ q.\,n'_1.\,r',$$
$$\beta'.\,m'_1.B=\ q'.\,r+\ \ \alpha.\,n'_1.\,r',$$
$$m''.\,r=q''.\,r'+\beta\beta'.\,n''_2r''.$$

Eliminemos r entre la primera y la tercera de las identidades precedentes, y saldrá

$$\beta\beta'.\,m_2m'_1m''.A=(qn'_1m''+kq'')r'+k.\,\beta\beta'n''_2.r''.$$

Razonando como ántes se ve uno conducido á poner

$$qn'_1m''+kq''=\beta\beta'.\,k' \text{ (siendo } k' \text{ entero);}$$

y dividiendo por $\beta\beta'$, se halla

$$(6) \qquad m_2 m'_1 m''.\ A = k'.\ r' + k.\ n''_2.\ r''.$$

Eliminemos igualmente r entre la segunda y la tercera, y supongamos luego

$$\alpha.\ n' m'' + q' q'' = \beta'.\ h \text{ (siendo } h \text{ entero);}$$

y dividiendo por β' los dos miembros de la identidad resultante, se obtiene

$$(7) \qquad m'_1 m''.\ B = h.\ r' + \beta.\ q' n''_2 r''.$$

Si se consideran las identidades (6) y (7), se observará que n''_2 es primero con m'', pues que $n'' = \beta\beta'.\ n''_2$, y m'', n'', son primeros entre sí (núm. 359); n''_2 es tambien primero con m'_1, como acabamos de establecer; y en fin n''_2, es primero con m_2, por ser primero con m, que es igual á $\beta.\ m_2$.

De aquí resulta necesariamente que el sistema de las ecuaciones $[n''_2 = 0,\ r' = 0]$ lleva consigo al $[A = 0, B = 0]$.

Las raíces, pues, de la ecuacion $n.\ n'_1.\ n''_2 = 0$ son valores convenientes.

Supongamos en fin que n''' tenga factores comunes con $m_3 | m'_1 | m''$; y supongamos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m}{\alpha\beta} \text{ ó } m_2 = \gamma.\ m_2 \\ \qquad\qquad n''' = \gamma.\ n'''_1 \end{array}\right\} m_3 \text{ y } n'''_1 \text{ son primeros entre sí;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m'}{\beta'} \text{ ó } m'_1 = \gamma'.\ m'_2 \\ \dfrac{n'''}{\gamma} \text{ ó } n'''_1 = \gamma'.\ n'''_2 \end{array}\right\} m'_2 \text{ y } n'''_2 \text{ son primeros entre sí;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad m'' = \gamma''.\ m''_1 \\ \dfrac{n'''}{\gamma\gamma'} \text{ ó } n'''_2 = \gamma''.\ n'''_3 \end{array}\right\} m''_1 \text{ y } n'''_2 \text{ son primeros entre sí:}$$

(de estas relaciones se deduce $m = a\beta\gamma.\ m_3 | m' = \beta'\gamma'.\ m'_2 | n''' = \gamma\gamma'\gamma''.\ n''_3$).

Las identidades (6), (7) y (4) se transforman entónces en las siguientes:

$$\gamma\gamma'\gamma''.\ m_3 m'_2 m''_1.\ A = k'.\ r' + k.\ n''_2.\ r'',$$
$$\gamma'\gamma''.\ m'_2 m''_1.\ B = h.\ r' + \beta.\ q' n''_2.\ r'',$$
$$m'''.\ r' = q''' r'' + \gamma\gamma'\gamma''.\ n'''_3.$$

Si se elimina, pues, r', primero entre la primera y tercera de las transformadas y despues entre las dos últimas, y se pone,

$$k.\ n''_2 m''' + k'.\ q''' = \gamma\gamma'\gamma''.\ k'' | \beta.\ q' n''_2 m''' + h q''' = \gamma'\gamma''.\ h'$$

(siendo cantidades enteras k'' y h'); y si se divide en fin por $\gamma\gamma'\gamma''$ la primera de las identidades resultantes, y por $\gamma'\gamma''$ la segunda, se obtendrá

$$(8) \qquad m_3 m'_2 m''_1 m'''.\ A = k'''.\ r'' + k'.\ n'''_3,$$
$$(9) \qquad m'_2 m''_1 m'''.\ B = h'.\ r'' + \gamma.\ h.\ n'''_3,$$

identidades que nos dicen que las ecuaciones $[n'''_3 = 0,\ r'' = 0]$ llevan consigo á $[A = 0,\ B = 0]$; pues se reconoce fácilmente que n'''_3 es primero con $m''' | m''_1 | m'_2 | m_3$, segun lo arriba dicho.

De modo que los valores sacados de la ecuacion,

$$n.\ n''_1.\ n''_2.\ n'''_3 = 0$$

son valores convenientes.

363. Resta aun probar que todos los valores convenientes se hallan comprendidos en esta ecuacion.

Así, pues, si en las identidades (1), (2), (3) y (4), se reemplazan m, m', m'', y n', n'', n''', por sus valores, se convierten en

$$\alpha\beta\gamma.\ m_3.\ A = q\ .\ B + n.\ r,$$
$$\beta'\gamma'.\ m'_2.\ B = q'\ .\ r + \alpha.\ n'_1.\ r',$$
$$\gamma''.\ m''_1.\ r = q''\ .\ r' + \beta\beta'.\ n''_2.\ r'',$$
$$m'''.\ r' = q'''.\ r'' + \gamma\gamma'\gamma''.\ n'''_3.$$

Sentado esto, vamos á eliminar sucesivamente r'', r' y r, entre estas cuatro transformadas, comenzando por r''. Sale primeramente por la combinacion de las dos últimas,

$$\gamma''.\ m''_1.\ q'''.\ r = (q'' q''' + \beta\beta'.\ n''_2 m''')\ r' - \beta\beta'\gamma\gamma'\gamma'' n''_2 n'''_3,$$

identidad en la cual $q'' q''' + \beta\beta'.\ n''_2.\ m'''$ debe ser divisible por γ''; y si se supone $q'' q''' + \beta\beta'.\ n''_2\ m''' = \gamma''.\ l$, y se divide luego por γ'', resulta

$$m''_1.\ q'''.\ q = l.\ r' - \beta\beta'\gamma\gamma'.\ n''_2 n'''_3.$$

Hagamos ahora la eliminacion de r' entre esta última identidad y

$$\beta'\gamma'.\ m'_2.\ \mathrm{B}=q'_1.\ r+\alpha.\ n'_1.\ r';$$

supongamos

$$q'.\ l+\alpha.\ n'_1 m''_1.\ q'''=\beta'\gamma'.\ l' \text{ (siendo } l' \text{ entero)},$$

y dividamos por $\beta'\gamma'$ la identidad resultante : obtendremos

$$m'_2.\ l.\ \mathrm{B}=l'.\ r+\alpha\beta\gamma.\ n'_1\, n''_2 n'''_3.$$

Eliminando en fin r entre esta identidad y

$$\alpha\beta\gamma.\ m_3.\ \mathrm{A}=q.\ \mathrm{B}+n.\ r,$$

se halla, despues de haber supuesto $ql'+nm'_2 l=\alpha\beta\gamma.\ l''$; y dividido por $\alpha\beta\gamma$ los dos miembros de la identidad resultante,

$$m_3.\ l'.\ \mathrm{A}=l''.\ \mathrm{B}+n.\ n'_1 n''_2 n'''_3,$$

igualdad que nos manifiesta que todos los valores de y que satisfacen á [A=0, B=0], al mismo tiempo que ciertos valores de x, anulan necesariamente á $nn'_1 n''_2 n'''_3$, y proceden por consiguiente de la ecuacion

$$n'.\ n'_1.\ n''_2.\ n'''_3=0:$$

Q. E. L. Q. Q. D.

364. Si se ha entendido lo que llevamos dicho en los dos últimos múmeros, se comprenderá fácilmente la regla siguiente para determinar la ecuacion que debe dar todos los valores de y, sin ningun valor estraño.

Sea p el número total de las divisiones efectuadas m, m' m'', m''',..., $m'^{(p-1)}$, los factores introducidos en el curso del cálculo para dar los cocientes enteros, n, n', n'', n''',..., $n'^{(p-1)}$, los factores en y puestos en las diferentes restas. [$n^{(p-1)}$ designa la última resta ó la resta independiente de x.]

PRIMERAMENTE. Búsquese el *m. c. d.* α entre m y n' el *m. c. d.* β entre $\frac{m}{\alpha}$ y n'' : el *m. c. d.* γ, entre $\frac{m}{\alpha\beta}$ y m'''... el *m. c. d.* entre $\frac{m}{\alpha\beta\gamma\ldots}$ y $n'^{(p-1)}$. — *Suprímanse* estos máximos comunes divisores en n', n'', n''',... $n^{(p-1)}$, y desígnense los cocientes por

$$n'_1,\ |n''_1,\ |n'''_1,\ |\ldots n_1,\ ^{(p-1)}.$$

EN SEGUNDO LUGAR. *Búsquese* el *m. c. d.* β entre m'' y n_2''; el *m. c. d.* γ' entre $\frac{m'}{\beta'}$ y n_1''';... el *m. c. d.* entre $\frac{m'}{\beta'\gamma'\ldots}$ y $n_1^{(p-1)}$.

Suprímanse estos máximos comunes divisores en $n_1''|n_1'''|\ldots n_1^{(p-1)}$, y desígnense los cocientes por

$$n_2''|n_2'''|\ldots n_2^{(p-1)}.$$

EN TERCER LUGAR. *Búsquese* el *m. c. d.* γ'' entre m'' y n_2'''; el *m. c. d.* δ'' entre $\frac{m''}{\gamma''}$ y n_2^{IV};... el *m. c. d.* entre $\frac{m''}{\gamma''\delta''}$ y $n_2^{(p-1)}$.

Suprímanse estos *m. c.* divisores en $n_2'''|n_2^{\mathrm{IV}}|\ldots n_2^{(p-1)}$.
y desígnense los cocientes por $n_3'''|n_3^{\mathrm{IV}}|\ldots n_3^{(p-1)}$.

Continúense en fin estas investigaciones hasta los dos factores $m^{(p-2)}$ y $n^{(p-1)}_{p-2}$ inclusives.

La ecuacion $n.\ n_1'.\ n_2''.\ n_3'''\ldots n^{(p-1)}_{p-1}=0$

dará todos los valores convenientes, sin dar ninguno estraño.

365. Apliquemos á algunos ejemplos la teoría precedente.

PRIMER EJEMPLO.

(1) $$yx^3-3x+1=0,$$
(2) $$(y-1)x^2+x-2=0.$$

Con arreglo al procedimiento es preciso multiplicar por $(y-1)^2$ el primer miembro de la ecuacion (1) y efectuar la division.

Se obtiene de este modo por cociente $(y^2-y)\ x-y$, y por resta del primer grado en x $(-y^2+5y-3)x+y^2-4y+1$.

Es pues fácil de reconocer que ninguno de los coeficientes de esta resta tiene factor comun en y; de manera que para continuar la operacion es preciso multiplicar el primer mienbro de la ecuacion (2) por $(y^2-5y+3)^2$, y dividir despues este primer miembro así multiplicado por la resta cambiada de signo.

Se obtiene por cociente $(y^3-6y^2+8y-3)\ x+y^3-4y^2+2$, y para resta $y^5-10y^4+37y^3-64y^2+52y-16$.

En este ejemplo no ha habido que ejecutar mas que dos operaciones principales; y se puede poner

$$m=(y-1)^2,\ n=1,\ r=-[(y^2-5y+3)x-y^3+4y-1],$$
$$m'=(y^2-5y+3)^2,\ n'=y^5-10y^4+37y^3-64y^2+52y-16.$$

(Es inútil tener en cuenta los cocientes.)

Ahora es preciso averiguar si m y n' tienen factores comunes. Pero dividiendo n' por m se obtiene un cociente exacto é igual á

$$y^3-8y^2+20y-16.$$

Luego m ó $(y-1)^2$ es un factor estraño; y la verdadera ecuacion final es

$$n_1' \text{ ó } y^3-8y^2+20y-16=0.$$

Esta ecuacion, resuelta segun el método de las raíces conmensurables, da

$$y=2,\ y=2,\ y=4.$$

Llevando cada uno de estos valores á la resta del primer grado en x, obtenida arriba, se halla

$$x=1,\ x=1,\ x=-1.$$

SEGUNDO EJEMPLO.

(1) $$x^3-(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x-y^3+3y^2+y-3=0,$$
(2) $$x^2+(2y+4)x+y^2+4y+3=0.$$

Dividiendo el uno por otro los primeros miembros de estas ecuaciones, se obtiene un cociente (que es inútil escribir) y una resta del primer grado en x, igual á

$$(12y^2+12y)x+4y^3+24y^2+20y).$$

Esta resta, pues, puede transformarse de este modo:

$$4y(y+1)(3x+y+5);$$

de donde debe ya concluirse que $y=0$. $y=-1$, son valores convenientes y deben formar parte de la ecuacion final.

Suprimamos por un instante los factores y é $y+1$ en la resta del primer grado en x; y tomemos por nuevo dividendo el primer miembro de la ecuacion (2); y luego por divisor la resta del primer grado en x, desembarazada del factor $4y(y+1)$, es decir

$$3x+y+5;$$

sale, hecha la acostumbrada preparacion, un cociente que podemos dispensarnos de escribir, y una resta independiente de x, á saber:

$$y^2+y-2, \text{ ó } (y-1)(y+2).$$

En este ejemplo, que se refiere al caso particular de que se ha tratado (núm. 361), se tiene

$$m=1,\ n=y(y+1),\ \text{y}\ r=3x+y+5,$$

luego $$m'=9,\ \text{y}\ n'=(y-1)(y+2);$$

lo cual prueba que

$$n.n' \text{ ó } y(y+1)(y-1)(y+2)=0$$

suministra todos los valores de y que convienen á las ecuaciones propuestas, y no da ninguno estraño.

Para obtener las diversas soluciones, es preciso

1°. Combinar cada uno de los valores $y=0$, $y=-1$, con la ecuacion (2), ó $x^2+(2y+4)x+y^2+4y+3=0$; lo que da

para $y=0$, $x^2+4x+3=0$, de donde $x=-1$, $x=-3$;
para $y=-1$, $x^2+2x=0$, de donde $x=0$, $x=-2$.

2°. Combinar cada uno de los valores $y=1$, $y=-2$, con la ecuacion $$3x+y+5=0;$$

lo que da para $y=1$, $3x+6=0$, de donde $x=-2$;
para $y=-2$, $3x+3=0$, de donde $x=-1$.

TERCER EJEMPLO.

(1) $$y^3x^2-3y^3x-y^2+2=0,$$
(2) $$(y^2-3y+2)x^2+(y-1)x-3y+1.$$