Como estas ecuaciones son del mismo grado en x, puede tomarse indiferentemente el primer miembro de una ú otra por dividendo.

Tomemos primeramente (1) por dividendo, y multipliquemos por y^2-3y+2; y efectuemos luego la division.

Sale por cociente. . . . . y^5,

y para resta $(-3y^5+8y^4-5y^3)\,x+2y^4+2y^3-6y+4$.

El coeficiente del primer término de esta resta puede ponerse bajo la forma

$$-y^3\,(y-1)\,(3y+5);$$

y como $y=0$, $y=1$, $y=-\frac{5}{3}$, no pueden anular á $2y^4+2y^3-6y+4$, se sigue que la resta del primer grado en x no tiene factor en y.

Por otra parte, como el coeficiente del primer término de (2), ó y^2-3y+2 se reduce á $(y-1)\,(y+2)$, resulta que para continuar la operacion basta multiplicar el primer miembro de (2) por $y^6(y-1)\,(3y+5)^2$. Hecha esta preparacion, y efectuada la nueva division, se obtiene cierto cociente (que omitiremos) y una resta independiente de x, que cambiada de signo, es igual á

$$27y^{10}-136y^9+214y^8-112y^7+65y^6-100y^5+30y^4-24y^3$$
$$+120y^2-112y+32.$$

Sin embargo, es menester asegurarse de que esta resta no contiene factores estraños. Mas segun la teoría estos factores no pueden ser sino $(y-1)$ y $(y-2)$, que componen el primer multiplicador introducido.

Como la hipótesis $y=1$ no destruye el polinomio precedente, se sigue que $y-1$ no lo divide; pero si se ensaya la division por $y-2$, se halla un cociente exacto é igual á

$$27y^9-82y^8+50y^7-12y^6+41y^5-18y^4-6y^3-36y^2+48y-16,$$

que no es ya divisible por $y-2$. Así pues, este cociente igualado á cero da la verdadera ecuacion final.

Tratemos el mismo ejemplo, tomando á (2) por dividendo; y para ello multipliquemos (2) por y^3, y efectuemos despues la division. Sale un cociente (que es inútil escribir), y una resta del primer grado en x igual á

$$(3y^5-8y^4+5y^3)\,x-2y^4-2y^3+6y-4$$

El coeficiente del primer término de esta resta es

$$y^3\,(y-1)\,(3y-5);$$

y como ninguno de los factores de este producto se halla en el segundo término, se sigue que para continuar la operacion es preciso multiplicar (1) por $y^3\,(y-1)^2\,(3y-5)^2$.

Despues de esta nueva preparacion, se efectúa la division, y se obtiene por resta independiente de x,

$$27y^2-82y^8+50y^7-12y^6+41y^5-18y^4-6y^3-36y^2+48y-16,$$

polimonio que, igualado á cero, da la verdadera ecuacion final, pues que el primer multiplicador introducido, y^4, no tiene factor alguno comun con esta resta.

No insistiremos sobre la determinacion de los *pares* de valores que satisfacen á las ecuaciones propuestas, porque solo la investigacion de las raíces de la ecuacion final seria ya de por sí muy trabajosa. Pero es notable este ejemplo, en cuanto á que con la manera con que se empieza la operacion, se llega inmediatamente á la verdadera ecuacion final, ó á la ecuacion desembarazada de toda raíz estraña.

366. Observacion importante, *sobre las soluciones infinitas*. Reflexionando acerca de la teoría desarrollada en los números 360...364, se reconoce fácilmente que los razonamientos de que se compone solo se aplican á las soluciones de las ecuaciones en *cantidades finitas*, reales ó imaginarias.

Por lo que toca á las soluciones *infinitas* á que dan lugar ciertos sistemas de ecuaciones, es siempre fácil descubrirlas, ya sea al fin de las operaciones, ya en el curso del cálculo, ó ya en fin subiendo á las mismas ecuaciones, como se verá en los nuevos ejemplos que vamos á tratar.

CUARTO EJEMPLO.

(1) $x^2-y^2-6y-9=0$,
(2) $x^2+2y.\,x+y^2-1=0$.

La primera division no exige preparacion alguna; y da 1 para cociente, y luego para resta, cambiada de signo y dividida por 2,

$$y.\,x+y^2+3y+4.$$

Multiplicando el primer miembro de (2) por y^2, y efectuando la division, se obtiene cierto cociente, y despues una resta independiente de x, que, hecha la simplificacion, se reduce á

$$y^2+3y+2, \text{ ó } (y+1)(y+2).$$

Como las ecuaciones propuestas son del segundo grado, puede afirmarse (núm. 361) que $y=-1$, $y=-2$, son valores convenientes.

Sustituyéndolos en la resta del primer grado en x, se tiene

1°. para $y=-1$, $-x+2=0$, de donde $x=2$;
2°. para $y=-2$, $-2x+2=0$, de donde $x=1$.

Digo ademas que existen para las ecuaciones propuestas *dos* pares de valores *infinitos*.

En efecto, en los cálculos de que es susceptible la última division, la resta final, que deberia en la apariencia ser del cuarto grado, se reduce al segundo por efecto de las simplificaciones; pero no por eso deja la ecuacion de poder ponerse bajo la forma

$$0.\,y^4+0.\,y^3+8y^2+24y+16,$$

y admite de este modo (núm. 243) *dos* valores infinitos.

Llevando estos valores á la resta del primer grado que es

$$x=-\frac{y^2+3y+4}{y}=-y-3-\frac{4}{y},$$

se halla igualmente $x=\infty$, $x=\infty$.

Pudimos hacer resaltar la existencia de *los* pares de valores infinitos en la ecuaciones propuestas, observando que equivalen á

$$x^2=(y+3)^2, \text{ ó } x^2-(y+3)^2=0,$$
$$(x+y)^2=1, \text{ ó } (x+y)^2-1=0;$$

es decir que es cada una de ellas descomponible en dos factores del primer grado, dando lugar á los siguientes sistemas :

$$x+y+3=0 \quad x-y-3=0 \quad x+y+3=0 \quad x-y-3=0$$
$$x+y-1=0 \quad x+y-1=0 \quad x+y+1=0 \quad x+y+1-0;$$

de suerte que el segundo y el cuarto admiten respectivamente los pares

$$[x=2,\ y=-1],\ [x=1,\ y=-2],$$

aunque el primero y el tercero quedan comprendidos (núm. 74) en la clase de las ecuaciones de dos incógnitas cuyas soluciones son *infinitas*.

QUINTO EJEMPLO.

(1) $(y-1)x^3+4(y-1)x^2+(5y-2)x+2y+1=0,$
(2) $(y-1)x^2+3(y-1)x+3y=0.$

Este ejemplo da por resta de la primera operacion

$$-(y-1)(x+1).$$

Suprimiendo el factor $(y-1)$, y dividiendo el primer miembro de (2) por $x+1$, se halla para resta final,

$$y+2.$$

El valor $y=-2$, sustituido en $x+1=0$, da $x=-1$.

En cuanto al valor $y=1$, sacado del factor $y-1$ igualado á 0, sustituyéndolo en el divisor de la primera operacion, es decir, en la ecuacion (2), se obtiene

$$0.\,x^2+0.\,x+3=0;$$

lo que da *dos* valores infinitos para x.

Y en efecto, el mismo valor $y=1$ sustituido en la ecuacion (1) da $0.\,x^3+0.\,x^2+3x+3=0$, que admite igualmente dos valores infinitos.

De modo que las ecuaciones propuestas admiten primeramente *un solo* sistema de valores *finitos*, $y=-2$, $x=-1$, y despues *dos* sistemas de valores, *finitos* para y é *infinitos* para x, á saber : $[y=1,\ x=\infty]$ $[y=1,\ x=\infty]$.

Por lo general se obtienen los sistemas de valores *finitos* para una de las incógnitas é *infinitos* para la otra, hecha la inspeccion de las ecuaciones propuestas, ordenándolas alternativamente con relacion á cada incógnita. Se mira entónces si algunos de los coeficientes de la incógnita respecto á cuyas potencias están ordenados los polinomios, pueden anularse para el mismo valor de la otra incógnita.

Así es como el sistema de las ecuaciones

$$y^2x^2-x-3=0,\ yx^2-3yx+4=0,$$

ademas de las soluciones ordinarias en números finitos, admite los dos pares

$$[y=0,\ x=\infty],\ [x=0,\ y=\infty].$$

Hasta ahora hemos supuesto que aplicando el método de eliminacion con todas sus modificaciones (núm. 358), se llega á una resta final funcion de y. Pero no siempre sucede así; y la última division que sufre el procedimiento da á veces lugar, ya á una resta *numérica*, ya á una resta *nula*.

Examinemos sucesivamente estos dos casos.

367. Primer caso. *Resta numérica y diferente de* 0.

SEXTO EJEMPLO.

$$(1)\qquad yx^3-(y^3-3y-1)\,x+y=0,$$
$$(2)\qquad x^2-y^2+3=0.$$

La primera division da por cociente xy, y para resta $x+y$.

En la segunda el cociente es $x-y$, y la resta, $+3$.

Este resultado prueba que son *incompatibles* las dos ecuaciones, esto es, que no admiten *ninguna solucion* en números *finitos*.

Y en efecto, como aplicando á los dos polinomios propuestos el procedimiento del máximo comun divisor se obtiene una resta *numérica* ántes que sustitucion alguna particular hecha para y, se sigue que el mismo procedimiento, aplicado á los dos polinomios en x que resultarian de la sustitucion, por y, de un valor particular cualquiera daria lugar á la misma resta numérica; por donde se ve que ningun valor de y podria introducir comun divisor en x, condicion que es inseparable (269) sin embargo de todo valor conveniente en y.

En el ejemplo anterior es fácil poner en evidencia la incompatibilidad de las dos ecuaciones; porque resulta de la primera operacion que puede ponerse la ecuacion (1) bajo la forma

$$(x^2-y^2+3)\ yx+x+y=0,$$

ecuacion, que atendida la (2), se reduce á

$$x+y=0;$$

de donde se deduce $(x+y)\ (x-y)$, ó $x^2-y^2=0$.

Pero este último resultado es evidentemente contradictorio con

$$x^2-y^2+3=0,$$

miéntras x é y sean cantidades *finitas*.

Nota. — Conviene observar que en el caso que nos ocupa, en tanto que haya incompatibilidad entre las ecuaciones propuestas, no ha habido factor en y suprimido en las diferentes restas. Pues sabido es que en general á estos factores suprimidos corresponden pares de valores *finitos* para x y para y, de los cuales debe tenerse cuenta al final de la operacion.

368. Segundo caso.— *Resta nula.*

SÉPTIMO EJEMPLO.

$$(1)\qquad x^3-(3y+5)x^2+(3y^2+10y+6)x-y^3-5y^2-6y=0.$$
$$(2)\qquad x^3-5yx^2+(8y^2-1)x-4y^3+y=0.$$

Aplicando á estas dos ecuaciones el procedimiento ordinario, se obtienen sucesivamente las dos restas

$$(3)\qquad (2y-5)x^2-(5y^2-10y-7)x+3y^3-5y^2-7y,$$
$$(y^4-10y^3+35y^2-50y+24)x-y^5+10y^4-35y^3+50y^2-24y,$$
$$\text{ó}\ (4)\qquad (y^4-10y^3+35\ y^2-50y+24)\ (x-y).$$

Suprimiendo en esta última resta el factor en y que se halla en evidencia, y dividiendo (3) por $x-y$, se obtiene un cociente exacto é igual á

$$(5)\qquad (2y-5)x-3y^2+5y+7;$$

lo cual prueba que $(x-y)$ es divisor comun de los primeros miembros de (1) y de (2).

En efecto, ensayada la division, se reconoce que estas ecuaciones pueden ponerse bajo la forma

$$[x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6]\ (x-y)=0,$$
$$(x^2-4yx+4y^2-1)\ (x-y)=0,$$

y son por consiguiente *indeterminadas*. Quedan comprendidas, pues, en el caso examinado en el núm. 268.

Si se suprime el factor $x-y$ que las hace indeterminadas, y se supone

$$x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6=0,$$
$$x^2-4yx+4y^2-1=0,$$

se pueden pedir las *soluciones* (en número limitado) comunes á estas nuevas ecuaciones y que pertenecen igualmente á las propuestas.

Digo, pues, que para obtener la ecuacion final y la resta del primer grado en x, que correspondan á las nuevas ecuaciones, se puede echar mano de los cálculos precedentes.

Para hacernos cargo de esta circunstancia de una manera general, llamemos A y B á los primeros miembros de las dos ecuaciones propuestas; y sean $A=A'D$, $B=B'D$, siendo D un factor comun en x é y; ó bien en x solamente.

Aplicando desde luego á los dos polinomios el procedimiento ordinario se hallará *una primera serie* de cocientes, y *una primera serie* de restas, que contendrán igualmente el factor comun.

Pero si se suprime este factor en A y en B, y se quiere en seguida operar sobre los polinomios resultantes A′ y B′, se volverán á hallar necesariamente los *mismos cocientes*, y restas que no diferirán de los de la primera serie de operaciones sino en que no contendrán ya el factor comun. Luego la última resta, entre otras, de la segunda serie de operaciones, no diferirá de la última resta de la primera serie sino en la desaparicion del factor comun.

Así que, el primer miembro de la ecuacion final que corresponde á $A'=0$, $B'=0$, no es otra cosa mas que la última resta de la primera serie de operaciones, desembarazada del factor comun; es decir, *el factor comun en* y *que hay entre los coeficientes*.

En el ejemplo anterior, este factor es

$$y^4-10y^3+35y^2=50y+24.$$

En cuanto á la resta de primer grado en x de la segunda serie de operaciones, *debe ser igual á la penúltima resta* de la primera, *dividida* por el factor comun: es pues el *último cociente* (5) de la primera serie, ó bien

$$(2y-5)x-3y^2+5y+7.$$

Resuelta la ecuacion $y^4-10y^3+35y^2-50y+24=0$, con sujecion al método de las raíces conmensurables, da para valores

$$y=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Sustituyendo alternativamente cada uno de estos valores en la resta de primer grado en x, y resolviendo esta resta igualada á cero, se halla para los valores de x correspondientes

$$x=3,\ 5,\ 5,\ 7.$$

OCTAVO EJEMPLO.

(1) $$x^3-(3y-1)x^2+(y^3-2y)x+y^2+y=0,$$
(2) $$x^3-(y-1)x^2-(y-1)x+1=0.$$

Se obtiene primeramente para la resta de segundo grado

(3) $$2yx^2-(y^2-y-1)x-y^2-y+1:$$

y para resta de primero

$$(y^4-5y^2+2y-1)x+y^4-5y^2+2y-1,$$
ó (4) $$(y_4-5y^2+2y-1)(x+1).$$

Suprimiendo el factor en y que se halla en (4), y dividiendo luego (3) por $(x+1)$, se obtiene un cociente exacto é igual á

(5) $$2yx-y^2-y+1;$$

de donde puede concluirse que $x+1$ es divisor comun de las dos propuestas.

Estas ecuaciones, desembarazadas del factor $(x+1)$ se reducen á

$$x^2-3yx+y^2+y=0,$$
$$x^2-xy+1=0;$$

y la cuestion se reduce á encontrar las *soluciones* comunes á estas nuevas ecuaciones.

Aplicando, pues, la regla que establecimos mas arriba, se halla para ecuacion final

$$y^4-5y^2+2y-1=0,$$

[esto es el factor en y que se encuentra en (4)] y para la ecuacion del primer grado en x correspondiente, la resta (5) igualada á cero, es decir

$$2yx-y^2-y+1=0.$$

Como la primera de estas dos ecuaciones no admite raices conmensurables, seria preciso aplicar el método de las raíces inconmensurables; hecho lo cual se sustituiria cada uno de los valores de y obtenidos en la segunda ecuacion, que daria entónces los valores de x correspondientes.

369. Para completar la teoría de la eliminacion entre dos ecuaciones, nos resta examinar el caso en que hallándose los primeros miembros de las ecuaciones propuestas ordenados con relacion á la incógnita que se quiere eliminar, y por ejemplo, encierran los coeficientes un factor funcion de y (véase el núm. 357).

Sean siempre $A=0$, $B=0$, las ecuaciones propuestas; y supongamos en PRIMER LUGAR que solo A encierra un factor F, funcion de y; de modo que se tenga $A=A'\times F$.

Como cada uno de estos valores de y sacados de $F=0$ satisface necesariamente á $A=0$, cualquiera que sea x, se sigue que si se sustituyen sucesivamente estos valores en $B=0$, y se determinan los valores de x correspondientes á cada una de estas sustituciones, se obtendrán otros tantos *pares* de valores de x y de y propios para verificar simultáneamente las ecuaciones $A=0$, $B=0$.

En otros términos, el sistema de las ecuaciones ($A=0$, $B=0$) puede reemplazarse por los dos sistemas

$$[A'=0,\ B=0],\ [F=0,\ B=0];$$

de manera que si se llama $Y=0$, la ecuacion final correspondiente al sistema $[A'=0,\ B=0]$, la ecuacion

$$Y\times F=0$$

es la ecuacion final correspondiente al sistema propuesto, pues que suministra todos los valores convenientes de y, sin dar ninguno estraño.

(Se entiende sin embargo que entre estos valores de y se hallan comprendidos aquellos á que corresponden valores de x INFINITOS. Así, por ejemplo, en el caso en que entrase en *uno* ó *muchos* de los primeros coeficientes de B, un factor $y-\beta$, perteneciente á F, se seguiria que para este valor de y se obtendria *uno* ó *muchos* valores infinitos de x.)

EN SEGUNDO LUGAR, sean $A=A'\times F$, $B=B'\times F'$, en que F y F' son *primeros entre sí*.

Se demostraria como ántes que el sistema de las ecuaciones $[A=0,\ B=0]$ puede reemplazarse por los tres sistemas

$$[A'=0,\ B'=0],\ [=0,\ B'=0],\ F'=0,\ A'=0].$$

De modo que la ecuacion $Y\times F\times F'=0$ es la ecuacion final que corresponde á las ecuaciones propuestas.

En TERCER LUGAR en fin, sean $A=A'\times F$, $B=B'\times F'$, en que F y F' tengan un factor comun, funcion de y.

Llamemos φ á este factor comun, y f, f', á los cocientes respectivos de F, F', divididos por φ. Las ecuaciones propuestas son entónces de la forma

$$A'\times f\times\varphi=0,\ B'\times f'\times\varphi=0,$$

y pueden ser satisfechos por cada uno de los valores de y sacados de $\varphi=0$, al mismo tiempo que por un valor cualquiera de x; luego son *indeterminadas* (núm. 368).

Pero si se suprime este factor φ que las hace indeterminadas, se obtienen las nuevas ecuaciones

$$A'\times f=0 \qquad B'\times f'=0$$

(siendo $Y=0$ la ecuacion final relativa á $A'=0$, $B'=0$).

370. Terminaremos el párrafo de la eliminacion con dos ejemplos en que los primeros miembros de las ecuaciones propuestas pueden descomponerse *a priori* en factores, los unos funcion de x ó de y solamente; los otros funcion de x y de y á la vez, en cuyo caso la determinacion de los *pares* se hace mucho mas fácil que por el método general.

NOVENO EJEMPLO.

$$(y-1)(x^2-xy-y^2+1)=0,$$
$$(x^2-1)(x^2-xy-2)=0.$$

Con sujecion á lo dicho en el número precedente, puede reemplazarse el sistema por las cuatro ecuaciones siguientes:

(1) $y-1=0,\quad x^2-1=0,$
(2) $y-1=0,\quad x^2-xy-2=0,$
(3) $x^2-1=0,\quad x^2-xy-y^2+1=0,$
(4) $x^2-xy-y^2+1=0,\quad x^2-xy-2=0.$

El sistema (1) da desde luego los *pares*

$$[y=+1,\ x=+1],\ [y=+1,\ x=-1]:$$

el sistema (2) $\qquad y=1,\ x^2-x-2=0;$

de donde resultan los nuevos pares

$$[y=+1,\ x=+2],\ [y=+1,\ x=-1];$$

el sistema (3) $\quad x=\pm 1,\ y^2\pm y-2=0;$

de donde $\quad [y=+1,\ x=+1],\ [y=-2,\ x=+1].$

y $\quad (y=+2,\ x=-1),\ (y=-1,\ x=-1).$

En cuanto al sistema (4), como la division de x^2-xy-y^2+1 por x^2-xy-2 da por cociente 1 y por resta $-y^2+3$, se sigue que

$$y^2-3=0$$

es la ecuacion final en y que corresponde á este sistema. (Aquí la resta que precede inmediatamente á la resta final en y es del segundo grado en x.)

Dedúcese de esta ecuacion final,

$$y=\pm\sqrt{3},$$

de donde, sustituyendo en la resta precedente $x^2\pm\sqrt{3}.\,x-2=0$, lo que da los *cuatro* nuevos pares

$$[y=+\sqrt{3},\ x=\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\frac{1}{2}\sqrt{11}],$$

$$[y=-\sqrt{3},\ x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\frac{1}{2}\sqrt{11}].$$

Las ecuaciones propuestas admiten, pues, en todo *doce* pares, muchos de los cuales son *idénticos*.

DÉCIMO EJEMPLO.

$$(yx-6)(x^2-1)=0,$$
$$(2x-3y)(x^2-y^2)=0.$$

Estas ecuaciones se reducen á estas:

$$(yx-6)(x-1)(x+1)=0,$$
$$(2x-3y)(x-y)(x+y)=0;$$

y combinando sucesivamente cada uno de los tres factores de la primera con cada uno de los tres factores de la segunda, se obtendrán *nueve* sistemas de ecuaciones, cuyo conjunto puede reemplazarse al sistema propuesto.

Combinemos, por ejemplo, los tres factores de la primera ecuacion con el primer factor de la segunda, lo que da los sistemas

$$(yx-6=0,\ 2x-3y=0)\quad (x-1=0,\ 2x-3y=0),$$
$$(x+1=0,\ 2x-3y=0);$$

se hallarán para el primer sistema de los dos pares

$$[y=2,\ x=3],\ [y=-2,\ x=-3];$$

y para el segundo y el tercero, respectivamente

$$[y=\frac{2}{3},\ x=1]\ \text{y}\ [y=-\frac{2}{3},\ x=-1].$$

Combinando del mismo modo los tres factores de la primera ecuacion con el segundo, y despues con el tercero de la segunda, se obtiene

$$[y=+\sqrt{6},\ x=+\sqrt{6}],\quad [y=-\sqrt{6},\ x=-\sqrt{6}],$$
$$[y=+1,\ x=+1],\quad [y=-1,\ x=-1],$$

$$[y=+\sqrt{-6},\ x=-\sqrt{-6}],\quad [y=-\sqrt{-6},\ x=+\sqrt{-6}],$$
$$[y=+1,\ x=-1],\quad [y=-1,\ x=+1],$$

lo cual da tambien *doce* soluciones.

NOTA. Se ve en los dos anteriores ejemplos de qué manera se pueden formar *a priori* dos sistemas de ecuaciones susceptibles de admitir *soluciones* dadas.