CAPITULO IX.

COMPLEMENTO DE LA TEORÍA DE LAS ECUACIONES.

Este capítulo y el siguiente tienen por objeto teorías ménos indispensables, á la verdad, que las espuestas en los capítulos precedentes; pero que deben servir para completar el conjunto de los principios del análisis algebráico. El *noveno* puede considerarse como el complemento de la teoría de las ecuaciones.

§ I. INVESTIGACION DE LAS RAÍCES IMAGINARIAS.

371. *Observaciones preliminares.* Dimos ya en el capítulo octavo algunos métodos para determinar las raíces reales, conmensurables ó inconmensurables, de una ecuacion numérica; y vamos ahora á ocuparnos del estudio de las raíces imaginarias. Acaso esta investigacion parecerá superflua á primera vista; porque como estas raíces son símbolos puramente algebráicos, no pueden resolver la cuestion de que la ecuacion es traduccion algebráica.

Sin embargo, como dijimos en otra parte, el empleo de estas espresiones es de un uso muy frecuente en el análisis superior, y conduce algunas veces á resultados de la mayor importancia; razon por la cual procuraremos dar una idea de los trabajos de los mas célebres geómetras en esta materia.

372. Principiemos por observar que cuando una ecuacion tiene raíces males inconmensurables y raíces imaginarias, no es posible, como

para las raíces conmensurables, desembarazarla desde luego de las inconmensurables; á causa de que los métodos no dan estas raíces sino por aproximacion, y si se dividiese la ecuacion por los factores del primer grado correspondientes, se obtendria por cociente un polinomio cuyos coeficientes no serian mas que números aproximados. El cálculo de las raíces de la ecuacion resultante no ofreceria ya pues entónces certidumbre alguna. De modo que en lo que sigue á continuacion supondremos que las ecuaciones propuestas contienen á la vez no solo raíces inconmensurables sino tambien imaginarias, á no ser que todas sean imaginarias.

Vimos ya (núm. 313) que una ecuacion cuyos coeficientes son reales no puede tener raíces imaginarias sino en número par. Pues bien, los analistas han llegado á un resultado mas positivo todavía, que consiste en que *las raices imaginarias de toda ecuacion de coeficientes reales son todas de la forma de las del segundo grado, es decir, de la forma* $a \pm b\sqrt{-1}$, *designando* a *y* b *cantidades, reales conmensurables ó inconmensurables.*

373. Ántes de pasar á la demostracion de esta proposicion importante, haremos ver que, *si una ecuacion tiene una raiz de la forma* $a+\sqrt{-1}$, *tiene necesariamente tambien otra de la forma* $a-b\sqrt{-1}$, *siendo* a *y* b *las mismas en estas dos espresiones.*

Para demostrar este *lema* consideremos la ecuacion

$$x^m+P^{m-1}+Q^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

siendo P, Q... T, U, cantidades reales cualesquiera; y supongamos que sea satisfecha esta ecuacion por una espresion tal como $a+b\sqrt{-1}$; y se tendrá la igualdad

$$(a+b\sqrt{-1})^m+P(a+b\sqrt{-1})^{m-1}+\ldots+T(a+b\sqrt{-1})+U=0.$$

Desarrollando los términos y recordando que las diversas potencias de $\sqrt{-1}$ son alternativamente (núm. 130)

$$\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1 \mid \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1 \mid \ldots,$$

se obtendrá una espresion compuesta de dos partes distintas, á saber: *una parte real* que proviene de todas las *potencias de grado par* de $b\sqrt{-1}$, combinadas con las potencias a^m, a^{m-2}, a^{m-4},... de a, y

los coeficientes P, Q, R,...; y *una parte imaginaria*, procedente de todas las *potencias de grado impar* de $b\sqrt{-1}$, combinadas con las potencias a^{m-1}, a^{m-3},... de a, y los coeficientes P, Q, R...

Designando, pues, estas dos partes por M y N $\sqrt{-1}$, la igualdad anterior se reducirá $M+N\sqrt{-1}=0$, ecuacion que no puede subsistir evidentemente sino miéntras se tenga por separado

$$M=0, \text{ y } N=0.$$

Ahora si en el primer miembro de la propuesta, en vez de $a+b\sqrt{-1}$, se sustituye $a-b\sqrt{-1}$, lo que da

$$(a-b\sqrt{-1})^m+P(a-b\sqrt{-1})^{m-1}+\ldots+T(a-b\sqrt{-1})+U,$$

es fácil conocer que el resultado de este desarrollo no diferirá del anterior sino en que todos los términos afectados *de las potencias impares de* $b\sqrt{-1}$ habrán cambiado de signo; porque $(-b\sqrt{-1})^{2n}$ es igual á $(+b\sqrt{-1})^{2n}$; luego este resultado será necesariamente $M-N\sqrt{-1}$, designando aquí M y N las mismas cantidades que en el resultado del primer desarrollo. Pero se acaba de ver que debe tenerse por separado $M=0$ y $N=0$, de modo que la igualdad $M-N\sqrt{-1}=0$ queda tambien satisfecha: por consiguiente *si* $a+b\sqrt{-1}$ *es una raiz de la propuesta*, $a-b\sqrt{-1}$ *será necesariamente otra raiz.*

Pasemos ahora á la demostracion del teorema sobre la forma de las raíces imaginarias.

374. Esta proposicion es evidentemente una consecuencia del teorema, cuyo enunciado va á continuacion, que puede mirarse como uno de los mas hermosos del análisis, y que es debido al ilustre Laplace:

Toda ecuacion de grado par, cuyos coeficientes son reales, *es descomponible en factores reales del segundo grado*, esto es, en factores de la forma x^2+px+q, $x^2+p'x+q'$,..., en los que p, q, p', q',... designan cantidades reales cualesquiera; porque admitido esto, los factores x^2+px+q, $x^3+p'x+q'$,... igualados á 0, dan lugar á raíces que, si son imaginarias, no puede ser sino de la forma $a\pm b\sqrt{-1}$; y recíprocamente.

Procuremos, pues, demostrar este último teorema.

Sea una ecuacion $X=0$ de grado par m, de coeficientes reales. Llamemos a, b, c,... sus diferentes raíces; los factores del segundo grado correspondientes serán

$$x^2-(a+b)x+ab,\ x^2-(a+c)x+ac,\ x^2-(b+c)x+bc\ldots.$$

Sentado esto, vamos desde luego á hacer ver que *por lo ménos uno de estos factores tiene sus coeficientes reales.*

En efecto, supongamos, en primer lugar que m sea una sola vez divisible por 2, es decir que se tenga $m=2n$, siendo n un número impar.

Se puede siempre (núm. 299) formar una ecuacion en z cuyas raíces sean combinaciones de las de la propuesta, tales como $a+b+kab$, $a+c+kac$,..., siendo k un número entero del todo arbitrario. Concibamos formada esta ecuacion, y designémosla por $Z=0$, su grado es igual al número de las combinaciones, dos á dos, de las raíces a, b, c,..., es decir á $m.\frac{m-1}{2}$ ó $n(m-1)$; pero n es, por hipótesis, impar, sucediendo otro tanto con $(m-1)$; luego la ecuacion $Z=0$ es de grado impar: así pues (núm. 312) esta ecuacion tiene á lo ménos una *raíz real*, y esta raíz es el valor de una de las combinaciones $a+b+kab$, $a+c+kac$,...

Atribuyamos ahora á k un segundo, un tercer,... valor; formaremos de este modo otras tantas ecuaciones $Z'=0$, $Z''=0$,..., cada una de las cuales tendrá una raíz real por lo ménos. Podrá tal vez suceder que la raíz real de cada una de estas ecuaciones pertenezca á una combinacion compuesta de dos letras diferentes de las que entran en las combinaciones precedentes; pero como el número de estas combinaciones es limitado é igual á $m.\frac{m-1}{2}$ (que se puede designar por p), es claro que despues de haber atribuido á k, $(p+1)$ valores, y formado $(p+1)$ ecuaciones $Z=0$, $Z'=0$, $Z''=0$,..., dos de estas ecuaciones serán tales que la raíz real de cada una pertenecerá á una combinacion compuesta de las mismas dos letras; así es, por ejemplo, que puede suponerse que se ha encontrado, designando por α y α' estas dos raíces reales,

$$a+b+kab=\alpha,\ a+b+k'ab=\alpha'.$$

De estas dos ecuaciones se deduce por la eliminacion:

$$1^{\circ}\ldots\ ab=\frac{\alpha-\alpha'}{k-k'},\ 2^{\circ}\ldots\ a+b=\frac{k\alpha'-k'\alpha}{k-k'};$$

estos valores son necesariamente cantidades reales y finitas; luego queda demostrado que *por lo ménos uno de los* factores, $x^2-(a+b)x+ab$, de la propuesta, *es real.*

Sea *en segundo lugar*, $m=2.^2n'$, siendo n' impar. Formemos tambien una ecuacion $Z=0$, cuyas raices sean combinaciones de la forma $a+b+kab$: esta ecuacion será del grado $m\frac{m-1}{2}$ ó $2n'(m-1)$; de modo que como n' y $(m-1)$ son números impares, este grado será par, y una sola vez divisible por 2; luego en virtud de lo dicho la ecuacion $Z=0$ tendrá *por lo ménos un factor real del segundo grado.* Este factor, igualado á 0 dará lugar á dos valores de z de la forma $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ (en que β puede ser 0, lo que sucederia si fuesen reales los dos valores de z). Consideremos solamente la primera raíz, supongamos que pertenezca á la combinacion $a+b+kab$.

Segun los precedentes razonamientos, nada impide suponer ademas que otra ecuacion $Z'=0$, formada del mismo modo, tenga una raíz de la forma $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, perteneciente á la combinacion $a+b+k'ab$, compuesta de las mismas dos letras; de suerte que se tenga á la vez

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+kab=\alpha+\beta\sqrt{-1} \\ a+b+k'ab=\alpha'+\beta'\sqrt{-1} \end{array}\right\}$$

de donde se deduce

$$ab=\frac{\alpha-\alpha'+(\beta-\beta')\sqrt{-1}}{k-k'},\ a+b=\frac{k\alpha'-k\alpha'+(k\beta'-k'\beta)\sqrt{-1}}{k-k'}.$$

Estas espresiones son de la forma $r+s\sqrt{-1}$ y $r'+s'\sqrt{-1}$; de modo que la propuesta tiene por lo ménos un factor del segundo grado, tal como $x^2-(r'+s'\sqrt{-1})x+r+s\sqrt{-1}$; y si se iguala este factor á 0, se obtiene

$$x=\frac{r'+s'\sqrt{-1}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r'+s'\sqrt{-1}}{2}\right)^2-(r+s\sqrt{-1})}.$$

Desarrollada la cantidad de debajo del radical, da un resultado de la forma $r''+s''\sqrt{-1}$; pero la espresion $\sqrt{r''+s''\sqrt{-1}}$ se reduce tambien (núm. 121) á otra de la forma $r'''+s'''\sqrt{-1}$, de donde puede concluirse que el primero de los dos valores de x anterior es igualmente de la forma $p+q\sqrt{-1}$, y segun el *lema* demostrado en el número 373, es preciso que tenga otro tal como $p-q\sqrt{-1}$.

Pero si se multiplican entre sí los dos factores $x-(p+q\sqrt{-1})$ y $x-(p-q\sqrt{-1})$, se obtiene por producto $(x-p)^2+q^2$, ó $x^2-2px+p^2+q^2$, polinomio del segundo grado en x, cuyos coeficientes son reales. De modo que queda demostrado tambien que en el caso de $m=2^2.\ n'$, la *ecuacion tiene por lo ménos un factor real del segundo grado.*

Sea *en tercer lugar*, $m=2^3.\ n''$, en que n'' es impar; se puede formar una ecuacion $Z=0$ análoga á las precedentes, cuyo grado $m\frac{m-1}{2}$ ó $2^2.\ n''(m-1)$ será *dos* veces divisible por 2, y que en virtud de lo dicho tendrá por lo ménos un factor real del segundo grado, de donde, repitiendo los mismos razonamientos que en la segunda parte de la demostracion, podrá concluirse que la *propuesta tiene por lo ménos un factor real del segundo grado.*

Igual razonamiento en la hipótesis de ser

$$m=2^4.\ n'''^2,\ m=2^5.\ n^{\text{IV}},..$$

Luego en fin, *toda ecuacion de cualquier grado par tiene por lo ménos un factor real del segundo grado.*

Consecuencia. Es fácil deducir de aquí que *toda ecuacion de grado par es descomponible en el producto de otros tantos factores reales de segundo grado como unidades hay en* $\frac{m}{2}$ *ó en la mitad de su grado.*

En efecto, puesto que una ecuacion de grado par tiene por lo méno factor real de segundo grado, puede dividirse su primer miembro este factor; de lo que resultará una nueva ecuacion de grado par, coeficientes reales, que tendrá tambien por lo ménos un factor real el segundo grado, por el cual se podrá dividir el primer miembro de esta segunda ecuacion; y así sucesivamente. Luego el primer miembro de la propuesta *podrá considerarse como el producto de tantos factores reales de segundo grado, como unidades hay en la mitad de su grado.*

Si la ecuacion fuese de grado impar, como en virtud del teorema núm. 312, tendria por lo ménos una raíz real, podria despojarse de ella, y la ecuacion resultante seria descomponible en factores reales del segundo grado.

De lo que puede concluirse en último análisis el teorema enunciado en el núm. 372, á saber: que *las raices imaginarias de una ecuacion existen por pares, y son todas de la forma* $a \pm b\sqrt{-1}$.

375. *Determinacion de las raices imaginarias de las ecuaciones.*

Conocida la forma de las raíces imaginarias de una ecuacion, podemos proceder á su estudio.

Sea $$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0$$

una ecuacion que encierre raíces reales inconmensurables y raíces imaginarias.

Designemos por $p+q\sqrt{-1}$ una de estas últimas; sale por la sustitucion de este binomio en la propuesta,

$$(p+q\sqrt{-1})^m + P(p+q\sqrt{-1})^{m-1} + \ldots + T(p+q\sqrt{-1}) + U = 0.$$

De modo que si se desarrollan los cálculos, se llama M el conjunto de los términos reales, y $N\sqrt{-1}$ el conjunto de los términos imaginarios, la igualdad anterior pasa á ser $M + N\sqrt{-1} = 0$, ecuacion que no puede existir á ménos que se tenga por separado

$$M = 0 \text{ y } N = 0.$$

Observemos ahora que estas ecuaciones encierran las indeterminadas p y q, combinadas con los coeficientes de la propuesta. *Si se buscan,* pues, *todos los sistemas de valores de* p *y de* q, *en números reales, propios para verificar estas dos ecuaciones, y se los sustituye en la espresion* $p+q\sqrt{-1}$, *se obtendrán asi sucesivamente todas las raices imaginarias de la propuesta.*

Tal es el método general para descubrir las raíces imaginarias. Haremos sin embargo algunas observaciones que pueden facilitar este medio, y que son por otra parte bastante importantes por sí mismas.

376. Supongamos que para obtener las raíces reales inconmensurables de una ecuacion $X=0$, sea preciso (núm. 341) formar la ecuacion

de los cuadrados de las diferencias $Z=0$, y veamos cuál es el partido que se puede sacar para las raíces imaginarias.

Designemos por a, b, c..., las raíces reales de $X=0$, y por $p \pm q\sqrt{-1}$, $p' \pm q'\sqrt{-1}$..., las raíces imaginarias; si tomamos sucesivamente las diferencias entre todas estas raíces consideradas dos á dos,

Se obtendrán de cuatro especies, á saber:

1°. Las diferencias entre dos raíces reales, tales como $a-b$, $a-c$ $b-c$...;

2°. Las diferencias entre *dos raíces imaginarias conjugadas,* $p+q\sqrt{-1}$ $-(p-q\sqrt{-1}) = 2q\sqrt{-1}$, $2q'\sqrt{-1}$, $2q''\sqrt{-1}$;

3°. Las diferencias entre una raíz real y una raíz imaginaria, $a-p-q\sqrt{-1}$, $a-p+q\sqrt{-1}$, $b-p'-q'\sqrt{-1}$;

4°. En fin, las diferencias entre dos raíces imaginarias no conjugadas, $p-p'+(q-q')\sqrt{-1}$; $p-p'-(q-q')\sqrt{-1}$...

Ahora bien; por poco que se fije la vista en estas diferencias se advierte que los cuadrados de las primeras son *números esencialmente positivos*, los cuadrados de las segundas diferencias son $-4q^2$, $-4q'^2$..., es decir, cantidades reales, pero *esencialmente negativas.* En cuanto á los cuadrados de las otras dos especies son *generalmente espresiones imaginarias.*

Suponiendo, pues, ya formada la ecuacion $Z=0$, las raíces reales y negativas de esta ecuacion son en general los *cuadrados de las diferencias entre dos raices imaginarias conjugadas.*

Llamemos, pues, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$..., á estas raíces, que pueden *obtenerse, ya por el método de las raices conmensurables, ya por el de las inconmensurables;* y se tendrá

$$4q^2 = \alpha,\ 4q'^2 = \beta,\ 4q''^2 = \gamma \ldots,$$

de donde se deduce

$$q = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\alpha},\quad q' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\beta},\quad q'' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\ldots$$

Conociendo los valores de q, q', q''..., *se obtendrán los de* p, p', p''..., *sustituyendo* $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\beta}$..., *en lugar de* q, *en las ecuaciones* $M=0$, $N=0$, establecidas en el número precedente, las cuales adquirirán por

cada sustitucion *un divisor comun en* p, *que igualado á* 0; *dará los valores de* p, p', p''...

Verdad es que falta este medio cuando una de las raíces reales de la propuesta es idéntica á la parte real p, p'..., de una de estas raíces imaginarias, porque en el caso de $a=p$, por ejemplo, las dos diferencias $a-p-q\sqrt{-1}$, $a-p+q\sqrt{-1}$, se reducen á $-q\sqrt{-1}$, y $q\sqrt{-1}$, cuyos cuadrados son iguales á $-q^2$; *tambien falta* cuando las partes reales de dos raíces imaginarias no conjugadas son idénticas; porque $p=p'$, por ejemplo, reduce las diferencias

$$p-p'+(q-q')\sqrt{-1},\ p-p'-(q-q')\sqrt{-1},$$

á

$$(q-q')\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad -(q-q')\sqrt{-1},$$

cuyos cuadrados son iguales á $-(q-q')^2$.

Por donde se ve que la ecuacion $Z=0$ puede tener algunas veces raíces negativas que no representen los valores de $-4q^2$, $-4q'^2$...; pero es siempre posible reconocer si una raíz negativa tal como $-\alpha'$ es un *valor conveniente*, en que si se sustituye $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha'}$ en M y N, es preciso y basta que los dos polinomios en p, resultantes de esta sustitucion, tengan un divisor comun: todo valor que no satisfaga á esta condicion deberá desecharse como procedente de una de las circunstancias que acabamos de hablar.

Observaremos ademas que, en estas mismas circunstancias, la ecuacion $Z=0$ deberia tener raíces iguales; pues, como reconocimos mas arriba, en la hipótesis de $p=p'$, dos cuadrados cuando ménos se reducen á $-q^2$; y en la de $p=p'$, dos tambien por lo ménos á $-(q-q')^2$; de modo que por el método de las raíces iguales se podria desembarazar la ecuacion $Z=0$ de los valores diferentes de $-4q^2$, $-4b'^2$, $-(q-q')^2$, etc.

De todas maneras, se concibe cuán pesado y fatigoso debe ser el método para descubrir las raíces imaginarias de una ecuacion, cuando esta es de un grado superior al tercero.

---

§ II. RESOLUCION COMPLETA DE LA ECUACION DE DOS TÉRMINOS.

377. Llámase así toda ecuacion que no contiene mas que una sola potencia de la incógnita, con cantidades enteramente conocidas.

De aquí resulta que toda ecuacion de dos términos puede reducirse á la forma

$$x^m \pm p=0,$$

siendo p un número absoluto; si se supone $x=y\sqrt[m]{p}$,

sale $$py^m \pm p=0, \text{ de donde } y^m \pm 1=0;$$

de modo que la resolucion de todas las ecuaciones de dos términos depende de la de esta última ecuacion.

Como la ecuacion $y^m-1=0$ viene á ser $y^m=1$, se ve que todo se reduce á encontrar para y, *las espresiones numéricas ó algebráicas que elevadas á la* m^ma^ *potencia, pueden producir la unidad.* Esta es la razon de llamarse *raices de la unidad* las de la ecuacion $y^m-1=0$.

Las de la ecuacion $y^m+1=0$, ó $y^m=-1$, se llaman *las raices de la unidad negativa.*

Hemos resuelto ya (números 167 y 290) varias especies de ecuaciones de dos términos. Ahora nos proponemos resolverlas completamente, cualquiera que sea su grado; pero ántes será oportuno hacer algunas observaciones acerca de la naturaleza de sus raíces.

378. PRIMERAMENTE. La ecuacion $y^m-1=0$ tiene *una sola* raíz real si m es impar, y *dos* raíces reales si par.

Sea pues m un número *impar*. Como la ecuacion no tiene mas que *una variacion de signo*, solo admite (núm. 315) una raíz positiva que es $+1$. Es evidente por otra parte que ningun número negativo podría satisfacer.

Cuando m es *par*, $+1$ y -1 verifican la ecuacion y son los únicos números que pueden satisfacerla; porque no presenta mas que *una variacion de signo*, bien sea en su estado actual, bien cuando se cambia y en $-y$.

EN SEGUNDO LUGAR. La ecuacion $y^m+1=0$ tiene *una sola* raíz real si m es impar; *todas* sus raíces son imaginarias si es par.