Estas observaciones completan lo que dijimos en el capítulo sexto (núm. 167) acerca de la multiplicidad de los valores de un radical.

Ecuacion trinomia, $x^{2m}+px^m+q=0$.

387. Llámanse así *todas las ecuaciones que no contienen mas que dos esponentes de la incógnita, uno de los cuales es el doble del otro, y cantidades enteramente conocidas.*

Estas ecuaciones pueden siempre reducirse, por la transposicion y la reduccion, á la forma anterior; dependiendo únicamente su resolucion de la ecuacion de segundo grado y de la ecuacion de dos términos.

En efecto, supongamos $x^m=y$; resultará

$$y^2+py=q, \quad \text{de donde} \quad y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q};$$

luego $$x=\sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p}{4}+q}};$$

de modo que para obtener todos los valores de x basta multiplicar una de las raíces m^{as} de

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},$$

y una de las m^{as} de $$-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},$$

por cada una de las raíces m^{mas} de $+1$.

Sea por ejemplo la ecuacion $x^6-7x^3=45144$,
suponiendo $x^3=y$, se halla $y^2-7y=45144$,
de donde se deduce $y=216$ y $y=-209$.
Luego

1°. $x^3=216$; de donde $x=6$, $x=6.\alpha$, $x=6.\alpha^2$;

2°. $x^3=-209$; de donde $x=-\sqrt{209}$, $x=-\alpha.\sqrt{209}$, $x=-\alpha^2\sqrt{209}$

en que α designa la primera raíz cúbica imaginaria de la unidad.

La resolucion de las ecuaciones trinomias conduce á la estraccion de la raíz m^{ma} de una cantidad en parte racional y en parte irracional del segundo grado. Tratemos ya (núm. 118) un caso particular de esta cuestion, el de la raíz cuadrada; y deberíamos considerar ahora el caso general de una raíz de cualquier grado; pero como esta operacion ofrece muy pocas aplicaciones en el análisis algebráico, nos dispensaremos de desarrollarla aquí, remitiendo en este punto á las ediciones anteriores de nuestra obra.

---

§ III. RESOLUCION DE LAS ECUACIONES GENERALES DE GRADO SUPERIOR AL SEGUNDO.

Tenemos ahora un trabajo importante que desempeñar, cual es el de dar á conocer los de los analistas acerca del famoso problema de la resolucion de las ecuaciones generales de todos los grados. Este problema, que ha ocupado largo tiempo á los mas célebres matemáticos, tiene por objeto: *dada una ecuacion general y completa obtener las espresiones de sus raices por medio de un número limitado de operaciones algebráicas efectuadas sobre los coeficientes.* Hasta ahora no ha sido resuelta la cuestion sino para los cuatro primeros grados, y se duda mucho si se llegará ó no jamas á la resolucion completa de todos los grados.

Sea de esto lo que quiera, empezaremos por esponer el mas simple de todos les métodos conocidos para resolver las ecuaciones del tercero y cuarto grado; haciendo en seguida conocer otros susceptibles de ser aplicados con mayor éxito á las ecuaciones de un grado superior.

Ecuaciones del tercer grado.

388. Puede suponerse desde luego (núm. 260) privada la ecuacion de su segundo término, y reducida á la forma

(1) $$x^3+px+q=0.$$

Hagamos en esta, (2) $x=y+z$,

es decir, supongamos á x igual á la suma de otras dos incógnitas (la forma que damos al valor de x puede motivarse en que en la ecuacion general del segundo grado se compone tambien el valor de x de dos partes diferentes).

Elevando la ecuacion (2) al cubo, se obtiene,

$$x^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=y^3+z^3+3yz\,(y+z),$$

ó bien, $x^3=y^3+z^3+3yz.\,x$,

y trasponiendo, $x^3-3yz.\,x-y^3-z^3=0.$

Para que esta ecuacion se acuerde con la ecuacion (1) es preciso y basta que se tenga

$$\left.\begin{array}{l} p=-3yz \\ q=-y^3-z^3 \end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{ll} (3) & yz=-\dfrac{p}{3}, \\ (4) & y^3+z^3=-q. \end{array}\right.$$

Satisfechas estas condiciones, los valores de y y de z serán tales que su suma espresará el valor de x, propio para verificar la ecuacion (1). Procuremos, pues, determinar y y z con arreglo á estas dos condiciones.

La ecuacion (3) elevada al cubo, da $y^3z^3=-\dfrac{p^3}{27}$;

pero se tiene ya $y^3+z^3=-q$;

luego (núm. 114) las cantidades y^3 y z^3 están ligadas entre sí por la ecuacion de segundo grado

$$(5) \qquad t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0;$$

cuyo segundo término tiene por coeficiente la suma dada, $-q$, tomada como signo contrario, y el último término es igual al producto dado tambien, $-\dfrac{p^3}{27}$.

Esta ecuacion se llama LA REDUCIDA de la ecuacion del tercer grado, porque de su resolucion depende la de la propuesta.

Como la ecuacion (5) da $t=-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$,

sale $y^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$, $z^3=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{23}}$;

de donde, á causa de la relacion $x=y+z$.

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};$$

espresion que contiene implícitamente las tres raíces.

En efecto, designemos por m y n en lo que se convierten respectivamente los dos radicales cúbicos cuando se reemplazan en ellos p y q por sus valores correspondientes á la ecuacion (1), y observemos luego:

1°. Que las ecuaciones $y^3=m^3$, $z^3=n^3$, dán (núm. 386)

$$y=m,\ y=\alpha m,\ y=\alpha^2 m,\ \text{y}\ z=n,\ z=\alpha n,\ z=\alpha^2 n$$

(en que 1, α, α^2, son las tres raíces cúbicas de la unidad);

2°. Que el producto de los dos valores de y y de z, cuya suma espresa el valor de x, *debe ser igual* á $-\dfrac{p}{3}$, segun la relacion (3).

Resulta evidentemente que se obtendrán todas las raíces de la ecuacion (1) combinando *dos* á *dos* los *seis* valores precedentes de y y de z, y no tomando sino las combinaciones que dan un *producto igual* á $-\dfrac{p}{3}$

Porque se tiene en primer lugar,

$$m\times n=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=-\frac{p}{3};$$

luego $x=m+n$ forma la PRIMERA RAÍZ.

En segundo lugar, $\alpha m\times\alpha^2 n=\alpha^3 mn=mn=-\dfrac{p}{3}$;

luego $x=\alpha m+\alpha^2 n$ da UNA SEGUNDA RAÍZ.

En fin, $\alpha^2 m \times \alpha n = \alpha^3 mn = mn = -\frac{p}{3}$;

luego $x = \alpha^2 m + \alpha n$ espresa UNA TERCERA RAÍZ.

Ninguna de las otras combinaciones (como se puede comprobar fácilmente) llena la condicion de que el producto sea igual á $-\frac{p}{3}$; de manera que deben desecharse, y se tiene para las raíces de la propuesta,

$$+n,\ x = \alpha m + \alpha^2 n,\ x = \alpha^2 m + \alpha n.$$

NOTA. Se llega tambien á los dos últimos valores de x, dividiendo el primer miembro de la ecuacion (1) por $x-m-n$. Pero de ahí adelante es preciso modificar la forma de este primer miembro. Como se tiene, en virtud de las ecuaciones (3), (4), y de las dos ecuaciones $y=m$, $z=n$,

$$mn = -\frac{p}{3},\quad m^3+n^3 = -q,$$

resulta $$p = -3mn,\quad q = -m^3-n^3;$$

de donde, estos valores de p y de q sustituidos en el primer miembro de la propuesta, dan

$$x^3 - 3mn.\ x - m^3 - n^3,$$

espresion que dividida por $x-m-n$, da

$$x^2 - (m+n)\,x + m^2 - mn + n^2.$$

Igualemos este cociente á 0, y resolvamos: hechas las reducciones sale

$$x = -\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3},\quad x = -\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

valor en que es fácil probar la identidad con

$$x = \alpha m + \alpha^2 n,\quad x = \alpha^2 m + \alpha n,$$

recordando (núm. 167) que

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\quad \alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

DISCUSION.

Como las cantidades m y n contienen en sus espresiones el radical $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, se concibe que la *realidad* ó lo *imaginario* en las tres raíces depende principalmente del signo de la cantidad $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$. Nos vemos pues conducidos á hacer las *hipótesis siguientes :*

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} > 0,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} = 0,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} < 0.$$

Examinemos sucesivamente estas *tres* hipótesis.

389. . . . . . 1°. . . . $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} > 0.$

En este caso como las dos raíces de la reducida (5) son reales y desiguales, se sigue que las cantidades m y n son reales tambien y esencialmente *diferentes una de otra.*

Así es que el primer valor $x = m+n$,

$$\text{ó}\quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

es *real.*

Los otros dos, $$x = -\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

son imaginarios; porque encieran á $\sqrt{-3}$, y segun la hipótesis $m-n$ es *real y diferente de* 0.

En cuanto al signo de la raíz real, el principio establecido en el número 312 acerca de las ecuaciones *de grado impar* prueba que esta raíz es *positiva* si q es negativo, y *negativa* si es positivo ; lo cual se esplica fácilmente por la discusion del primer valor de x anterior.

390. . . . . . 2°. . . . $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} = 0.$

En este nuevo caso, como las raíces de la reducida se reducen una y otra á $-\frac{q}{2}$, los valores de m y de n son *reales* é iguales cada uno de ellos á $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$; lo que da para el primer valor de x,

$$x=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Para los otros dos, como se tiene $m=n=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$

resulta $m-n=0$, y $\frac{m+n}{2}=m=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$;

de modo que estos valores son iguales y se reducen cada uno á

$$x=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};$$

es decir que sus valores númericos son cada uno de ellos la mitad del primero.

Luego suponiendo positivo el último término q, la ecuacion (1) tiene *una* raiz real negativa $-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, y dos raíces positivas iguales, $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

Lo contrario sucede cuando *es negativo* el último término; es decir que la ecuacion tiene *una sola* raiz positiva y *dos* raíces negativas iguales.

391. 3°. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Caso irreducible.

Esta condicion que exige necesariamente que p sea negativo, da para la reducida *dos raíces imaginarias;* y el primer valor de x se presenta bajo la forma

$$x=m+n=\sqrt[3]{M+N\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{M-N\sqrt{-1}}.$$

Segun esto, parece á primera vista que este valor de x debe ser imaginario, como tambien los otros dos que encierran ya en su espresion el símbolo $\sqrt{-1}$. La ecuacion (1) tendria pues imaginarias sus tres raíces; lo que estaria en contradiccion con el primer teorema del número 312.

Pero se puede demostrar que, en las espresiones de las tres raíces, se destruyen las imaginarias mutuamente, y que *son reales las tres raíces.*

En efecto, si, admitiendo (núm. 174) la exactitud de la fórmula del binomio en el caso de ser el esponente fraccionario, se pone

$$m=\frac{1}{3} \text{ en } (a+b\sqrt{-1})^m \text{ (núm. 373)},$$

se halla

$$\sqrt[3]{M+N\sqrt{-1}}=P+Q\sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{M-N\sqrt{-1}}=P-Q\sqrt{-1},$$

lo que da $m+n=\sqrt{M+N\sqrt{-1}}+\sqrt{M-N\sqrt{-1}}=2P$;

de manera que el primer valor de x es real y se reduce á

$$x=2P.$$

En cuanto á los otros dos, como se tiene

$$m+n=2P,\ m-n=2Q\sqrt{-1},$$

se obtiene, sustituyendo en la espresion

$$x=-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

$$x=-P\pm Q\sqrt{-1}.\sqrt{-3}=-P\mp Q\sqrt{3} \text{ (núm. 170)}.$$

De modo que los tres valores de x son reales.

El último caso que acabamos de examinar y sobre el cual se han ejercitado mucho los analistas, lleva el nombre de CASO IRREDUCIBLE, porque no obstante la realidad bien probada de las tres raíces, no sirven de nada para su determinacion las fórmulas precedentemente obtenidas. En efecto, hemos visto que solo seria posible desembarazar á estas fórmulas de las imaginarias que encierran, reduciendo el

primer valor de x á *una serie* infinita, rara vez convergente; siendo imposible obtener las espresiones exactas de las tres raíces aun cuando sea convergente dicha serie. Es preciso, pues, en este caso recurrir para las aplicaciones á los métodos de la resolucion de las ecuaciones numéricas.

392. Por lo demas la condicion de realidad de las tres raíces de la ecuacion

$$x^3+px+q=0,$$

es una consecuencia muy sencilla del teorema de M. Sturm (número 347).

Si se aplica á esta ecuacion la regla establecida en este número, se encuentra para las funciones X, X_1, X_2, X_3,

$$X=x^3+px+q,\ X_1=3x^2+p,\ X_2=-2px-3q,\ X_3=-4p^3-27q^2.$$

Sentado esto, para que tenga la ecuacion sus *tres raices reales*, es preciso y basta que sustituyendo sucesivamente $-\infty$ y $+\infty$ en los primeros términos de estas funciones, se obtengan 3 *variaciones* por la primera sustitucion, y 3 permanencias por la segunda, es decir que debe obtenerse una de las dos combinaciones

$$\begin{array}{ll} +-+- & \text{ó}\ -+-+ \\ ---- & \quad\ \ ++++ \end{array}$$

de las cuales la última es la única admisible, pues que la ecuacion es de grado impar.

Es pues evidente que las dos primeras funciones X, X_1, dan respectivamente $-+$ y $++$, por la sustitucion de $-\infty$ y de ∞, sin que resulte condicion alguna para p y q.

Pero para que X_2, X_3, den igualmente $-+$ y $++$, se ve que es preciso, 1°. que p sea negativo; 2°. que se tenga $-4p^3-27q^2$ positivo, ó $4p^3+27\ q^2$ negativo, condicion que encierra implícitamente á la primera.

Así la condicion necesaria y suficiente para la realidad de las *tres* raíces, es

$$4p^3+27q^2<0,\ \text{ó}\ \frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0.$$

El caso particular de $4p^3+27q^2=0$, como se tiene $X_3=0$, es preciso

necesariamente (número 347) que la propuesta tenga dos raíces iguales, que se obtendrán anulando á X_2, ó suponiendo

$$-2px-3q=0;\ \text{de donde}\ x=-\frac{3q}{2p}.$$

Pero la relacion supuesta da $\quad p=-3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}},$

de donde sustituyendo en el valor de x y reduciendo,

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Así que dos de los tres valores de x son iguales á $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. El tercero es ademas necesariamente $-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, pues que la ecuacion se halla privada de segundo término.

Cuando se tiene $4\ p^3+27q2>0$, *solo una* raíz es real, y las otras dos son imaginarias.

Resultados que se concilian todos con lo dicho en el núm. 387 y siguientes.

Ecuacion de cuarto grado.

393. Sea (1) $\quad x^4+px^2+qx+r=0$

la ecuacion que se ha de resolver. (Supondremos tambien que carece de segundo término.)

Guiándose por la analogía acaso se inclinará cualquiera á hacer $x=y+z$, es decir, x igual á la suma de otras dos incógnitas; y esta es efectivamente la que siguió Lagrange, empleando en seguida muchos recursos de análisis para sacar partido de su método. Pero los cálculos que hace necesarios son en estremo complicados; llegándose con mucha mas brevedad á las espresiones de la incógnita con la introduccio de *tres indeterminadas*.

Hágase pues en la ecuacion, (2) $x=y+z+u$; y saldrá por la elevacion al cuadrado

$$x^2=y^2+z^2+u^2+2\,(yz+yu+zu),$$

ó

$$x^2-(y^2+z^2+u^2)=2\,(yz+yu+zu);$$

cuadrando de nuevo los dos miembros de esta última ecuacion se obtiene

$$x^4-2(y^2+z^2+u^2)\,x^2+(y^2+z^2+u^2)^2=4\,(y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2)$$
$$+8yzu(y+z+u),$$

ó reemplazando $y+z+u$ por x, y transportando,

$$\left.\begin{array}{r} x^4-4(y^2+z^2+u^2)\,x^2-8yzux+)\,y^2+z^2+u^2)^2 \\ -4\,(y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2) \end{array}\right\}=0.$$

Para que esta ecuacion pues concuerde con la propuesta, es preciso y basta que se tenga

1°. (3) $p=-2\,(y^2+z^2+u^2)$, de donde $y^2+z^2+u^2=-\frac{p}{2}$;

2°. $r=(y^2+z^2+u^2)^2-4(y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2)$,

de donde (4) $y^2z^2+y^2u^2+z^2u^2=\frac{p-4r}{16}$;

3°. (5) $q=-8yzu$ de donde $yzu=-\frac{q}{8}$.

Tales son las ecuaciones de condicion que pueden servir para determinar los valores de y, z, u, cuya suma formará ademas el valor de x. La ecuacion pues (5) elevada al cuadrado da

$$y^2z^2u^2=\frac{q^2}{64};$$

donde se ve que los cuadrados y^2, z^2, u^2, son tales, que su suma es igual á un número dado, $-\frac{p}{2}$, la suma de sus productos dos á dos igual á otro número dado $\frac{p^2-4r}{16}$, y en fin el producto de estos tres cuadrados igual á $\frac{q^2}{64}$.

Luego en virtud de las relaciones que existen (núm. 242) entre los coeficientes y las raices de la ecuacion de tercer grado, la determina-

cion de y^2, z^2, u^2, no depende ya sino de la resolucion de la ecuacion del tercer grado

$$t^3+\frac{p}{2}t^2+\frac{p^2-4r}{16}t-\frac{q^2}{64}=0.$$

Si para hacer desaparecer los denominadores se supone $t=\frac{s}{4}$ sale

(6) $$s^3+2ps^2+(p^2-4r)\,s-q^2=0.$$

Tal es la *reducida* de la ecuacion de cuarto grado.

Designemos por s', s'', s''', las tres raices de la ecuacion (6) que se sabe ya ahora resolver; resultará

$$y=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{s'},\quad z=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{s''},\quad u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{s'''};$$

y como se tiene por otra parte $x=y+z+u$, es preciso combinar estos valores por adicion, lo que dará en apariencia ocho valores diferentes. Pero si se observa que se tiene, para una de las ecuaciones de condicion, $yzu=-\frac{q}{8}$,

no debe tenerse cuenta mas que de las combinaciones en que el producto de los tres valores de y, z, y u, sea *positivo* si q es negativo, y *negativo* si q es positivo.

Segun esto el número de soluciones queda evidentemente reducido á *cuatro*, á saber:

1°. Cuando q es *negativo*, en cuyo caso la propuesta es

$$x^4+px^2-qx+r=0,$$

(7) $$\left\{\begin{array}{l} x=+\tfrac{1}{2}\sqrt{s'}+\tfrac{1}{2}\sqrt{s''}+\tfrac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x=+\tfrac{1}{2}\sqrt{s'}-\tfrac{1}{2}\sqrt{s''}-\tfrac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x=-\tfrac{1}{2}\sqrt{s'}+\tfrac{1}{2}\sqrt{s''}-\tfrac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x=-\tfrac{1}{2}\sqrt{s'}-\tfrac{1}{2}\sqrt{s''}+\tfrac{1}{2}\sqrt{s'''}, \end{array}\right.$$

en este caso deben ser positivos los tres radicales, ó el *uno* positivo los otros *dos* negativos.