CAPÍTULO X.

COMPLEMENTO DE LA TEORÍA DE LAS SERIES.

§ 1. DE LAS SERIES RECURRENTES.

399. Vimos en otra parte (núm. 183) que las fracciones algebráicas racionales de la forma $\frac{a}{a'+b'x}$, $\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ ....., dan lugar á series de una naturaleza particular, conocidas con el nombre de *series recurrentes*. Ahora bien : dos son las cuestiones que se puede uno proponer sobre esta especie de series, ambas análogas á las que resolvimos para las *progresiones por cociente*, que son por otra parte á su vez (número 198) series recurrentes del primer órden.

La primera cuestion tiene por objeto *determinar el término general de una serie recurrente*, es decir una espresion con ayuda de la cual, dado el lugar de un término, se pueda obtener el valor de este término sin necesidad de formar desde luego todos los que le preceden.

La segunda tiene por objeto *volver de la serie recurrente á la fraccion generatriz*, ó lo que es lo mismo, *determinar la suma de los términos de la serie*.

Supondremos que se ha estudiado detenidamente lo dicho en los números 183 y 184 acerca de las series recurrentes.

PRIMERA CUESTION. *Determinacion del término general.*

400. Para pasar de lo simple á lo compuesto, consideremos *en primer lugar* la fraccion $\frac{a}{a'+b'x}$ que como se sabe da orígen á una *serie recurrente del primer órden.*

Encontramos (núm. 179).

$$\frac{a}{a+b'x}=\frac{a}{a'}-\frac{a}{a'}\cdot\frac{b'}{a'}x+\frac{a}{a'}\cdot\frac{b'^2}{a'^2}x^2-\frac{a}{a'}\cdot\frac{b'^3}{a'^3}x^3\ldots,$$

pero esta serie no es mas que una progresion por cociente cuyo primer término es $\frac{a}{a'}$, y la razon $-\frac{b'}{a'}x$; luego con arreglo á lo dicho en el núm. 192, el término general de esta serie, ó el n^{mo} término, es $\frac{a}{a'}\cdot\left(-\frac{b'}{a'}x\right)^{n-1}$.

401. Sea ahora la fraccion $\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$, que se puede poner, para simplificar, bajo la forma,

$$(1)\qquad \frac{\alpha+\beta x}{\alpha'+\beta'x+x^2},$$

suponiendo $\frac{a}{c'}=\alpha$, $\frac{b}{c'}=\beta$, $\frac{a'}{c'}=\alpha'$, y $\frac{b'}{c'}=\beta$.

Designemos por $x-p$ y $x-q$ los dos factores del trinomio $x^2+\beta'x+\alpha'$; y concibamos que se haya podido descomponer la espresion (1) en la suma de las dos fracciones simples

$$\frac{A}{x-p}+\frac{B}{x-q}.$$

Como cada una de ellas da lugar á una serie recurrente del primer órden, si se forman estas dos series por separado, como igualmente *el término general* de cada una de ellas, la suma de los dos términos será el *término general de la serie del segundo órden*; luego la dificultad consiste en determinar A y B de modo que se tenga la identidad

$$\frac{\alpha+\beta x}{\alpha'+\beta'x+x^2}=\frac{A}{x-p}+\frac{B}{x-p}.$$

Si se reducen pues los dos términos del segundo miembro al mismo denominador, saldrá á causa de $\alpha'+\beta'x+x^2=(x-p)(x-q)$,

$$\alpha+\beta x=(x-q)+B(x-p)=(A+B)x-(Aq+Bp);$$

pero esta ecuacion debe existir cualquiera que sea el valor de x; de modo que (núm. 180) se tiene por separado $A+B=\beta$, $Aq+Bp=-\alpha$; de donde se deduce

$$A=\frac{\beta p+\alpha}{p-q},\quad B=-\frac{\beta q+\alpha}{p-q}.$$

Hallándose determinadas A y B, si se comparan las dos fracciones $\frac{A}{x-p}$, $\frac{B}{x-q}$, con la fraccion $\frac{a}{a'+b'x}$ para la cual el término general es (núm. 398) $\frac{a}{a'}\left(-\frac{b'}{a'}x\right)^{n-1}$, sale para el *término general* de la serie que corresponde á la espresion (1),

$$-\frac{A}{p}.\left(\frac{1}{p}.x\right)^{n-1}-\frac{B}{q}.\left(\frac{1}{q}x.\right)^{n-1},\text{ ó }-\left(\frac{A}{p^n}+\frac{B}{q^n}\right)x^{n-1},$$

espresion en que solo se trataria ya de reemplazar A y B por sus valores obtenidos anteriormente.

Sea por ejemplo $\frac{3-2x}{3+2x-x^2}$, ó $\frac{-3+2x}{-3-2x+x^2}$;

resuelta la ecuacion $x^2-2x-3=0$, da $x=3$, $x=-1$; de donde

$$x^2-2x-3=(x-2)(x+1).$$

Si se supone $\frac{-3+2x}{-3-2x+x^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$, se obtiene, quitando los denominadores y reduciendo,

$$-3+2x=(A+B)x+A-3B;$$

de donde $A+B=2$, $A-3B=-3$; lo que da $A=\frac{3}{4}$, $B=\frac{5}{4}$.

Luego en virtud de la fórmula $-\left(\frac{A}{p^n}+\frac{B}{q^n}\right)x^{n-1}$, el término general del desarrollo de $\frac{3-2x}{3+2x-x^2}$ es

$$-\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{5}{4}.\frac{1}{(-1)^n}\right)x^{n-1}.$$

Sea $n=1$; esta espresion se convierte en $-\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)x^0$ ó $+1$.

$$n=2\ldots\ -\left(\frac{1}{4.3}+\frac{5}{4}\right)x^1,\text{ ó }-\frac{4}{3}x,$$

$$n=3\ldots\ -\left(\frac{1}{4.3^2}+\frac{5}{4}\right)x^2,\text{ ó }+\frac{11}{9}x^2,$$

$$n-4\ldots\ -\left(\frac{1}{4.3^3}+\frac{5}{4}\right)x^3,\text{ ó }-\frac{34}{27}x^3,$$

. . . . . .

Se tiene pues para el desarrollo por si mismo,

$$\frac{3-2x}{3+2x-x^2}=1-\frac{4}{3}x+\frac{11}{9}x^2+\frac{34}{27}x^3+\ldots,$$

resultado que es fácil comprobar por la reduccion á serie segun el método de los coeficientes indeterminados. Pero la principal ventaja que se saca de la determinacion del *término general*, es la de poder obtener un término de órden cualquiera sin pasar por todos los términos intermedios.

402. *Casos particulares.* 1°. El método precedente falta cuando las dos raíces del trinomio $x^2+\beta'x+\alpha'$ son iguales; porque entónces los valores de A y de B se convierten en $\frac{\beta p+\alpha}{0}$ y $-\frac{\beta q+\alpha}{0}$, esto es, en infinitos; y en efecto, se concibe que la suma de las dos fracciones $\frac{A}{x-p}$, $\frac{B}{x-p}$, no puede reproducir una fraccion cuyo denominador es de segundo grado en x.

Pero observemos que en este caso como la fraccion se convierte entónces en

$$(2)\qquad \frac{\alpha+\beta x}{(x-p)^2},$$

puede ponerse bajo la forma $\frac{\alpha}{(x-p)^2}+\frac{\beta x}{(x-p)^2}$,

ó bien $$\frac{\alpha}{(x-p)^2}+\frac{\beta(x-p)}{(x-p)^2}+\frac{\beta p}{(x-p)^2},$$

espresion que se reduce á $\frac{+\beta p}{(x-p)^2}+\frac{\beta}{x-p}$.

De modo que la segunda parte de esta espresion da lugar á una serie recurrente del primer órden, que tiene (núm. 399) para término general, $-\left(\frac{\beta}{p^n}\right)x^{n-1}$.

En cuanto á la primera, se reduce á

$$(\alpha+\beta d)(p-x)^{-2} \text{ ó } \frac{\alpha+\beta p}{p^2}.\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-2};$$

pero desarrollando este segundo factor por la fórmula del binomio, se tiene

$$\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-2}=1+\frac{2x}{p}+\frac{3x^2}{p^2}+\frac{4x^3}{p^3}+\ldots+\frac{ny^{n-1}}{p^{n-1}}$$

en que n designa el lugar de un término cualquiera; luego el *término general* correspondiente á la primera parte es

$$\frac{\alpha+\beta p}{p^2}.\frac{nx^{n-1}}{p^{n-1}}, \text{ ó } \frac{n(\alpha+\beta d}{p^{n+1}}.x^{n-1}.$$

Así pues el término general que corresponde á la propuesta (2) es

$$\left(\frac{n(\alpha+\beta p)}{p^{n+1}}-\frac{\beta}{p^n}\right)x^{n-1}, \text{ ó } \frac{n\alpha+(n-1)\beta p}{p^{n+1}}.x^{n-1}.$$

403. 2º. Los casos en que las dos raíces p y q son imaginarias, pace en tambien hacer escepcion al método número 400, pues que la espresion del término general encierra las cantidades p y q, y entónces hasta esta misma espresion debe hallarse complicada con imaginarias. Sin embargo es fácil asegurarse de si las imaginarias se reducen y desaparecen enteramente.

En efecto, si se reemplazan en $-\left(\frac{A}{p^n}+\frac{B}{q^n}\right)x^{n-1}$, A y B por los valores encontrados en el número 399, saldrá

$$\frac{(\beta q+\alpha)p^n-(\beta p+\alpha)q^n}{p^n\ q^n\ (p-q)}.x^{n-1},$$

espresion que puede ponerse bajo la forma

$$\left(\frac{\alpha(p^n-q^n)}{p^n-q^n(p-q)}+\frac{\beta(p^{n-1}-q^{n-1})}{p^{n-1}\ q^{n-1}\ (p-q)}\right)x^{n-1}.$$

Sentado esto, si se tiene $p=r+s\sqrt{-1}$,

se tiene tambien necesariamente $q=r-s\sqrt{-1}$;

de donde $pq=r^2+s^2$, $p^n\ q^n=(r^2+s^2)^n$, $p^{n-1}\ q^{n-1}=(r^2+s^2)^{n-1}$,

$p-q=2s\sqrt{-1}$, $p^n-q^n=(r+s\sqrt{-1})^n-(r-s\sqrt{-1})^n=2k\sqrt{-1}$.

(desarrollando por la fórmula del binomio y reduciendo); en fin $p^{n-1}-q^{n-1}+2k'\sqrt{-1}$.

El término general se convierte pues en

$$\left(\frac{2\alpha k.\sqrt{-1}}{(r^2+s^2)^n.\ 2s\sqrt{-1}}+\frac{2\beta k'.\sqrt{-1}}{(r^2+s^2)^{n-1}.\ 2s\sqrt{-1}}-\right).x^{n-1}=$$

$$\left(\frac{\alpha k}{s(r^2+s^2)^n}+\frac{\beta k'}{s(r^2+s^2)^{n-1}}\right)x^{n-1},$$

espresion completamente desembarazada de imaginarias.

Observacion. Reflexionando sobre la marcha que se ha seguido para la determinacion del *término general* relativo á una serie recurrente del segundo órden, se percibe fácilmente que la cuestion queda reducida á la *descomposicion de una fraccion racional en fracciones simples* cuyos denominadores sean los factores de primer grado, del denominador de la fraccion propuesta.

Como esta cuestion incidental es de grande importancia en el análisis superior, daremos tambien su solucion por una fraccion racional cuyo denominador es de tercer grado en x.

Descomposicion de una fraccion racional en fracciones simples.

404. Sea $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+x^3}$ la fraccion propuesta; y designemos por $x-p$, $x-q$, $x-r$, los tres factores del denominador, que suponemos desde luego *reales y desiguales.*

Supongamos (1) $$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+x^3}=\frac{A}{x-p}+\frac{B}{x-q}+\frac{C}{x-r},$$

en que A, B, C son cantidades que se trata de determinar.

Reduzcamos al mismo denominador, y observemos que

$$\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+x^3=(x-p)\,(x-q)\,(x-r);$$

y sale

(2) $$\left\{\alpha+\beta x+\gamma x^2=\left\{\begin{array}{l}A(x-p)\,(x-r)\\+B(x-p)\,(x-r)\\+C(x-p)\,(x-q)\end{array}\right\}\right..$$

Se podria como en el número 400 efectuar los cálculos y comparar despues los dos miembros término á término, lo que daria entre A, B, C, tres relaciones de las cuales se reducirian en seguida los valores de estas cantidades; pero por una consideracion particular se llega mas simplemente á la determinacion de dichos valores.

Como las ecuaciones (1) y (2) deben existir, sea el que quiera el valor de x, y como ademas A, B, C, son independientes de x, se sigue que si para un valor particular atribuido á esta letra, se llegan á determinar los valores correspondientes para A, B, C, estos valores convendrán igualmente á las ecuaciones (1) y (2). Ahora bien: si se hace sucesivamente en la ecuacion (2), $x=p$, $x=q$, $x=r$, sale

1°. Para $x=p$, $$\alpha+\beta p+\gamma p^2=A\,(p-q)\,(p-r),$$

lo que da $$A=\frac{\alpha+\beta p+\gamma p^2}{(p-q)\,(q-r)};$$

2°. Para $x=q$, $$B=\frac{\alpha+\beta q+\gamma q^2}{(q-p)\,(q-r)};$$

3°. Para $x=r$, $$C=\frac{\alpha+\beta r+\gamma r^2}{(r-p)\,(r-q)}.$$

405. *Casos particulares.* 1°. Supongamos $p=q=r$; la descomposicion precedente no puede ya tener lugar, porque los coeficientes A, B, C, se hacen infinitos.

Pero siguiendo una marcha análoga á la del número 409, se puede suponer

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(x-p)^3}=\frac{A}{(x-p)^3}+\frac{B}{(x-p)^2}+\frac{C}{x-p},$$

y ensayar la determinacion de A, B, C, con arreglo á esta descomposicion.

Para ello quitemos los denominadores, y saldrá.

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2=A+B\,(x-p)+C\,(x-p)^2.$$

Sea primeramente $x=p$; resulta $A=\alpha+\beta p+\gamma p^2$; haciéndose la ecuacion, cuando se introduce este valor de A,

$$\beta(x-p)+\gamma\,(x^2-p^2)=B\,(x-p)+C\,(x-p)^2,$$

ó, dividiendo por el factor comun $(x-p)$.

$$\beta+\gamma\,(x+p)=B+C\,(x-p).$$

Hagamos de nuevo $x=p$; se encuentra

$$B=\beta+2\gamma p;$$

de donde, reemplazando, en la ecuacion que se acaba de obtener, B por este valor,

$$\gamma(x-p)=C\,(x-p);\ \text{luego}\ C=\gamma,$$

de modo que se tiene la identidad

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+x^3}=\frac{\alpha+\beta p+\gamma p^2}{(x-p)^3}+\frac{\beta+2\gamma p}{(x-p)^2}+\frac{\gamma}{x-p},$$

resultado cuya exactitud se puede comprobar fácilmente reduciendo á una sola las fracciones del segundo miembro.

2°. Sea $p=r$, ó $\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+x^3$ de la forma $(x-x)^2\,(x-q)$; y ensayemos en este caso la descomposicion siguiente:

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(x-p)^2\,(x-q)}=\frac{A}{(x-p)^2}+\frac{B}{x-p}+\frac{C}{x-q};$$

si se quitan los denominadores se obtiene

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2=A(x-q)+B(x-p)(x-q)+C(x-p)^2.$$

Sentado esto, sea $x=p$; sale $\alpha+\beta p+\gamma p^2=A(p-q)$,

relacion de donde se saca $$A=\frac{\alpha+\beta p+\gamma p^2}{p-q}.$$

Introduciendo por A su valor en la segunda ecuacion idéntica, y transportando, se halla

$$-\alpha(x-p)-\beta q(x-p)+\gamma px(x-p)-\gamma q(x^2-p^2)$$
$$=(p-q)[B(x-p)(x-q)+C(x-p)^2];$$

si se divide por $x-p$, y se hace en seguida $x=p$ esta última identidad da

$$B=-\frac{(\alpha+\beta q-\gamma p^2+2\gamma pq)}{(p-q^2)}.$$

En fin, si se hace $x=q$ en la segunda de las dos identidades se deduce de ella $$C=\frac{\alpha+\beta q+\gamma q}{(p-q)^2}.$$

No consideramos el caso en que dos de las raices del polinomio $\alpha'+\beta'x+\gamma'x^2$ son imaginarias, pues que vimos ya que la espresion del término general puede ser en este caso despojada de imaginarias

406. Es fácil estender la marcha precedente á una fraccion racional de un órden cualquiera; pero para completar cuanto tiene relacion con la determinacion del término general de una serie recurrente, nos resta indicar de qué modo puede obtenerse el *término general* relativo á cada una de las fracciones, tales como $\frac{A}{(x-p)^3}$, $\frac{A}{(x-p)^4}$, $\frac{A}{(x-p)^5}$ á que es uno conducido por este método.

Sea desde luego la espresion $\frac{A}{(x-p)^3}$,

que equivale á $A(x-p)^{-3}$, ó $-\frac{A}{p^3}\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-3}$.

Se tiene

$$\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-3}=1+3.\frac{x}{p}+\frac{3.4}{2}.\frac{x^2}{p^2}+\frac{3.4.5}{2.3}.\frac{x^3}{p^3}+\ldots;$$

y el término de esta serie es evidentemente

$$\frac{3.4.5.6\ldots(n-1).n.(n+1)}{2.3.4.5\ldots(n-1)}.\frac{x^{n-1}}{p^{n-1}},$$

ó simplificando, $$\frac{n(n+1)}{2}.\frac{x^{n-1}}{p^{n-1}};$$

luego el *término general* de la espresion propuesta es

$$-\frac{A}{p^3}.\frac{n(n+1)}{2}.\frac{x^{n-1}}{p^{n-1}},\text{ ó bien }-\frac{n(n+1)}{2}.\frac{A}{p^{n+2}}.x^{n-1}.$$

Del mismo modo, $\frac{A}{(x-p)^4}$ equivale á $\frac{A}{p^4}\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-4}$;

pero $$\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-4}=1+4.\frac{x}{p}+\frac{4.5}{2}.\frac{x^2}{p^2}+\frac{4.5.6}{2.3}+\frac{x^3}{p^3}+\ldots,$$

serie cuyo término general es

$$\frac{4.5.6.7\ldots(n-1).n.(n+1)(n+2)}{2.3.4.5.6.7\ldots(n-1)}.\frac{x^{n-1}}{p^{n-1}},$$

ó reduciendo, $$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.\frac{x^{n-1}}{p^{n-1}};$$

luego se tiene para el término general de la espresion propuesta,

$$\frac{A}{p^4}.\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}.\frac{x^{n-1}}{p^{n-1}},\text{ ó bien }\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}.\frac{A}{p^{n+3}}.x^{n-1}\ldots,$$

y así sucesivamente.

SEGUNDA CUESTION. *Sumacion de las series recurrentes.*

Esta cuestion se divide en dos partes:

O se pide la *suma de los términos de la serie completa*, es decir, la fraccion generatriz que ha dado lugar á esta serie, ó bien la suma de un número limitado de términos.

La primera parte es la mas fácil de tratar.

407. *Primera parte.* Sean A, B, C, D, E, F,... los términos de una serie recurrente; y para fijar las ideas, supongamos que la serie sea de *tercer* órden. Pero lo que vamos á decir se aplicará fácilmente á una serie de un órden cualquiera.

El método es análogo al que seguimos (núm. 193) para las progresiones por cociente.

Designemos por p, q, r, las cantidades que forman la escala de relacion, es decir las cantidades constantes por las cuales es preciso multiplicar á C, B, A, para formar D, luego D, B, C, para formar E, y así sucesivamente; y se tendrán las relaciones

$$\begin{aligned} D&=Cp+Bq+Ar,\\ E&=Dp+Cq+Br,\\ F&=Ep+Dq+Cr,\\ G&=Fp+Eq+Dr,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Estas relaciones son en número infinito; luego si se suman, término á término, y se llama S *la suma* ó la *fraccion generatriz* buscada, se obtendrá

$$S-A-B-C=p\,(S-A-B)+q\,(S-A)+rS,$$

de donde se deduce $S=\dfrac{p(A+B)+qA-(A+B+C)}{p+q+r-1}$.

Siguiendo la misma marcha para las series de primero, segundo y cuarto,... órden, puede formarse la tabla siguiente:

1er. órden $S=\dfrac{-A}{p-1}$, ... (1)

2º. . . . . $S=\dfrac{pA-(A+B)}{p+q-1}$, ... (2)

3º. . . . . $S=\dfrac{p\,(A+B)+q\,A-(A+B+C)}{p+q+r-1}$, ... (3)

4º. . . . . $S=\dfrac{p\,(A+B+C)+q\,(A+B)+rA-(A+B+C+D)}{p+q+r+s-1}$; . (4)

. . . . . y así sucesivamente.

Sea por ejemplo la serie de tercer órden,

$$1-2x+3x^2-10x^3+22x^4-51x^5+125x^6\ldots,$$

cuya escala de relacion se compone del conjunto de las cantidades

$$(-x,\ +2x^2,\ -3x^3);$$

se halla, aplicando la fórmula (3), y observando que se tiene

$$A=1,\ B=-2x,\ C=3x^2,\ p=-x,\ q=+2x^2,\ r=-3x^3,$$

$$S=\frac{-x\,(1-2x)+2x^2-1+2x-3x^2}{-x+2x^2-3x^3-1}=\frac{1-x-x^2}{1+x-2x^2+3x^3}.$$

Sucede algunas veces que, en la serie propuesta, los dos ó tres primeros términos no se hallan comprendidos en la ley de recurrencia. Proviene esto (núm. 184), de que en la fraccion que le ha dado orígen el grado del numerador es mas elevado que el del denominador; y en este caso para obtener *la fraccion generatriz* se empieza por hacer abstraccion de los términos de que acabamos de hablar; en seguida, despues de haber obtenido, con arreglo á las fórmulas precedentes, la suma de los otros términos, se añaden los términos de que se habia hecho al principio abstraccion, teniendo cuidado de reducirlo todo á una sola espresion fraccionaria.

408. *Segunda parte.* En las anteriores fórmulas no entran mas que los primeros términos de la serie y las cantidades que forman la escala de relacion. Pero si se pide *la espresion de la suma de un número determinado de términos*, es preciso ademas conocer los últimos términos de la serie.

Sea tambien una serie recurrente del *tercer* órden, cuyos primeros términos son A, B, C, D, E,..., la escala de relacion (p, q, r), y los últimos términos, K, L M, N.

Como la serie es del tercer órden, se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} D&=Cp+Bq+Ar,\\ E&=Dp+Cq+Br,\\ F&=Ep+Dq+Cr,\\ &\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\\ N&=Mp+Lq+Kr. \end{aligned}$$

[El número de estas relaciones es limitado é igual al de los términos cuya suma se busca, disminuido de *tres*.]