Sentado esto, sumando término á término, y designando por S la suma buscada, se tiene evidentemente

$$S-A-B-C=p\,(S-A-B-N)+q\,(S-A-N-M)+r\,(S-N-M-L);$$

de donde se saca

$$S=\frac{p\,(A+B+N)+q\,(A+N+M)+r\,(N+M+L)-(A+B+C)}{p+q+r-1}.$$

Se podrian igualmente obtener las sumas relativas á una serie recurrente de un órden cualquiera.

Comparando esta fórmula con la (3) del número 405, se ve

1°. Que esta se deduce de la que se acaba de obtener, despreciando todos los términos afectados de L, M, N,...;

2°. Que para aplicar la fórmula (3) basta, como ya dijimos, conocer los tres primeros términos y la escala de relacion; miéntras que para hacer uso de la fórmula precedente es preciso absolutamente tener las espresiones de los tres términos que preceden al que termina la serie, lo que exige que se sepa encontrar el *término general* de la serie, es decir la espresion de un término de órden cualquiera, cuestion que llega á ser bastante complicada cuando la serie es de un órden un poco elevado.

409. Por lo demas las fórmulas relativas al caso de la suma de un número determinado de términos se aplican principalmente á las *series recurrentes numéricas.*

Sea por ejemplo una serie recurrente del tercer órden, en que siendo los tres primeros 1, 2, 3, sea el siguiente igual al doble del tercero, aumentado de la suma de los dos primeros; el quinto igual al doble del cuarto, aumentado de la suma del tercero y del segundo; y asi sucesivamente. El desarrollo de esta serie será

$$1, 2, 3, 9, 23, 58, 148, 377, 960, 2445, 6227,...$$

Sentado esto, para obtener la suma de los once primeros términos, se hará en la fórmula anterior,

$A=1$, $B=2$, $C=3$, $p=2$. $q=1$, $r=1$, $N=6227$, $M=2445$, $L=960$; lo cual dará

$$S=\frac{2\times6230+8673+9632-6}{3}=10253.$$

Si se pidiese la suma de mayor número de términos, por ejemplo,

la suma de los 50 primeros términos, seria preciso prolongar la serie hasta el quincuagésimo inclusive, que no dejaria de ser en estremo penoso.

O bien seria preciso formar directamente el cuadragésimo octavo, el cuadragésimo nono y quincuagésimo término, con arreglo á la espresion del término general. De manera que para obtener este por el método espuesto en los números 398 y siguientes, *se empezaria por poner la serie propuesta bajo la forma*

$$1+2x+3x^2+9x^3+23x^4+58x^5...;$$

se buscaria la fraccion generatriz que ha dado lugar á esta serie, se la descompondria (núm. 402) en tres fracciones simples, para cada una de las cuales se obtendria un término general. Efectuando en seguida la suma de estos tres términos generales, se tendria el de la serie $1+2x+3x^2+...$; y en fin, se supondria $x=1$, lo cual daria el término general de la serie $1+2+3+9+23+...$: pero es fácil conocer que todos estos cálculos son casi siempre impracticables.

En efecto, si se aplica la fórmula (3) del número 405 á la serie $1+2x+3x^2+9x^3+...$, suponiendo en ella $A=1$, $B=2x$, $C=3x^2$, $p=2x$, $q=x^2$, $r=x^3$, se tendrá

$$S=\frac{1-2x^2}{1-2x-x^2-x^3}.$$

Pero la espresion x^3+x^2+2x-1, igualada á cero no puede evidentemente tener mas que raices inconmensurables, de modo que la descomposicion de la fraccion $\frac{1-2x^2}{1-2x-x^2-x^3}$ en fracciones simples, no puede hacerse de una manera exacta.

Estas reflexiones prueban que ciertos resultados analíticos, simples en teoría, son algunas veces poco susceptibles de aplicacion.

410. Terminaremos la teoría de las series recurrentes con la esposicion de un medio, debido á Lagrange, para *reconocer si una serie propuesta es de la naturaleza de las series recurrentes.*

Este medio está fundado sobre las observaciones siguientes:

1°. Si la serie propuesta, que designaremos por S, es una serie recurrente de primer órden, proviene de una fraccion de la forma $\frac{a}{a'+b'x}$.

De modo que se tiene $\frac{a'+b'x}{a}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{a}x$,

lo que prueba que *invertida la fraccion*, ó lo que es lo mismo, *dividida la unidad por la serie propuesta*, S *debe dar por cociente una funcion entera de* x (núm. 230) *igual á* p+qx; si no se hace exactamente esta division es porque la serie [suponiendo que sea recurrente] pertenece al segundo órden ú á otro superior.

2°. Si es una serie recurrente del segundo órden proviene de una fraccion de la forma $\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$; de modo que se tiene

$$\frac{a'+b'x+c'x^2}{a+bx}=\frac{a'}{a}+\frac{ab'-ba'}{a^2}\cdot x+\frac{a^2c'-b(ab'-ba')}{a^2(a+bx)}\cdot x^2,$$

ó

$$p+qx+\frac{k}{a+bx}\cdot x^2,$$

lo cual prueba que la *unidad dividida por* S *debe dar lugar á un cociente entero de la forma* p+qx, *mas un producto de* x^2 *por una serie recurrente del primer órden*, es decir que designando por $S'x^2$ la resta á que se llega despues de haber dividido 1 por S y obtenido el cociente $p+qx$, se debe hallar $\frac{S}{S'}$ igual á un cociente exacto de la forma $p'+q'x$; y así sucesivamente.

411. Guiado por estas consideraciones ha dado Lagrange la siguiente regla para reconocer si una serie propuesta es recurrente:

Sea $S=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$ esta serie.

1°. *Dividase la unidad por* S, *y continúe la operacion* hasta que se haya obtenido un cociente de la forma $p+qx$, y una resta de la forma $S'x^2$ (en que S', designa una serie indefinida de la forma $A'+B'x+C'x^3+\ldots$);

2°. *Dividase* S *por* S', y *prolónguese la operacion* hasta que se obtenga un cociente de la forma $p'+q'x$, y una resta tal como $S''x^2$ (en que S' sea igual á $A''+B''x^2+C''x^2=\ldots$);

3°. *Dividase* S' *por* S'', *y prolónguese la operacion* hasta que se obtenga un cociente de la forma $p''=q''x$, y una resta $S'''x^2$;.... Y así sucesivamente.

Tan luego como sea exacta una de estas divisiones, es recurrente la serie propuesta, marcándose el órden de la serie por el órden de la division que se ha hecho exactamente.

En cuanto á la escala de relacion de la serie, se la obtendria fácilmente (núm. 184) si se pudiese obtener la fraccion generatriz.

Pero supongamos para fijar las ideas que se haga exactamente la tercera division.

Se tendrá pues la serie de ecuaciones

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'}{S}x^2,$$

$$\frac{S}{S'}=p'+q'x+\frac{S''}{S'}x^2,$$

$$\frac{S'}{S''}=p''+q''x.$$

La última da $\frac{S'}{S''}=\frac{1}{p''+q''x}$;

de donde, sustituyendo en la segunda,

$$\frac{S}{S'}=p'+q'x+\frac{x^2}{p''+q''x}=\frac{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2}{p''+q''x};$$

luego $$\frac{S'}{S}=\frac{p''+q''x}{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2}.$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuacion, se encuentra

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{(p''+q''x)x^2}{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2},\text{ ó bien}$$

$$\frac{1}{S}=\frac{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x)+(p+qx)x^2+(p''+q''x)x^2}{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2};$$

luego en fin

$$S=\frac{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2}{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x)+(p+qx)x^2+(p''+q''x)x^2},$$

espresion que simplificada es de la forma

$$S=\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3},$$

siendo entónces la escala de relacion (núm. 184)

$$\left(-\frac{b'}{a'}x,\ -\frac{c'}{a'}x^2,\ -\frac{d'}{a'}x^3\right).$$

Tomemos para ejemplo la serie

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ldots$$

cuyos términos se obtienen por la espresion general... $\frac{n(n+1)}{2}$, y en que n designa el lugar del término que se quiere formar.

Para reconocer si esta serie es recurrente, se la pondrá primeramente bajo la forma

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+45x^8+\ldots$$

Sentado esto, aplicando la regla anterior se encuentra

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{1+3x+6x^2+\ldots}=1-3x+\frac{S'}{S}x^3$$

(en que S' tiene por desarrollo.

$$3+8x+15x^2+24x^3+35x^4+48x^5+63x^6+80x^7+99x^8+\ldots);$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{1+3x+6x^2+\ldots}{3+8x+15x^2+\ldots}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{S''}{S'}$$

$$(S''=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots);$$

$$\frac{S'}{S''}=\frac{3+8x+15x^2+\ldots}{1+3x+6x^2+10x^3+\ldots}=3-x,$$

cociente exacto.

De modo que la serie es recurrente y del tercer órden.

Para obtener la escala relacionemos las ecuaciones

$$\frac{1}{S}=1-3x+\frac{S'}{S}\cdot x^2,$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{S''}{S'},$$

$$\frac{S''}{S'}=3-x;$$

la última da $\frac{S''}{S'}=\frac{1}{3-x}$,

de donde $\frac{S}{S'}=\frac{3+x}{9}+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{1}{3-x}$,

y por consiguiente $\frac{1}{S}=1-3x+x^2(3-x)=1-3x+3x^2-x$

luego en fin $S=\frac{1}{1-3x+3x^2-x^3}=\frac{1}{(1-x)^3}$.

De suerte que la escala de relacion de la serie $1+3x+6x^2+\ldots$ se compone de las cantidades $(3x,\ -3x^2,+x^3)$, y la de la serie propuesta, $1+3+6+10+\ldots$, es el conjunto de los números $(3,-3,+1)$; lo cual es fácil de verificar.

Por ejemplo, el término 28 se compone de la suma de los productos

de los tres términos,	21,	15,	10,
multiplicados respectivamente por	3,	— 3,	+1.

NOTA. Se ve igualmente que la regla precedente proporciona el medio de *encontrar la escala de relacion* de una serie recurrente cuando se ha perdido su huella.

---

§ II. DE LAS SERIES DE NÚMEROS FIGURADOS Y DE LAS QUE DEPENDEN DE ELLAS.

Existe ademas otra clase de series para las que es fácil obtener el *término general* y la espresion de la *suma de un número limitado de términos*; tales son las series numéricas que traen su orígen de una progresion por diferencia.

412. *Determinacion del término general* de la serie

$$a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots\ldots\ldots$$