Tomemos para ejemplo la serie

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ldots$$

cuyos términos se obtienen por la espresion general... $\frac{n(n+1)}{2}$, y en que n designa el lugar del término que se quiere formar.

Para reconocer si esta serie es recurrente, se la pondrá primeramente bajo la forma

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+45x^8+\ldots$$

Sentado esto, aplicando la regla anterior se encuentra

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{1+3x+6x^2+\ldots}=1-3x+\frac{S'}{S}x^3$$

(en que S' tiene por desarrollo.

$$3+8x+15x^2+24x^3+35x^4+48x^5+63x^6+80x^7+99x^8+\ldots);$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{1+3x+6x^2+\ldots}{3+8x+15x^2+\ldots}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{S''}{S'}$$

$$(S''=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots);$$

$$\frac{S'}{S''}=\frac{3+8x+15x^2+\ldots}{1+3x+6x^2+10x^3+\ldots}=3-x,$$

cociente exacto.

De modo que la serie es recurrente y del tercer órden.

Para obtener la escala relacionemos las ecuaciones

$$\frac{1}{S}=1-3x+\frac{S'}{S}\cdot x^2,$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{S''}{S'},$$

$$\frac{S''}{S'}=3-x;$$

la última da $\frac{S''}{S'}=\frac{1}{3-x}$,

de donde $\frac{S}{S'}=\frac{3+x}{9}+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{1}{3-x}$,

y por consiguiente $\frac{1}{S}=1-3x+x^2(3-x)=1-3x+3x^2-x$

luego en fin $S=\frac{1}{1-3x+3x^2-x^3}=\frac{1}{(1-x)^3}$.

De suerte que la escala de relacion de la serie $1+3x+6x^2+\ldots$ se compone de las cantidades $(3x,\ -3x^2,+x^3)$, y la de la serie propuesta, $1+3+6+10+\ldots$, es el conjunto de los números $(3,-3,+1)$; lo cual es fácil de verificar.

Por ejemplo, el término 28 se compone de la suma de los productos

de los tres términos,	21,	15,	10,
multiplicados respectivamente por	3,	— 3,	+1.

NOTA. Se ve igualmente que la regla precedente proporciona el medio de *encontrar la escala de relacion* de una serie recurrente cuando se ha perdido su huella.

---

§ II. DE LAS SERIES DE NÚMEROS FIGURADOS Y DE LAS QUE DEPENDEN DE ELLAS.

Existe ademas otra clase de series para las que es fácil obtener el *término general* y la espresion de la *suma de un número limitado de términos*; tales son las series numéricas que traen su orígen de una progresion por diferencia.

412. *Determinacion del término general* de la serie

$$a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots\ldots\ldots$$

en que $a, b, c, d...$, son los diferentes términos de una progresion por diferencia.

Vimos ya (núm. 186) que en toda progresion por diferencia,

$$a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g.\ h...,$$

el término general, l, tiene por espresion $l=a+(n-1)r$, en que r designa la razon y n el número de los términos; luego el *término general* de la serie de las m^{mas} potencias de los diferentes términos de esta progresion tiene por valor,

$$l^m=[a+(n-1)r].^m$$

Propóngase por ejemplo, *hallar el décimoquinto* término de la serie de las quintas potencias de los términos de la progresion ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13... Se tendrá, haciendo en la fórmula, $n=15$, $m=5$, $a=1$, $r=2$,

$$l^5=(1+14\times2)^5=29^5=20511149.$$

413. *Sumacion de los términos de la serie*

$$a^m+b^m+c^m+d^m+...+k^m+l^m,$$

en que $a, b, c, d..., k, l$ son los diferentes términos de una progresion por diferencia.

Con arreglo á la fórmula del binomio se tiene

$$b^m=(a+r)^m=a^m+mra^{m-1}+m\frac{m-1}{2}r^2a^{m-2}+...,$$

$$c^m=(b+r)^m=b^m+mrb^{m-1}+m\frac{m-1}{2}r^2b^{m-2}+...,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$l^m=(k+r)^m=k^m+mrk^{m-1}+m\frac{m-1}{2}r^2k^{m-2}+...$$

sumando todas estas ecuaciones miembro á miembro, y designando

por S_m, S_{m-1}, $S_{m-2}...$, S_2, S_1, las sumas de las m^{mas}, $(m-1)^{mas}$ potencias se obtiene

$$S_m-a^m=S\ -l^m-mr\,(S_{m-1}-l^{m-1})+\ m\frac{m-1}{2}r^2\,(S_{m-2}-l^{m-2})+,$$

ó reduciendo

$$\text{(A)}\ l^m-a^m=mr\,(S_{m-1}-\ l^{m-1})+m\ \frac{m-1}{2}r^2\ (S_{m-2}-l^{m-2})+..,$$

fórmula que encierra las sumas de las potencias, desde S_{m-1} hasta S_1 inclusive.

(En que S_0 es igual á $a^0+b^0+c^0+...+k^0+l^0$, y equivale á n.)

Para dar á conocer el uso de la fórmula (A) hagamos sucesivamente $m=1, 2, 3, 4, 5...$

Sea, 1°. $m=1$; se halla

$$l-a=r\,(S_0-l^0)\ \text{de donde}\ S_0=\frac{l-a}{r}+1=\frac{(n-1)\,r+r}{r}=n,$$

resultado ya conocido.

2°. $m=2$; sale $l^2-a^2=2r\,(S_1-l)+r^2\,(S_0-l^0)$,

de donde $$S_1-l=\frac{l^2-a^2}{2r}-\frac{r\,(l-a)}{2r};$$

luego $$S_1=\frac{l^2-a^2}{2r}+\frac{r\,(l+a)}{2r}=\frac{(l+a)\,(l-a+r)}{2r},$$

ó bien, á causa de $l=a+(m-1)r$, de donde $l-a+r=nr$,

$$S_1=\frac{(l+a).\,nr}{2r}=\frac{(l+a)\,n}{2},$$

resultado conocido tambien (núm. 187).

3°. $m=3$; la fórmula (A) se convierte en

$$l^3-a^3=3r\,(S_2-l^2)+3r^2\,(S_1-l)+r^3\,(S_0-l^0),$$

resultado que hará conocer á S_2 como funcion de S_1 y de S_0.

4°. $m=4$;

$$l^4-a^4=4r\,(S_3-l^3)+6r^2\,(S_2-l^2)+4r^3\,(S_1-l)+r^4\,(S_0-l^0);$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

y esta fórmula dará á S_3 como funcion de S_2, S_1, S_0; y así sucesivamente.

Se ve pues que se podrá siempre obtener la suma de las potencias semejantes de un número determinado de términos como funcion de las sumas de las potencias inferiores, sean los que quieran los grados de estas.

414. Tomemos por ejemplo la serie natural de los números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots;$$

y busquemos la suma de los cuadrados, de los cubos, etc., de los n primeros términos.

Se tiene, segun las fórmulas precedentes, y observando que

$$a=1,\ r=4,\ l=1,\ S_0=n,$$

1°. $$S_1=\frac{n(n+1)}{2} \text{ ó } \frac{n^2+n}{2};$$

2°. $$n^3-1=3(S_2-n^2)+3(S_1-n)+n-1 \text{ ; luego}$$

$$S_2=n^2+\frac{n^3-1}{3}-\frac{n^2-n}{2}-\frac{n-1}{3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

ó bien tambien. $$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3};$$

3°. $$n^4-1=4(S_3-n^3)+6(S_2-n^2)+4(S_1-n)+n-1;$$

luego $$S_3=n^3+\frac{n^4-1}{4}-\frac{2n^3-3n^2+n}{4}-\frac{n^2-n}{2}-\frac{n-1}{4},$$

ó $$S_3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(S_1).^2$$

Se hallaria igualmente

$$S^4=\frac{6n_3+15n^4+10n^3-n}{30}; \text{ y así sucesivamente.}$$

NOTA. A fin de distinguir las sumas de las potencias semejantes de

los términos de la serie natural 1, 2, 3,..., de las sumas relativas á cualquiera otra progresion, designaremos en lo sucesivo á las primeras por s_1, s_2, s_3,... s_p; hé aquí su uso:

415. Se puede siempre, con ayuda de estas espresiones, *obtener el valor de la suma de un número cualquiera de términos de una serie cuyo término general es una* FUNCION RACIONAL Y ENTERA del número de los términos que se considera.

Sea, para fijar las ideas, una serie cuyo *término general* sea an^p, en que a es un número conocido cualquiera, p un esponente entero y positivo, n el órden del término que se considera.

La serie propuesta es entónces de la forma

$$a.\,1^p+a.\,2^p+3^p+a.\,4^p+\ldots+a.\,n^p,$$

serie que se reduce evidentemente á

$$a.\,(1^p+2^o+3^p+4^p+\ldots+n^p)=a.\,s^p.$$

Del mismo modo, una serie cuyo término general está espresado por a, $n^p \pm b.\,n^p \pm c.\,n^r$, se reduce á

$$\left.\begin{array}{l} a\,(1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p) \\ \pm\ b\,(1^q+2^q+3^q+\ldots+n^q) \\ \pm\ c\,(1^r+2^r+3^r+\ldots+n^r) \end{array}\right\}=a.\,s_p \pm b.\,s_q \pm c.\,s_r.$$

Quedan pues conocidas las espresiones s_p, s_q, s_r, con arreglo á las fórmulas del núm. 414; y la suma de los n primeros términos de la serie propuesta igualmente determinada.

416. *Aplicacion de las series de los números figurados.* Llámanse así las series que se deducen de una progresion por diferencia, cuyo primer término es la unidad y la razon un número entero, haciendo sucesivamente la suma de los dos primeros, de los tres primeros, de los cuatro primeros,... términos de la progresion, y operando en seguida sobre la nueva serie que se obtiene por este medio, como se operó sobre la progresion, y así sucesivamente.

Sea primeramente la progresion natural de los números

$$\div\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7\ldots,$$

$$\text{Las series. . . .}\left\{\begin{array}{lllllll} 1, & 3, & 6, & 10, & 15, & 21, & 28\ldots, \\ 1, & 4, & 10, & 20, & 35, & 56, & 84\ldots, \\ 1, & 5, & 15, & 35, & 70, & 126, & 210\ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

de las que *la primera* se forma sumando alternativamente los dos primeros, los tres primeros,... términos de la progresion propuesta, de las que *la segunda* se forma *con ayuda de la primera*, así como esta se ha formado por medio de la progresion, y de las que *la tercera* se deduce de *la segunda* como esta lo ha sido de *la primera*,...; estas series digo, son las de los *números figurados de la primera clase.*

La primera es la serie de los números *triangulares.*

La segunda de los *números piramidales triangulares.*

Las series que siguen á la segunda no han recibido denominaciones particulares.

La progresion ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11... $2n-1$ da orígen á los *números figurados de la segunda clase;* y las series que dependen de ella son segun la ley anterior,

1, 4, 9, 16, 25, 36...,
1, 5, 14, 30, 55, 91....
. . . . . .
. . . . . .

La primera de estas dos series es la continuacion de los *números cuadrados;* la segunda la de los *números piramidales cuadrangulares.*

Estas denominaciones provienen de la analogía que tienen estos números con ciertas figuras geométricas.

417. Las series que acabamos de formar gozan de varias *curiosas propiedades*, de las que haremos conocer la mas importante : tal es la de que puede siempre formarse *su término general, y obtener la espresion de la suma de los* n *primeros términos, en funcion de las cantidades* s_1, s_2, s_3,...

En efecto, para una progresion cualquiera la primera de las series que de ella se derivan es tal que su n^{mo} término es igual á la suma de los n primeros términos de la progresion propuesta; luego, 1°. este término puede siempre espresarse racionalmente como funcion de n; 2° como *este término general* es una *funcion racional* de n, la suma de los n primeros términos puede (núm. 413) espresarse por medio de las sumas s_1, s_2, s_3,..., cuyos valores se conocen.

Asi sean las progresiones ÷ 1. 2. 3. 4. 5...,
1, 3, 6, 10, 15...,
1, 4, 10, 20, 35...,
. . . . . .
. . . . . .

Como la suma de los términos de la progresion es $\frac{(n+1)n}{2}$, *término general* de la primera serie es $\frac{(n+1)n}{2}$, ó $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$; luego (núm. 413) *la suma de los* n *primeros términos* de esta serie tiene por espresion

$$\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{2}s_1,$$

ó, reemplazando s_2, s_1, por sus valores (núm. 414),

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{12}+\frac{n^2+n}{4}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6},$$

espresion que puede tambien escribirse así : $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.\,3}$.

Igualmente, como *el término general* de la segunda serie es

$$\frac{n^3+3n^2+2n}{6},\ \text{ó}\ \frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n,$$

se tiene para *la suma de los* n primeros términos de esta *serie*,

$$\frac{1}{6}s_3+\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{3}s_1;$$

ó sustituyendo por s_1, s_2, s_3 sus valores,

$$\frac{n^4+2n^3+n^2}{24}+\frac{2n^3+3n^2+n}{12}+\frac{n^3+n}{6}$$

$$=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\,3.\,4}.$$

Se tendria igualmente para *término general* de la tercera serie,

$$\frac{n^4+6n^3 11n^2+6n}{24},\ \text{ó}\ \frac{1}{24}n^4+\frac{1}{4}n^3+\frac{11}{24}n^2+\frac{1}{4}n;$$

y por consiguiente para la *suma de los* n *primeros términos*,

$$\frac{n^5+10n^4+35n^3+50+24n}{120}=\frac{n(n+1)(n-2)(n+3)(n+4)}{2.\,3.\,4.\,5},$$

y así sucesivamente.

NOTA. Nótese que las espresiones

$$\frac{n}{1},\ \frac{n(n+1)}{2},\ \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\,3},\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\,3.\,4},$$

no son otra cosa que los *términos generales* de los coeficientes del desarrollo de $(1-x)^{-m}$, suponiendo sucesivamente $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$,... (Véase sobre es punto el núm. 404.)

418. Sean aun los números figurados que corresponden á la progresion $\div$ 2. 3. 5. 7. 9.... $2n-1$,

á saber:

1, 4, 9, 16, 25.....,
1, 5, 14, 30, 55.....,
. . . . . .
. . . . . .

Como el n^{mo} término de la serie de los *números cuadrados* es la suma de los n primeros términos de la propuesta, tiene para espresion

$$\frac{(2n-1+1)\,n}{2}=n^2.$$

Luego *la suma* de los n primeros términos de esta misma serie es igual á s_2, ó (núm. 412) á $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, espresion que se reduce tambien á $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.\,3}$.

Como el n^{mo} *término* de la segunda serie es $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$,

ó bien $$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

se tiene por valor de la *suma de los* n *primeros términos*,

$$\frac{1}{3}s_3+\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{6}s_1=\frac{n^4+4n^3+5n^2+2n}{12},$$

ó bien $$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{3.\,4}.$$

Se encontrarian del mismo modo los términos generales y sumatorios de las series que resultan de cualquiera otra progresion.

---

§ III. CAMBIO DE LAS SERIES, Ó MÉTODO INVERSO DE ELLAS.

419. El método de los coeficientes indeterminados da en *general* el medio de desarrollar toda *funcion* de x segun las diversas potencias de esta letra. Recíprocamente, desarrollada segun las potencias de x esta funcion, que se puede designar por y, es fácil obtener por el mismo método *el desarrollo de la cantidad* x *segun las potencias* de y; en esto es en lo que consiste *el cambio de las series*, ó el método inverso de las series.

Sea $$y=ax+bx^2+cx^3+dx+^4\ldots$$

la funcion desarrollada segun las diversas potencias de x (siendo a, b, c, d,... cantidades conocidas); *se pide* recíprocamente *el valor* de x en y, es decir los coeficientes del desarrollo

(2) $$x=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots$$

Para conseguirlo elevemos sucesivamente al cuadrado, al cubo,... los dos miembros de la ecuacion (1); y saldrá

$$\begin{array}{l|l|l}
y^2=a^2x^2+2a\,bx^3+b^2 & x^4+2ad & x^5+\ldots, \\
\qquad\qquad\qquad +2ac & \quad +2bc & \\
y^3=a^3x^3+3a^3bx^4+3ab^2 & x^5+\ldots, & \\
\qquad\qquad\qquad +3a^2c & & \\
y^4=a^4x^4+4a^3bx^5+\ldots, & & \\
y^5=a^5x^5+\ldots; & &
\end{array}$$