que no se habia demostrado (núm. 380) mas que en el caso en que m era un número entero y positivo, se verifica ahora para un esponente cualquiera.

427. *Tercera consecuencia.* De la fórmula (C) se deduce tambien, tomando los logaritmos de los dos miembros en el sistema neperiano,

$$\pm x\sqrt{-1} = l'(\cos x \pm \sqrt{-1}.\ \text{sen}\ x);$$

de donde, separando las dos fórmulas contenidas en esta, y restando la segunda de la primera,

$$2x\sqrt{-1} = l'\frac{\cos x + \sqrt{-1}.\ \text{sen}\ x}{\cos x - \sqrt{-1}.\ \text{sen}\ x},$$

ó bien

$$2x\sqrt{-1} = l'\frac{1 + \sqrt{-1}.\ \text{tang}\ x}{1 - \sqrt{-1}.\ \text{tang}\ x}.$$

Pero encontramos (núm. 225) $l'\frac{1+y}{1+y} = \left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{5} + \ldots\right)$;

y haciendo en esta fórmula, $y = \sqrt{-1}.\ \text{tang}\ x$, se obtiene

$$l'\frac{1 + \sqrt{-1}.\ \text{tang}\ x}{1 - \sqrt{-1}.\ \text{tang}\ x} = 2\left(\text{tang}\ x - \frac{\text{tang}^3 x}{3} + \frac{\text{tang}^5 x}{5} - \ldots\right)\sqrt{-1}$$

luego

$$2x\sqrt{-1} = 2\left(\text{tang}\ x - \frac{\text{tang}^3 x}{3} + \frac{\text{tang}^5 x}{5} - \ldots\right)\sqrt{-1};$$

y por consiguiente, (D)

$$x = \text{tang}\ x - \frac{\text{tang}^3 x}{3} + \frac{\text{tang}^5 x}{5} - \ldots$$

Esta fórmula da *el valor de un arco como funcion de la tangente de este arco*. Luego por el método inverso de las series (núm. 417), se podria desarrollar recíprocamente tang x como funcion de x. Pero se llega tambien e está último desarrollo por el medio que sigue :

Sea

$$\text{tang}\ x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$$

(observando que la tangente, así como el seno, no puede encerrar en su desarrollo ninguna potencia de grado par del arco, pues que debe cambiar de signo con este arco).

Para determinar A, B, C,..., se sustituyen en la relacion tang x. cos x = sen x, en lugar de seno x y de cos x, sus desarrollos encontrados en el núm. 421, y luego en lugar de tang x la serie anterior, y sale

$$\left(Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Efectuando la multiplicacion indicada, é igualando los coeficientes de las mismas potencias de x se halla sucesivamente

$$A = \frac{1}{1},$$

$$B = \frac{A}{1.2} - \frac{1}{1.2.3},$$

$$C = \frac{B}{1.2} - \frac{A}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5},$$

$$D = \frac{C}{1.2} - \frac{B}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.3.4.6} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7};$$

y así sucesivamente.

428. Los analistas han hecho servir la fórmula (D) del número precedente para la *determinacion de la relacion aproximada de la circunferencia con el diámetro*. Para que pueda esta fórmula ser útil es preciso que el arco, cuyo valor se busca sea cuando mas igual á 50°, pues que se tiene tang 50° = 1.

Sentado esto, sea $50° = m + n$, y tomemos para m el arco cuya tangente es igual á $\frac{1}{4}$, en cuyo caso se tiene, segun la fórmula (D),

$$m = \frac{1}{4} - \frac{1}{3.4^3} + \frac{1}{5.4^5} - \frac{1}{7.4^7} + \ldots,$$

serie muy convergente, cuya ley es patente.

Por otra parte la ecuacion $50^\circ = m+n$ da $n = 50^\circ - m$; de donde

$$\text{tang } n = \frac{\text{tang } 50^\circ - \text{tang } m}{1+\text{tang } m \text{ tang } 50^\circ} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5};$$

y aplicando tambien la fórmula (D),

$$n = \frac{3}{5} - \frac{3^3}{3.5^3} + \frac{3^5}{5.5^5} - \frac{3^7}{7.5^7} + \ldots;$$

de modo que $(m+n)$, ó el arco de 50°, está representado por la suma de las series

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3.4^3} + \frac{1}{5.4^5} - \frac{1}{7.4^7} + \ldots + \frac{3}{5} - \frac{3^3}{3.5^3} + \frac{3^5}{5.5^5} - \frac{3^7}{7.5^7} + \ldots$$

La segunda de estas dos series no es muy convergente, y seria preciso un gran número de términos para obtener un grado de aproximacion suficiente.

429. *Pero se puede llegar á otras dos series mucho mas convergentes.*

Sea v el arco cuya tangente es igual á $\frac{1}{5}$; resulta

$$v = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots$$

Se tiene pues segun las fórmulas trigonométricas,

$$\text{tang } 2v = \frac{2 \text{ tang } v}{1 - \text{tang}^2 v} = \frac{5}{12}, \quad \text{tang } 4v = \frac{2 \text{ tang } 2v}{1 - \text{tang}^2 2v} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Como esta última tangente difiere muy poco de la unidad, puede ya concluirse que el arco $4v$ difiere poco de 50°. y que por consiguiente la tangente de $4v - 50^\circ$ debe ser una fraccion muy pequeña.

Sentado esto, sea $z = 4v - 50^\circ$, de donde tang z = tang $(4v - 50^\circ)$;

sale $$\text{tang } z = \frac{\text{tang } 4v - 1}{1 + \text{tang } 4v} = \frac{1}{239};$$

luego $$z = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} + \ldots;$$

ademas la ecuacion, $z = 4v - 50^\circ$ da $50^\circ = 4v - z$.

Introduciendo en esta espresion, en lugar de v y de z sus valores, se obtiene

$$50^\circ = \left\{ \begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{5}{5.239^5} - \ldots\right) \end{array} \right\},$$

de donde se concluye en fin para la relacion de la circunferencia con el diámetro, ó para la de la semi-circunferencia con el radio,

$$200^\circ \text{ ó } \pi = \left\{ \begin{array}{l} 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) \\ 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right) \end{array} \right\}.$$

Es fácil asegurarse de que los cuatro primeros términos de la primera serie, y los dos primeros términos de la segunda dan el valor de π con ménos de una diferencia de 0,00001

430. Conclusion general. Reflexionando sobre todo lo que hemos dicho acerca de las series circulares ó trigonométricas, se ve á primera vista el partido que se puede sacar del empleo de los símbolos imaginarios, para resolver cuestiones de mucha utilidad. Como para conseguirlo se estienden á espresiones imaginarias algunas fórmulas que no se habian reconocido verdaderas sino para cantidades reales, podria acaso ponerse en duda la exactitud de los resultados á que se llega; sin embargo, si despues de ciertas transformaciones se llega á espresiones despojadas de imaginarias, que concuerdan con las que suministra un razonamiento rigoroso y directo, nos veremos obligados á admitir la legitimidad de los medios empleados.

Así es como han hecho los analistas los descubrimientos mas importantes, y á los que no se llegaria sino con mucha dificultad por medios en apariencia mas satisfactorios.

El método seguido para obtener las espresiones del seno x y cos x ofrece tambien el ejemplo de un razonamiento que conduce breve-

mente al objeto, aunque deja un poco de incertidumbre en el entendimiento.

Para llegar á estas espresiones se supone que haciéndose nulo el arco a, la relacion $\frac{\text{tang } a}{a}$ se reduce á 1. A primera vista cuesta trabajo concebir que siendo nulo el arco pueda existir relacion alguna entre el arco y su tangente, y que sea ademas igual á 1; pero si en vez de suponer el arco enteramente nulo se supone que no difiere de 0 mas que en una cantidad estremadamente pequeña, entónces la relacion entre la tangente y el arco es calculable y difiere muy poco de la unidad; y cuanto mas pequeño es el arco ménos difiere la relacion de la unidad. De donde puede concluirse que en el límite de decrecimiento del arco, es decir, cuando a se hace *nulo*, se tiene $\frac{\text{tang } a}{a} = 1$. La exactitud de las fórmulas á que se llega de este modo, y que se encuentra comprobada por las aplicaciones que se hacen á la determinacion de los senos y de los cosenos de ciertos arcos, confirma la exactitud de los principios que han conducido á ellas.

La consideracion de las relaciones de las magnitudes variables, en los límites de sus crecimientos ó decrecimientos es el objeto del *análisis infinitesimal*, nuevo ramo de las matemáticas del que puede decirse que forma la introduccion la teoría de las series.

FIN.

THE END