fiunt ex latere, C B, & segmento, B D, ulteriùs producto usque ad Perpendicularem A D (a)

Praeparatio. Producatur alterutrum latus C B usque ad perpendicularem A D; tum fiant Quadratum C L totius lineae C D; Quadratum D F segmenti B D; Quadratum D O Perpendicularis D A; & producantur C F, F I, quae constituent Quadratum G I ex lateribus aequalibus lineae C B *ex Theor. VI. cor. 1. & 2.*

Dem. Quadratum lateris C A est aequale duobus simul quadratis laterum C D, & D A, comprehendentium Angulum rectum D: *ex Theor. IX* & ex eadem ratione Quadratum lateris A B est aequale duobus simul Quadratis laterum A D, B D, cujus Quadratum E B continetur in toto Quadrato C L: sed Quadratum C L, praeter Quadratum B E, & Quadratum G I, continet duo rectangula C F, F L quae fiunt ex lineis C B, & B D; ergo Quadratum lateris C A continet, praeter quadrata laterum CB, B A, duo Rectangula, quae fiunt ex latere C B, & segmento B D, producto usque ad Perpendicularem A D.

THEOREMA XII. (Fig. 12.)

In quocumque Triangulo Quadratum lateris, A C, oppositi angulo Acuto, A B C, superant Quadrata laterum A B, B C, duobus Rectangulis totius lateris, C B, & ejus segmenti, D B, quod est inter angulum acutum, B, & Perpendicularem, A D (b).

Praepar. Ducatur ab Angulo A Perpendicularis A D, cujus fiat Quadratum D O, & segmenti D B Quadratum D N; & secta I F aequali D B, ducantur etiam ad angulos rectos F E, D L, quarum singula latera opposita erunt aequalia. *ex Theor. VI. cor. 2.*

Dem. Quadratum lateris C B, hoc est totum Quadratum C I, continet, praeter Quadrata C G, & G I, duo rectangula H G, G B; & Quadratum lateris A B est aequale Quadrato D O perpendicularis A D, & insuper alteri quadrato D N lateris D B, propter angulum rectum D: *ex Theor. IX.* Sed, ex eodem, Quadratum lateris C A est solùm aequale Quadratis G C, D O: ergo Quadratum lateris C A superant duo Quadrata laterum C B, B A duplici Rectangulo H G, & duplici Quadrato G I: quae simul sunt aequalia duobus Rectangulis E I ex toto latere C B, & ejus segmento B D. *ex Theor. X. cor. 2.*

Co-

(a) Prop. 12. (b) Eucl. lib. II. prop. 13.

Coroll. Hinc manifestum fit, quòd in Triangulis, si Quadrata laterum sint majora Quadrato Basis, angulus huic oppositus, erit Acutus; si sint minora, Obtusus; si sint aequalia, Rectus.

Quatuor proximè demonstrata Theoremata optimè numeris explicantur, quos habes apud Clavium, aliosque. Ex iis verò duo ultima, quamvis valde utilia ad practicam Geometriam, non sunt tamen necessaria ad sequentes Propositiones, post quas repeti possunt, si cui difficiliora videantur. In Demonstrationibus autem, quae sequuntur, quum Liber non indicatur, intelligitur is, in quo fit sermo.

LIBER II.

De Figuris curvilineis.

INter figuras, quae curvâ lineâ continentur, primum habet in Geometria locum, Circulus, qui solus uno, ac certo Circini ductu perficitur. Ejus tres praecipuè mirabiles proprietates considerat Aristoteles *cap. 2. Mechanicarum quaestionum*: Prima est, quòd circulus fit ex linea mota, & quiescente; dum enim linea tota circumducitur ad circulum efficiendum, ejus extremum in puncto centri quiescit.

Secunda est, quòd singula lineae puncta, quamvis continua, dum linea circumagitur, inaequali velocitate moventur: majus enim spatium percurrit punctum, quod magis â centro removetur.

Tertia est, quòd Peripheria, circulum ambiens, constat quodammodo ex contrariis, & extremis sine medio: ex concavo nimirum, & convexo; inter quae Rectum ita medium est, ut AEquale inter magnum, & parvum. Nam quemadmodum linea, ut ex magna fiat parva, priùs debet fieri aequalis; ita, ut ex concava fiat convexa, priùs debet fieri recta. Idque eò mirabilius est, quòd ea contraria insunt lineae, nullam latitudinem habenti, qualis est Circuli Peripheria.

De Circulo igitur agit Euclides tertio, & quarto libro Elementorum: & nos hic tum Problemata, quae ad Circulos, & Figuras circulo inscribendas pertinent; tum Theoremata, ad eorum proprietates investigandas utiliora, praejactis principijs tradenus.

CA-

CAPUT I.

Principia.

NON alia in hoc Libro adhibentur Axiomata, & Postulata, quàm ea, quae in primo libro tradidimus. Supersunt solùm aliquae Definitiones explicandae, quarum.

I. Circuli aequales sunt, quorum Diametri sunt aequales.

II. Recta linea circulum tangere dicitur, quae ulteriùs producta, circulum non secat.

III. Angulus, qui fit ex linea tangente, & circumferentia, dicitur Angulus contingentiae.

IV. In Circulo lineae aequè distant à centro, quum Perpendiculares à centro ad eas ductae, sunt aequales.

V. Segmenta Circuli sunt partes Circuli, quae ab aliqua linea recta secantur.

VI. Angulus dicitur esse in Segmento circuli, à quo lineae, angulum in circumferentia constituentes, circumdantur.

Ut in Figura I. Theorem. Icon. III. Angulum B A C circumdat Semicirculus; Angulum B A G pars Circuli major; Angulum B A E pars Circuli minor.

VII. Angulus insistere dicitur Segmento, quod angulo opponitur, eumque claudit.

Ut in eadem Figura Angulum B A C claudit semicirculus; Angulum B A E pars Circuli major; Angulum B A G pars Circuli minor.

VIII. Angulus Segmenti dicitur, qui est mixtus ex linea recta, & parte Circumferentiae intra circulum. Quòd si recta linea sit Diameter, dicitur angulus semicirculi.

Ut in eadem Figura, est angulus, compositus ex diametro C B, & circumferentia B A.

IX. Sector Circuli dicitur Portio Circuli, comprehensa duabus semidiametris.

X. Figura circulo inscribi dicitur, quum omnium Angulorum vertices in circumferentia sunt. Ut ibidem Triangulum B A C.

CA-

CAPUT II.

Problemata.

PROBLEMA I. (Icon. III. Fig. 1.)

Dati arcus Centrum invenire, et Circulum perficere.

SIT data circuli portio A B C, cujus Centrum oportet invenire, & Circulum perficere. Ex duobus punctis, pro libito sumptis, A, & B, aequali radio, fiant duo arcus extra, & intra circulum, se secantes in O, & E. Similiter ex punctis B, & C, ad libitum sumptis, fiant duo arcus se secantes in F, & G. Deinde per puncta sectionum ducantur lineae O E, & F G, quae arcus bifariam secabunt, & se contingent in H: ubi est Centrum circuli perficiendi. *Dem. ex Theor. III. Cor. 1. ductis lineis A B, B C.*

Eodem modo fit Circulus, qui transeat per tria puncta A, B, C, quae non sint in directum posita.

PROBLEMA II. (Fig. 2.)

Tangentem ducere.

PRimò, si Tangens ducenda sit ad datum Punctum in Circumferentia, ut A; Ducatur semidiameter A D, ad cujus extremitatem A excitetur perpendicularis hoc modo. Semidiametri A D intervallo secetur circulus ex A in B, & per B ducatur linea indefinita D F, quae ex B eodem semidiametri intervallo secetur in F. Juncta F A, erit perpendicularis Tangens circulum. *Ex Theor. I. & V.*

Secundò. Si ex Puncto extra circulum F ducenda sit recta, Tangens circulum; Ducatur linea F D ad centrum Circuli, quae dividatur bifariam, ut in B: deinde ex B, intervallo dimidiae, velut F B, secetur Peripheria in A. (Facto, ad demonstrandum, semicirculo F A D.) Linea F A erit Tangens circulum. *Ex eod.*

PROBLEMA III. (Fig. 3.)

Triangulum Rectangulum, Obtusangulum, Acutangulum in Circulo constituere.

DUcatur in Circulo quaecumque Diameter A B: si fiat supra Diametrum Triangulum, cujus vertex C tangat in quovis puncto

to Circumferentiam; Erit B C A Rectangulum: si vertex D cadet extra Circumferentiam, erit B D A Acutangulum: si cadit intra Circulum, veluti in E; erit B E A Triangulum Obtusangulum. *Ex Theor. I. hujus, & Corroll Theor. IV. Lib. I.*

PROBLEMA IV. (Fig. 4.)

Triangulum alteri dato AEquiangulum circulo inscribere.

SIT datum Triangulum quodcumque P H O, cui AEquiangulum in circulo D B E inscribendum sit. Ducatur tangens quaecumque A C: deinde fiat Angulus A B D, aequalis angulo O; & angulus C B E aequalis angulo P: tum ducatur D E. Erit angulus D aequalis angulo P, & angulus E aequalis angulo O, *ex Theor. VI. hujus lib.* & Triangulum B D E aequiangulum Triangulo P H O.

Quòd si data sit recta D E, supra quam describendum sit segmentum circuli, capiens angulum datum H. Fiat angulus D aequalis angulo P, & angulus E aequalis angulo O: ac producantur D B, E B, donec se intersecent: tum per tria puncta D, B, E ducatur Circulus, *juxtà Probl. I.* Erit segmentum D B E illud, quod petebatur: in quo angulus B erit aequalis angulo H. *ex Theor. III. lib. I.*

PROBLEMA V. (Fig. 5.)

Quadratum, Hexagonum, Trigonum Circulo inscribere.

PRimò. Quadratum circulo inscribitur, si ducantur duae Diametri A B, C D ad angulos rectos; nam lineae, ductae per earum extrema puncta, constituent Quadratum A C B D. *ex Theor. I. & IV. cor. 2.*

Octagonum verò circulo inscribitur, si quilibet arcus, subtendens latus Quadrati, bifariam secetur: lineae quippe, ductae per octo circumferentiae puncta, constituent Octagonum regulare: cujus scilicet omnia latera, & Anguli sunt aequales.

Secundò. Hexagonum circulo inscribitur, si semidiameter sexies in circulo ducatur; nam lineae, ductae per ea circumferentiae puncta, constituent Hexagonum A E M B N G. *ex Theor. III. cor. 2.* Dodecagonum circulo inscribitur, si arcus Hexagoni, ut A E, bifariam secentur.

Tertiò, si per tria puncta Hexagoni, intermedio omisso, ducantur lineae, constituent Trigonum aequilaterum in circulo, ut A M N. *ex Theor. V. cor. 2.*

Dimidium lateris Trigoni dat latus Heptagoni in eodem circulo, non Geometricè, & perfectè, sed proximè.

PRO-

PROBLEMA VI. (Fig. 6.)

Pentagonum Circulo inscribere.

PEntagonum circulo inscribitur, ductis duabus diametris ad angulos rectos A B, C D: deinde semidiameter E B dividatur bifariam in F: intervallum F C transferatur ex F in G: eritque C G, latus Pentagoni. *ex Theor. XI. lib. III.* Latus autem Decagoni erit linea G E. *ex Theor. X. lib. III.* Quòd si arcus Decagoni bifariam dividantur, habebitur latus Icosagoni, seu Figurae regularis viginti laterum.

Si in circulo, cui est inscriptum Pentagonum, inscribatur etiam Trigonum regulare: ita, ut vertex Trigoni congruat cuilibet vertici Pentagoni, distantia minima inter angulum Pentagoni, & Trigoni erit latus Quindecagoni.

Figurae verò omnes Circulis circumscribuntur, si priùs inscribatur Circulo Figura quaesita: & deinde per vertices angulorum ejusdem Figurae, Circulo inscriptae, ducantur Tangentes, quae similem Figuram circa circulum constituent.

Possunt quoque istae, aliaeque omnes Figurae Circulo inscribi, Circuli Quadrante diviso in gradus 90. Sumantur enim in Quadrante tot gradus, quot conveniunt quaesitae Figurae; si secundùm eos circulus dividatur, dabuntur arcus, quos ejus Figurae latera subtendunt, & ejusdem Anguli ad Centrum comprehendunt.

Ut autem cognoscatur, quot gradus conveniant singulis Figuris dividantur 360. gradus circuli per numerum laterum Figurae construendae; & Quotiens dabit gradus quaesitos. Ex. gr. Trigono conveniunt 120 gradus circuli; quia 360, divisi per 3, dant 120.

Possunt etiam similes Figurae sine circulo construi supra datam lineam, inveniendo angulum, quem duo latera Figurae construendae comprehendunt: qui dici solet Angulus ad Circumferentiam.

Is autem invenitur, subtrahendo ex 180 gradibus circuli angulum ad centrum. Ex. gr. Si quaeratur Trigoni angulus ad circumferentiam: quum ejus angulus ad centrum inventus sit graduum 120; his subtractis ex 180, remanent 60 gradus pro angulo Trigoni ad circumferentiam; quem scilicet ejus Figurae latera comprehendunt: ut videre est in adposita Tabella.

Figurae.	Angulus centri.	Angulus circumferentiae.
III.	120	60
IV.	90	90
V.	72	108
VI.	60	120
VII.	$51\frac{3}{7}$	$128\frac{4}{7}$
VIII.	45	135
IX.	40	140
X.	36	144
XI.	$32\frac{8}{11}$	$147\frac{3}{11}$
XII.	30	150

CAPUT III.

Theoremata.

HIC primò lineas, & angulos intra circulum: deinde lineas circulum contingentes, considerabimus: nonnullis in tertium Proportionum librum rejectis, ubi clariùs ostendentur.

THEOREMA I. (Ic. III. Fig. I. Theor.)

Angulus in Semicirculo Rectus est. (a)

Praepar. Ducatur, ad demonstrandum, semidiameter A D.

Dem. Angulus C A D est aequalis angulo A C D: & angulus A B D est aequalis angulo D A B: quum sint oppositi aequalibus semidiametris: *ex Theor. V. libri primi.* Ergo totus angulus B A C est aequalis duobus simul B, & C: ergo est dimidium duorum rectorum, seu Rectus est. *ex Theor. III. lib. I. & Axiom. VI.*

Coroll. Ductâ lineâ A E, patet, quòd angulus B A E, habens pro basi arcum majorem semicirculo, est Obtusus: & angulus G A B, insistens arcui minori semicirculo, est Acutus.

THEO-

(a) Eucl. lib. III. prop 31.

THEOREMA II. (Fig. 2.)

Angulus in Centro, ut B D C, est Duplus anguli in Circumferentia B A C, si eidem arcui insistant. (a)

Praepar. Ducatur, ad demonstrandum, Diameter A E.

Dem. Anguli D A B, & D B A sunt aequales, utpotè oppositi aequalibus semidiametris: *ex Theor. V. lib. I.* ergo angulus exterior B D E est duplus anguli D A B. *ex Theor. III. lib. I.* Similiter anguli D A C, & D C A sunt aequales, utpotè oppositi etiamaequalibus semidiametris: ergo etiam angulus exterior C D E est duplus anguli C A D: ergo totus angulus B D C ad centrum est duplus totius anguli A ad circumferentiam.

Coroll. I. Anguli in circumferentia, ut G, A, F, si habent pro basi eandem circuli portionem, sunt aequales inter se: nam singulorum duplus est angulus ad centrum B D C, utpotè exterior. *ex Theor. III. lib. I.* (b)

II. Angulus in circumferentia habet pro mensura dimidium arcus, cui insistit; quum sit dimidius anguli ad centrum, cujus Mensura est totus arcus, cui insistit. *Ex defin. anguli not. I. lib. I.*

THEOREMA III. (Fig. 3.)

Si Diameter secet in Circulo aliam lineam rectam bifariam, erit ad illam Perpendicularis; & si sit Perpendicularis, illam bifariam secabit. (c)

Praepar. Ad demonstrandum, ducantur semidiametri F B, F C,

Dem. Triangulum F B C est Isosceles: ergo si linea F A secet bifariam lineam B C, est ad illam perpendicularis: si est perpendicularis, illam bifariam secat. *Ex Theor. V. lib. I. cor.* 4.

Coroll. I. Si perpendicularis aliquam lineam in circulo bifariam dividat, in medio perpendicularis centrum est; nam facilè demonstratur, solùm ex eo puncto lineas omnes ad circumferentiam esse aequales. (d)

II. Si B C sit latus Hexagoni, erit aequale semidiametro; nam quum arcus B C in Hexagono sit sexta pars circuli, erit angulus B F C 60. graduum: & propter Triangulum isosceles duo anguli aequales B, & C singuli erunt etiam graduum 60, dimidium gra-

duum

(a) Eucl. lib. III. prop. 20. (b) Eclud. lib. III. prop. 21.
(c) Prop. 3. (d) Eucl. lib. III. cor. prop. 1.

duum 120, Residui ad duos rectos: ergo singuli latera trianguli F B C erunt aequalia, utpote opposita aequalibus angulis. *Ex Theor. V. lib. I. cor. II.* (a)

III. Si Chordà B C secetur bifariam à diametro E D, ab eadem diametro etiam arcus B C secabitur bifariam in D; nam imposito puncto C in B, totus semicirculus E C D congruet semicirculo E B D, & arcus C D arcui B D; adeoque erunt aequales.

THEOREMA IV. (Fig. 4.)

In Circulo aequales lineae aequaliter à Centro distant. (b)

Praepar. Ex centro ducantur Perpendiculares A B, & A C: tum conjungantur A D, A E.

Dem. Quoniam lineae A D, A E sunt aequales, earum Quadrata erunt aequalia. Rursum Quadratum lineae D A propter angulum rectum in B, est aequale duobus simul Quadratis linearum D B, B A: *ex Theor. IX. lib. I.* & Quadratum lineae A E est aequale quadratis linearum E C, C A: sed lineae D B, & E C sunt aequales, *ex antecedente*; adeoque etiam eorum quadrata: ergo, sublatis aequalibus, remanent etiam aequalia quadrata linearum perpendicularium A B, A C: adeoque & ipse perpendiculares aequales: ergo D F, & E G aequaliter à centro distant. *Ex definit. IV. hujus libri.*

Coroll. I. Lineae, quae aequaliter distant à centro, sunt inter se aequales: quod patet eadem demonstratione.

II. Si chordae, seu lineae D E, E G, subtendentes arcum, sint aequales, etiam arcus erunt aequales; & è converso: quia si superponantur, congruent. (c)

III. Hinc linearum in circulo maxima est Diameter; & lineae, quae magis à Diametro receduns, minores sunt, quia subtendunt arcum minorem. (d)

IV. Quaecumque demonstrata sunt de eodem Circulo, vera sunt etiam de Circulis aequalibus, qui superpositi omninò congruunt.

THEOREMA V. (Fig. 5.)

Si linea ponatur extremitati Diametri Perpendicularis, circulum Tanget in uno puncto. (e)

Dem. Semidiameter A D, perpendicularis ad lineam B C, est bre-

(a) Lib. IV prop. 15. (b) Eucl. lib. III. prop. 14.
(c) Eucl. lib. III. pr. 28, 29. (d) Pr. 15. (e) Pr. 16.

brevissima omnium linearum ex centro ad eandem lineam; ergo linea A C, & quaecumque alia ducta ad lineam B C est major, quàm semidiameter A D: & consequenter omnis alia linea ad lineam B C cadit ultra circulum; quia major semidiametro: ergo linea B in uno puncto D circulum tangit.

Coroll. I. Nulla linea recta duci potest per punctum D inter Circumferentiam, & Tangentem: nam perpendicularis ex centro A, quae duci potest ad quamcumque lineam, ductam per punctum D, *juxtà Problema V. lib. I.* debet esse brevior semidiametro A D, non perpendiculari ad lineam D E: *ex Theor. V. lib. I. cor. ult.* adeoque linea D E, & quaecumque alia, quae ducatur per punctum D infra tangentem, non cadit extra, sed intra Circulum.

II. Hinc, ajunt, nullus angulus acutus rectilineus fieri potest minor angulo contactus, & nullus major angulo semicirculi; quia per punctum contactus D nulla recta duci potest, inter Tangentem, & Circumferentiam, constituens angulum acutum cum linea contactus, aut cum semidiametro.

III. Ex centro nulla linea, nisi quae ad punctum contactus ducitur, est tangenti perpendicularis; nam sola semidiameter A D est brevissima omnium, quae duci possunt ex centro A ad tangentem B C. (a)

THEOREMA VI. (Fig. 6.)

Angulus, qui fit ex linea tangente circulum, & secante qualibet, ut A B C, est aequalis angulo, B D C, in circumferentia, qui habet pro basi eandem secantem B C. (b)

Praepar. Ducatur, ad demonstrandum, Diameter B E.

Dem. Angulus A B E, rectus [*ex antecedente*] est aequalis angulo B D E, utpotè in semicirculo: sed anguli C B E, & C D E sunt aequales, utpote insistentes eidem arcui C E: *ex Theor II. Cor. 1.* ergo, iis sublatis, remanent aequales anguli ABC, & BDC.

Similiter demonstratur, angulum F B D esse aequalem angulo B C D, qui habet pro basi eandem secantem, & arcum B D. Qui anguli dicuntur ab Euclide esse in alterno circuli segmento.

Coroll. In quacumque Figura quadrilatera circulo inscripta duo anguli oppositi, & si recti non sint, sunt tamen aequales duobus rectis: nam ducta ad punctum anguli B tangente, & secante B E, duo anguli A B E, & F B E *ex Theor. I. lib. I.* sunt aequales duobus rectis; sed angulus A B E est aequalis toti angulo D ex modò demonstratis: similiter angulus F B E est aequalis toti angulo C: ergo duo anguli C, & D sunt aequales duobus rectis. (c)

Ut-

(a) Eucl. lib 3. pr. 18. (b) Eucl. lib. 3. pr. 32. (c) Eucl. lib. 3. pr. 22.