nonnullis, quae huc spectant, ex libro Euclidis 3. 12. & 13. accersitis.

THEOREMA I. (Icon. V. Fig. 1.)

Parallelogramma, & Triangula, quorum eadem est Altitudo, seu quae sunt inter easdem Parallelas, sunt inter se, ut eorum Bases. (a)

Dem. Si basis B A Parallelogrammi X fuerit bis, vel ter aequalis basi A F Parallelogrammi Z; erit Parallelogrammum X bis, aut ter aequale, hoc est duplum, vel triplum Parallelogrammi Z, atque ita in infinitum: quum Parallelogramma aequalium basium inter easdem Parallelas sint aequalia: *ex lib. I. Theor. VII.* ergo Parallelogramma ejusdem altitudinis sunt inter se, ut eorum bases.

Similiter triangulum X, dimidium parallelogrammi X, erit duplum aut triplum trianguli Z, juxtà eorum bases.

Coroll. I. Si basis B A fuerit dupla, aut tripla basis A F, & basis G A fuerit similiter dupla, aut tripla basis A D, erunt tota rectangula X, & Y, aut eorum dimidia triangula reciproca, & aequalia, quia similiter dupla, aut tripla ejusdem rectanguli, vel dimidii trianguli Z, ex modò demonstratis. Quod similiter patet de aliis Parallelogrammis. (b)

II. Hinc patet, quòd si quatuor lineae sint proportionales, ut G A, A D, A B, A F, erit Rectangulum Y, quod fit ex extremis lineis G A, A F, aequale Rectangulo X, quod fit ex mediis A D, A B. (c)

III. Et si tres lineae sint continuè proportionales, hoc est duae mediae sint inter se aequales, ut A D, A B, Quadratum X ex media erit aequale rectangulo Y, quod fit ex extremis lineis A C, A F. (d)

IV. Rectangula proportionalium basium, & altitudinum, ut O, & Z, sunt in duplicata ratione laterum: nam si basis G A sit dupla basis A D, & similiter basis B A sit dupla basis A F, erit rectangulum O duplum rectanguli X, aut Y: sed rectangulum X, aut Y est duplum rectanguli Z; ergo rectangulum O erit quadruplum rectanguli Z.

Similiter, si eaedem bases fuerint triplae, erit rectangulum X, aut Y, triplum rectanguli Z; & ejusdem nonuplum erit rectangulum O: atque ita deinceps semper in duplicata ratione.

V. Hinc rectangulorum dimidia triangula O, & Z, quae habent proportionales bases, & altitudines, etiam habent basium, & altitudinum duplicatam rationem.

VI.

(a) Eucl. lib. VI. prop. 1. (b) Eucl. lib. VI. Prop. 14. 15.
(c) Prop. 16. (d) Prop. 17.

VI. Et si basis B A fuerit dupla basis A F, & basis G A tripla basis A D, habebit rectangulum O ad rectangulum Z rationem productam, seu compositam ex tripla, & dupla eorundem laterum: hoc est rectangulum O erit sextuplum rectanguli Z, quia triplum rectanguli X, aut Y, quod est duplum rectanguli Z. Quae similiter demonstrantur de omnibus similibus Parallelogrammis. (a)

THEOREMA II. (Fig. 2.)

Si ponatur Parallela lateri alicujus Trianguli, haec secabit reliqua duo latera proportionaliter. (b)

Praepar. Ducantur, ad demonstrandum E D, B C.

Dem. Triangula E D B, & B C E sunt aequalia, quum sint in eadem basi B E, & Parallela D C: ergo, *ex II. Axiom. hujus lib.* habent eandem proportionem ad Triangulum A B E: sed Triangula A B E, B D E habent eundem verticem E; adeoque eandem altitudinem. Similiter Triangula A E B, & C E B habent eundem verticem B; ergo basis B D habet eandem proportionem ad basim B A, ac basis C E ad basim E A. *Ex antec.*

Coroll. I. Ergo alternando, ut B D ad C E, ita B A ad E A.

II. Ergo componendo, ut D A ad A B, ita C A ad E A.

III. Et si linea B E secet latera Trianguli proportionaliter, erit Parallela reliquo lateri: nam similiter erunt aequalia inter se duo Triangula E D B, & E B C, quum habeant eandem proportionem ad Triangulum A B E, sicut eorum bases: *ex antec. Theor.* ergo quum habeant eandem basim B E, erunt inter easdem Parallelas B E, D C, *ex Theor. VI. lib. I. cor. ult.*

THEOREMA III. (Fig. 3.)

Triangula Aequiangula habent latera circa aequales angulos Proportionalia. (c)

Praepar. Ducatur linea G H; ita, ut latus D G sit aequale lateri A B, & latus D H sit aequale lateri A C.

 Dem.

(a) Eucl. lib. VI. prop. 23. (b) Prop. 2.
(c) Eucl. lib. VI. prop. 4.

Dem. Si Trianguli A B C angulus A imponatur angulo D, basis B C cadet super G H; (supponuntur enim angulus, & latera aequalia) sed anguli B, & C supponuntur aequales angulis E, & F; ergo *ex II. Theor. lib. 1. in cor.* linea B C, seu G H erit Parallela basi E F: ergo *ex antecedente Theor.* ut latus D E ad latus A B, ita latus D F ad latus A C.

Quòd si angulus B imponatur angulo E, etiam basis A C fiet parallela lineae D F: ergo ut D E ad E F, ita A B ad B C. Idem ostendetur, si angulus C imponatur angulo F.

Coroll. I. Parallela, ad unum latus trianguli ducta, ut G H ad E F, aufert triangulum minus omnino proportionale majori.

II. Si anguli A, & D sint aequales, & circa eos angulos latera proportionalia, erunt duo triangula A B C, & D E F omnino aequiangula; nam erit G H parallela lateri E F, *ex cor. 3. Theor. antecedente*, & triangulum D G H sicut triangulum A B C. (a)

THEOREMA IV. (Fig. 4.)

In Triangulo Rectangulo Perpendicularis ab angulo recto ad basim ducta dividit totum Triangulum in duo triangula similia toti, & inter se. (b)

Dem. I. Totum triangulum A B C, & ejus pars Triangulum A D C habent duos angulos C A B, & C D A rectos; *ex suppositione*; adeoque aequales: Sed angulus C est communis utrique: ergo reliquus angulus C A D est aequalis angulo B: *ex Theor. III. lib. I.* ergo *ex antecd. Theor.* haec duo triangula aequiangula habent latera circa aequales angulos proportionalia.

Coroll. I. Ergo linea A C est media proportionalis inter totam basim B C, & ejus segmentum D C. Nam ut in toto triangulo est C B ad C A, ita in triangulo A D C est eadem C A ad C D.

Dem. II. Totum triangulum B A C, & ejus altera pars A B D habent angulos B A C, & B D A rectos: *ex suppositione*: sed angulus B est communis utrique; ergo reliquus angulus B A D est aequalis angulo C: adeoque sunt omnino similia.

Coroll. II. Ergo A B est media proportionalis inter totam basim B C, & ejus alterum segmentum B D. Nam ut in toto triangulo est B C ad B A; ita in triangulo B D A est eadem B A ad B D.

Dem. III. Duo triangula A B D, & A C D habent angulos ad D ambos rectos; sed angulus B A D est aequalis angulo C, & angulus C A D aequalis angulo B *ex modo demonstratis*: ergo haec duo triangula sunt omninò similia.

Co-

(a) Eucl. lib. VI. prop. 6. (b) Eucl. lib. VI. prop. 8.

Coroll. III. Ergo A D est media proportionalis inter duo segmenta basis B D, & D C. Nam, ut B D ad D A, ita in altero triangulo est A D ad D C.

THEOREMA V. (Fig. 5.)

Quaecumque Triangula similia habent duplicatam proportionem laterum homologorum. (a)

Praepar. Ex aequalibus angulis ad bases ducantur Perpendiculares A G, D H.

Dem. Quoniam angulus B est aequalis angulo E, *ex suppositione*. Anguli ad G, & H recti, *ex constructione*; erit triangulum A B G aequiangulum, & proportionale Triangulo D E H: *Ex Theor. III.* ergo erit triangulum rectangulum A B G ad triangulum rectangulum D E H in duplicata ratione laterum. *Ex Theor. 1. cor. 5*

Similiter demonstratur de triangulis A C G, & D F H: ergo totum triangulum A B C est ad triangulum simile D E F in duplicata ratione laterum.

THEOREMA VI. (Fig. 6.)

Similia Poligona dividuntur in totidem Triangula similia, & proportionalia (b)

Praepar. Ducantur ab angulis ad angulos lineae, dividentes Poligonum A, & B in Triangula.

Dem. Angulus E est aequalis angulo L, & latera circa eos proportionalia; *ex definitione figurae similis*: ergo Triangulum G E D est simile, & proportionale Triangulo N L H. *Ex Theor. III. cor. 2.* Ex eadem ratione Triangulum G F C est aequiangulum, & proportionale triangulo N M I: ergo quum ex totis angulis G D C, qui ex suppositione sunt aequales angulis N, H, I, ablati sint hinc inde anguli aequales, remanent etiam triangula A, & B aequiangula, & proportionalia.

Coroll. I. Totum Poligonum A ad Poligonum B habet duplicatam rationem laterum quum componatur ex totidem triangulis proportionalibus, quae habent duplicatam proportionem laterum. *Ex Theor. ant.*

II. Ergo omnia Poligona similia sunt inter se, ut Quadrata, ali-

que

(a) Eucl. lib. VI. prop. 19.
(b) Eucl. lib. VI. propr. 20.

que rectangula proportionalia, quae similiter habent duplicatam proportionem laterum. *ex Theor. I. cor. 4.*

III. Ergo sicut in triangulo rectangulo quadratum basis est aequale duobus quadratis ex lateribus, continentibus angulum rectum; ità quaelibet figurae similes descriptae supra basim trianguli rectanguli, erunt aequales duabus simul figuris similiter descriptis supra latera, continentia angulum rectum, quum sint similiter in duplicata ratione laterum. (a)

IV. Si sint tres lineae continuè proportionales, ut D C, H I, O P, ut prima ad tertiam, ita se habet rectilineum A, descriptum super primam, ad simile rectilineum B, descriptum supra secundam; nimirum in eadem duplicata proportione.

THEOREMA VII. (Fig. 7.)

Si duae lineae in circulo se secent, Rectangulum ex partibus unius, est aequale Rectangulo ex partibus alterius. (b)

Praepar. Ducantur, ad demonstrandum, B C, E D.

Dem. Triangula E A D, & B A C sunt aequiangula: nam anguli ad verticem A sunt in utroque aequales. Anguli C, & D sunt aequales, quum insistant eidem arcui E B; *ex Theor. II. lib. 2.* & reliquus angulus reliquo aequalis: ergo ex *Theor. III.* habent latera circa aequales angulos proportionalia: nimirum A D est ad A E, sicut A C ad A B: ergo *ex Theor. I. cor. 2.* rectangulum ex extremis A D, A B est aequale rectangulo ex mediis A E, A C.

THEOREMA VIII. (Fig. 8.)

Si duarum rectarum ab eodem puncto, C, altera circulum secet, altera tangat, erit Quadratum tangentis, C B, aequale Rectangulo ex tota secante, C A, & ejus parte extra circulum, C D. (c)

Praep. Ducatur ex centro Perpendicularis E B, & nectantur A B, D B.

Dem. Triangula A C B, & D C B sunt aequiangula; habent enim angulum C communem, & angulum C B D aequalem angulo A in alterno circuli segmento: *ex Theor. VI. lib. 2.* ergo ut A C ad C B in toto triangulo, ita eadem C B ad C D in triangulo minori

(a) Eucl lib. VI. prop. 31. (b) Eucl. lib. VI. prop. 35.
(c) Eucl. lib. III. prop. 36.

ri C B D: ergo *ex Theor. I. cor. 3.* quadratum mediae C B est aequale rectangulo ex prima, & ultima C A, & C D.

Coroll. I. Si circuli diameter sit aequalis tangenti B C; erit A C secta in D extremâ, ac media ratione; nam quadratum lineae A D, aequalis lineae B C, ex supositione, erit aequale rectangulo lineae A C, & D C, ex modò demonstratis. (a)

II. Et si ex linea B C, aequali circuli diametro secetur C F, aequalis lineae C D, erit etiam linea C B divisa extremâ, ac mediâ ratione in F: *juxta Probl. V.* Nam ex demonstratis, ut tota A C ad totam C B, ita pars A D ad partem C F, aequalem lineae C D: ergo *ex Axiom VII.* ita etiam erit reliqua D C (seu aequalis C F) ad reliquam F B.

THEOREMA IX. (Fig. 9.)

Quadratum lateris Trigoni, circulo inscripti, est triplum Quadrati ex semidiametro, seu latere Hexagoni. (b)

Dem. Quadratum Diametri est quadruplum quadrati ex semidiametro, seu latere hexagoni: quum quadrata sint in duplicata ratione laterum. Est etiam aequale quadratis laterum A M, M B propter angulum M in semicirculo rectum: ergo sublato quadrato lateris M B uno, remanet quadratum A M triplum.

Coroll. Quoniam verò quadratum A C B D, circulo inscriptum, est duplum quadrati ex semidiametro, propter angulum rectum in centro E; erit quadratum lateris trigoni ad quadratum, eidem circulo inscriptum, ut 3 ad 2, seu sexquialterum.

THEOREMA X. (Fig. 10.)

Si ejusdem circuli latus Decagoni, A B, & Hexagoni, A E, seu semidiametri in unam lineam, E B, componantur; erit tota linea, B E, secta in, A, extremâ, ac mediâ ratione. (c)

Praepar. Ducatur C A: eruntque tres lineae C B, C A, A E, ex suppositione aequales; & triangula E A C, B C A Isoscelia.

Dem. Quum arcus D A sit quadruplus, *ex suppositione*, arcus B A Decagoni, quintae semicirculi partis; & mensura anguli B in circumferentia sit medietas totius arcus D A, cui insistit; *ex Theor. II. lib.*

(a) Prop. 30. (b) Eucl. lib. XIII. prop. 13.
(c) Eucl. lib. XIII. prop. 9.

lib. 2. cor. 2. erit angulus B, vel et aequalis C A B, duplus anguli B C A, cujus mensura est quinta pars semicirculi: sed idem angulus CAB externus est duplus anguli E: ergo anguli E, & BCA sunt aequales: habent insuper Triangula ECB, & BCA angulum B communem; ergo aequiangula sunt, & proportionalia: ergo ut in toto triangulo E C B, est E B ad B C; ita eadem B C ad A B in triangulo minori A C B: sed A E facta est aequalis C B; ergo ut tota E B ad majus segmentum E A; ita eadem E A ad minus segmentum A B.

Coroll. Patet, quòd triangulum E C B etiam est Isosceles, & ejus ad basim anguli dupli sunt anguli ad verticem: quod triangulum si in circulo constituatur, & anguli ad basim bifariam dividantur, erit totus circulus in quinque partes aequales divisus, ad Pentagonum inscribendum.

THEOREMA XI. (Fig. 11.)

Quadratum lateris Pentagoni, A C, est aequale duobus simul Quadratis lateris, A B, Decagoni, & Hexagoni, F C. (a)

Praepar. Secetur arcus A C Pentagoni graduum 72 bifariam in B; ex quo arcus A B, B C Decagoni erunt singuli graduum 36. Tum ducatur perpendicularis F D, quae secet bifariam lineam, & arcum A B in D: ex quo arcus A D, B D erunt singuli graduum 18, & totus arcus C D graduum 54.

Dem. Quum totus angulus F Pentagoni sit graduum 72, & anguli F C A, F A C aequales dimidii graduum 108; residui ad duos rectos, erunt singuli graduum 54: quemadmodum etiam angulus E F C, cujus arcus D C est graduum 54: ergo quum duo Triangula A F C, & E F C habeant angulos E F C, & C A F aequales, necnon angulum C communem; erunt aequiangula, & proportionalia: ergo ut in majori triangulo est C A ad C F, ita in minori C E F est eadem C F ad C E: ergo Rectangulum, quod fit ex extremis C A C E est aequale Quadrato, quod fit ex media C F semidiametro, seu latere Hexagoni. *Ex Theor. I. cor. 3.*

Rursum quum D F sit perpendicularis ad A B, quam bifariam dividit, erunt *ex Theor. IV. lib. 1.* latera A E, E B aequalia, & angulus A B E aequalis angulo E A B, cui etiam, propter triangulum Isosceles A B C, est aequalis angulus B C A: ergo duo triangula A B C, & A E B etiam sunt aequiangula, & proportionalia: ergo ut tota A C ad A B, ita eadem A B ad A E: ergo rectangulum factum ex extremis A C, A E est aequale quadrato lateris A B Decagoni. Atqui duo rectangula ex tota A C, & singulis ejus partibus sunt aequalia quadrato totius A C: *ex Theor. X. lib. I. cor. 1.* ergo quadratum lateris Pentagoni A C est aequale quadratis laterum Hexagoni A F, & Decagoni A B.

(a) Eucl. lib. XIII. prop. 10.

Coroll. Ex quo sequitur, quòd si disponantur ad angulum rectum latus Hexagoni, seu semidiameter, & latus Decagoni; linea, subtendens angulum rectum, erit latus Pentagoni, eidem circulo inscribendi.

THEOREMA XII. (Fig. 12.)

Anguli, & sectores in eodem, aut aequalibus circulis, sunt inter se ut arcus, quibus insistunt. (a)

Dem. Si arcus C G est aequalis arcui G D, erit angulus C B G aequalis angulo G B D: *ex definit. anguli lib. 1.* ergo totus sector C B G, superpositus, congruet sectori G B D, eritque ei aequalis. Similiter si arcus C G est duplus arcus C P, erit angulus, & sector C B G duplus sectoris C B P, & ejusdem triplus C B M, & C B D quadruplus: ergo semper anguli, & sectores habent eandem rationem, ac arcus ejusdem, aut aequalium circulorum.

Coroll. I. Etiam anguli ad circumferentiam in eodem, aut aequalibus circuli habent eamdem rationem, ac arcus, quibus insistunt; quia sunt dimidii angulorum ad centrum. *Ex Theor. II. lib. II. & hujus lib. Axiomate V.*

II. Circumferentiae, Chordae, & Arcus, sunt inter se, ut radii. Nam sint arcus C D, F E similes; ex. gr. sexta pars circuli: quum angulus B sit communis, & latera C B, D B aequalia, sicut etiam aequalia F B, E B: erunt similia triangula, F B E, C B D: *ex Theor. III. cor. 2.* ergo chorda C D ad chordam F E erit, sicut radius C B ad radium F B: & dividendo aequaliter arcus in G, & H, erit C G ad F H, ut C B ab F B: & continuando bissectionem, erit C P ad F R, ut C B ad F B: sed eaqualibus arcubus aequales chordae correspondent; *ex Theor. IV. lib. 2.* ergo arcus etiam habent eamdem rationem radiorum; & omnes simul, hoc est circumferentiae, se habent, ut radii.

III. Figurae similes, circulo inscriptae, habent inter se rationem duplicatam radiorum. Nam sint F E, C D latera homologa in similibus figuris, circulo inscriptis: istae habent rationem duplicatam lateris F E ad C D: ergo quum F E ad C D sit ut radius F B ad radium B C, *ex antecedente Coroll.* habebunt singula Triangula, & totae figurae, circulo inscriptae, rationem duplicatam radiorum F B, C B. (b)

Ex IV.

(a) Eucl. lib. VI. prop. 33. (b) Eucl. lib. XII. prop. 1.

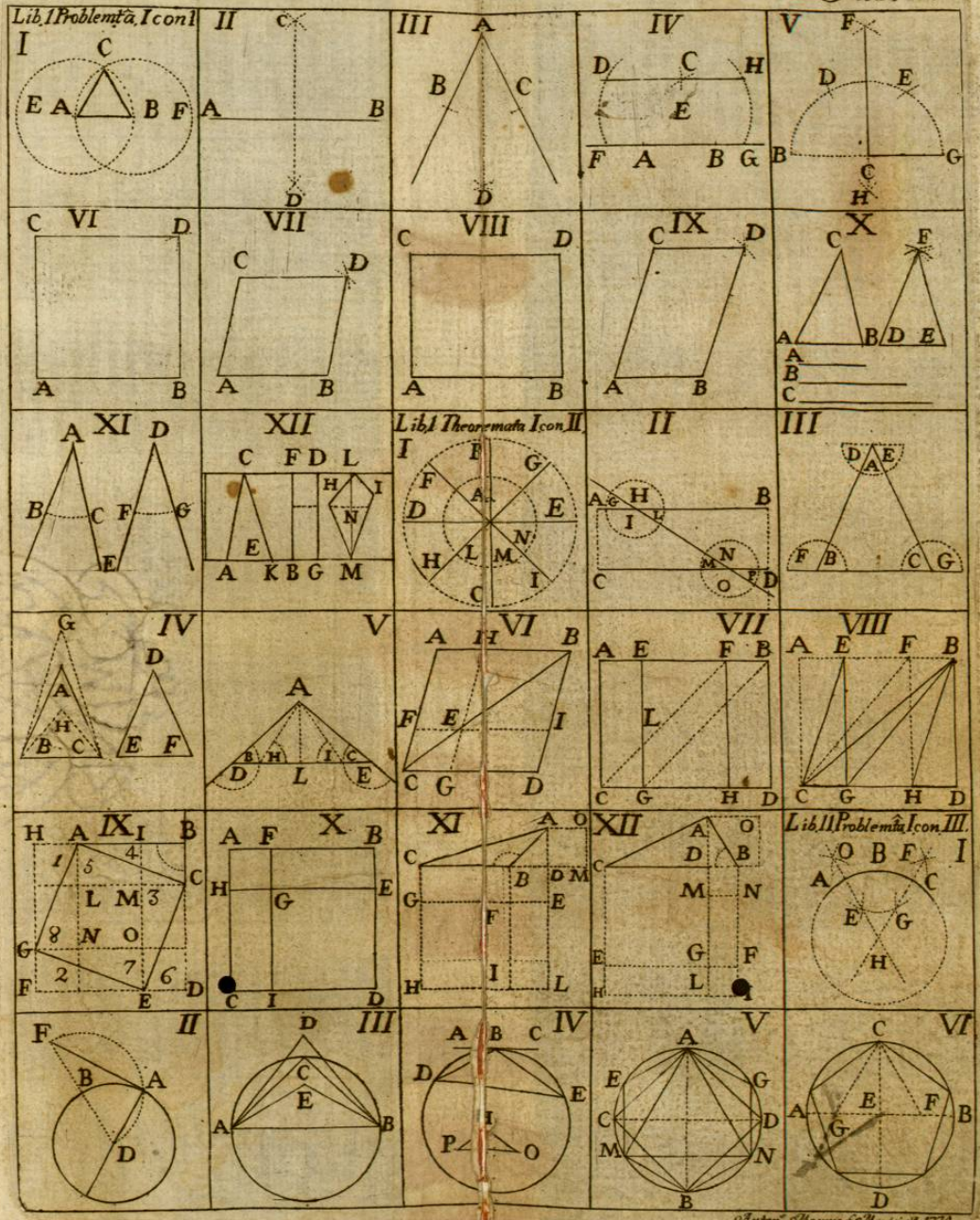
IV. Etiam circuli habent duplicatam proportionem radiorum; nam Triangula B C D, & C F E habent duplicatam proportionem radiorum C B, & F B; *ex Coroll. antecedente.* Bissecentur arcus in C, & H. Etiam similia Triangula inscripta C B G, & F B H, habebunt duplicatam radiorum. Similiter facta iterum bissectione in P, & R, M, & N; omnia similia triangula, circulo inscripta, habebunt duplicatam proportionem radiorum: *ex antecedente Coroll.* sed circuli sunt aequales toti summae triangulorum, quae possunt iisdem inscribi: (nam si superesset in circulo spatium; facta bissectione arcus, posset aliud triangulum inscribi: adeoque non intelligeretur inscripta summa omnium triangulorum, contra hypothesim) ergo circuli sunt inter se in duplicata ratione suorum radiorum. *Unde quaecumque dicta sunt in Corollariis Theor. VI. de similibus rectilineis, etiam debent circulis adplicari.* (a)

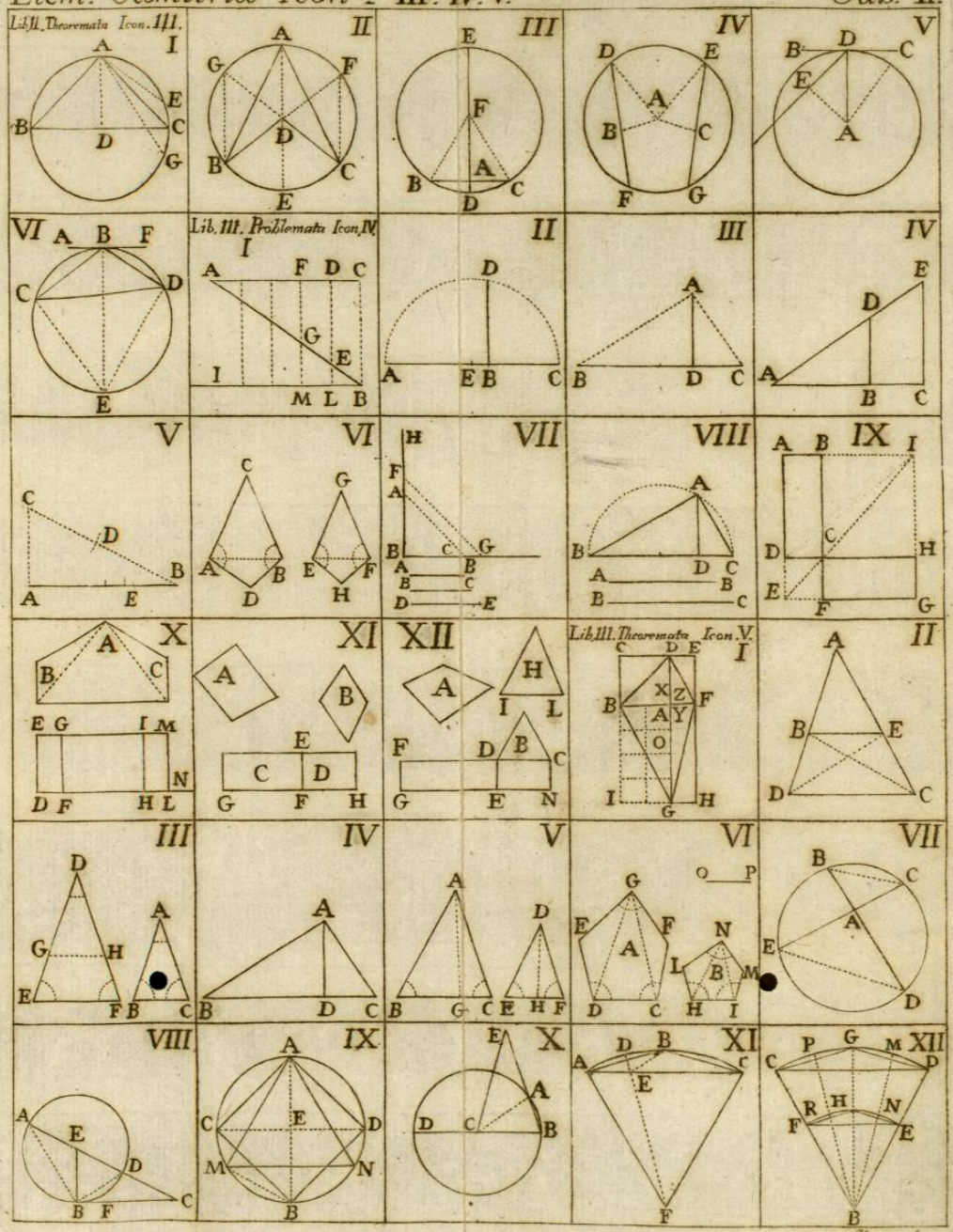
Quemadmodum autem Superficies, quae constant ex duplici dimensione, latitudine scilicet, & longitudine, si similes sint, habent duplicatam proportionem Diametrorum, seu laterum homologorum; ita eorumdem habent triplicatam proportionem corpora similia; ut duae integrae sphaerae; quum fiant ex triplici dimensione, latitudine nimirum, longitudine, & profunditate. Ex, gr. Si Diameter terrae sit quadrupla Diametri Lunaris, erit superficies Terrae quater quadrupla, hoc est sexdecupla superficiei Lunaris: & totum corpus Terraqueum erit quater sexdecuplum, hoc est sexagies, & quater Majus corpore Lunari. Similiter quum Veneris diameter adpareat decima pars diametri Solaris, ejus circulus adparens erit centesima pars totius circuli Solaris; adeoque ubi Venus inter nos, & Solem interponatur, quasi macula in Sole adparebit. Atque haec qui noverit, aditum habet ad naturales omnes disciplinas apertissimum.

EXPLICATIO SIGNORUM
Algebricorum queis utimur in Physica.

+ Significat	plus.
—	minus.
=	aequalis.
×	multiplicando.
A > B.	majorem esse A quàm B.
A < B.	minorem esse A quàm B.

(a) Prop. 1.


Lib. I Problemta. I con I
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
Lib. I Theoremata I con II
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
Lib. II Problemta I con III
I
II
III
IV
V
VI
Anton. Morena f. Mediolani 1774


Lib. II. Theoremata Icon. III.
Lib. III. Problemata Icon. IV.
Lib. III. Theoremata Icon. V.
e Moreno fc.