

ticas (en mecánica y astronomía, aplicación de las matemáticas) es la esencia del procedimiento, del discurso, de la investigación.

24. Ella, la matemática, comenzó por abstraer de todos los seres y de todos los movimientos la propiedad, el atributo de *cantidad*; prescindió del color, del sabor, del peso, de toda otra manifestación externa ó exterior de los seres y consideró únicamente su extensión y su cantidad, y expresó esa abstracción por números; y con los simples números, signos convencionales de esa abstracción, representante de la idea de cantidad y de la idea de aumento y disminución, de la idea de sucesión en el tiempo y en el espacio, pudo concebir, llegó á imaginarse ideas tan abstractas como la de millones, billones y

siderado desde el principio. De la idea de estas tres extensiones ilimitadas sacais por abstracción la idea de una extensión ilimitada cualquiera. Ahora teneis ya la idea general de extensión y por abstracción también, descubris lo que ella contiene. Lo que ella contiene es la siguiente ley: *toda extensión limitada puede ser continuada por una segunda extensión limitada*. Analizais esta idea y encontráis que la segunda extensión tiene la misma definición que la primera, y que por lo tanto, está sometida á la misma ley, y que por consiguiente, ella misma engendra una nueva extensión y lo mismo en adelante. Observais que si en un lugar cualquiera este crecimiento no pareciese posible, la ley sería contradicha; y desde luego teneis la idea de espacio infinito, puesto que teneis la idea de una extensión abstracta y puramente posible, es decir, del espacio; y puesto que habeis descubierto en esa idea la ley generatriz de la infinitud y en esta ley la imposibilidad de la limitación. Contad ahora vuestros pasos. Habeis empleado la experiencia de los sentidos ó de la conciencia para formar la idea de un objeto real extenso, habeis empleado la abstracción para aislar esta extensión y considerar puramente á ella; habeis empleado el análisis ó abstracción para descubrir en ella la semejanza absoluta de todas las partes, y la propiedad que posee una parte de ser continuada por su vecina; habeis formado así la idea general de una parte cualquiera. Analizando esta idea habeis deducido la ley en cuestión. Reconoced, pues, aquí por la observación, como hace poco, por el razonamiento, que bastan la experiencia y la abstracción para producir la idea de espacio infinito." (Taine. *Les Philosophes Classiques du XIX Siecle.*)

trillones de unidades, siendo así que nunca sus sentidos ni su imaginación, nunca pueden representarse esa multiplicidad de unidades; y por medio de esos signos representantes de esa abstracción pudo descubrir y descubrió el cálculo aritmético, es decir, la manera de conocer las cantidades. Inventó un lenguaje que representando exactamente la realidad que había abstraído, la realidad de aumento y disminución de espacios ó cantidades, pudo operar sobre esos signos con mayor seguridad y certidumbre que sobre las cantidades reales y materiales, porque éstas se escapan al dominio de los sentidos, mientras que su representación abstracta por signos queda bajo el imperio de la inteligencia (1), del mismo modo que

(1) Es hoy una verdad, y lo es sobre todo en matemáticas, que el silogismo no es prueba en el sentido de que no aumenta el catálogo de hechos reales conocidos, pues no hace más que afirmar en la conclusión una afirmación que ya estaba en la mayor. (Véase Nardeau, *Degenerescence*, tomo I, pág. 123; pero véase también Funt Bretano, *Science Sociale*, págs. 8 y 130 á 136). Ahora bien, las matemáticas, ciencia esencialmente deductiva, se forma de puros silogismos y éstos no son otra cosa que una forma de expresión de un mismo hecho, que su repetición en términos más precisos: cuando yo digo que *esta flor es vegetal*, porque todas las flores son vegetales, no hago otra cosa que repetir la misma afirmación de que todas las flores son vegetales refiriéndome al *vegetal-flor* que tengo á la vista. De aquí nace, en mi concepto, la inconcebibilidad de la negación de las verdades matemáticas. En ellas, á diferencia de lo que pasa en todas las otras ciencias, no se trata de varios hechos, de varias verdades, de varios fenómenos, pudiendo afirmarse uno y negarse otro, pudiendo concebirse que el uno existe y el otro no existe; se trata de un hecho único y ese único y simple es la existencia de una *extensión*, y esa extensión *existe ó no existe*, y el espíritu humano no puede concebir la existencia y no existencia á la vez; de manera que el principio llamado de contradicción es la sola causa de la necesidad de las verdades matemáticas, y el principio de contradicción no es otra cosa que la imposibilidad de que no exista el que existe, el que piensa, el que *afirma* algo. Expliquémonos: Los metafísicos establecen grande abismo entre las verdades físicas y las matemáticas, diferencia que ha formulado muy elegantemente Freycinet en la obra citada: "Nadie, á mi ver, dice, colocará las verdades físicas en el mis-

el lenguaje del discurso nos sirve para representar los fenómenos de la naturaleza y sus causas, sin necesidad de manipular sobre los seres materiales.

25. Pero la matemática no se detiene en abstracciones numéricas, sino que una vez en posesión de la idea abstracta de cantidad sigue abstrayendo y representando por signos abstracciones más abstractas, si es permitida mo rango que las leyes matemáticas; nadie puede sostener que la relación entre la masa y la fuerza sea del mismo orden que la relación entre el radio y el círculo; esta última relación es extraña á las realidades materiales. No podemos concebirla diferentemente bajo pena de trastornar las bases de la razón y de abolir todas las reglas de la lógica. Pero ¿en qué serían éstas atacadas si la fuerza imprimiera á la masa una velocidad diferente de aquella que nos revela hoy . . . ? En resumen, las leyes de la naturaleza no tienen á nuestros ojos el mismo carácter que las leyes matemáticas, pues en éstas no podemos ni si quiera concebir la menor alteración . . . El orden matemático no puede cambiar jamás; el orden físico está sujeto á cambio; pero sus mismos cambios están sujetos á leyes fijas, y lo que se nos escapa es el hecho superior de que estos cambios proceden." Pues bien, á pesar de estas observaciones, diremos que la necesidad lógica de las verdades matemáticas consiste en que ellas se limitan á afirmar un sólo hecho simple é indiscutible: la existencia de determinada extensión ó de determinado tiempo, y no es posible que exista y no exista á la vez la extensión que se afirma ó supone en toda ecuación matemática. Efectivamente, todo problema de cantidad, esto es, matemático, no es otra cosa que una afirmación repetida en varias formas y por medio de signos de la misma y única verdad: la existencia de tal cantidad. Cuando yo designo con el signo 6 á 6 unidades de terreno, seis lotes de una extensión determinada, de una hectárea, por ejemplo, tengo idea material de esos lotes; y cuando digo que $6 \times 6 = 36$, no hago otra cosa que abreviar por medio de esos signos, después de haber abreviado por medio del lenguaje este hecho: que $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$ á $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$, sino que en lugar de repetir esos signos, ó de repetir esa expresión gramatical, les llamo 36, y este signo 36 abrevia y reúne la misma afirmación que expresa la repetición 6 veces de 6 lotes. Lo mismo sucede en geometría. Cuando yo digo que los radios de un círculo son iguales, no hago otra cosa que afirmar ó repetir la misma afirmación contenida en la definición de círculo, dado que por círculo se entiende una curva rentrante y equidistante de un centro, y decir equidistante, es decir, que todas las líneas deben ser iguales. Pero las matemáticas no solamente discurren sobre abstracciones representadas por signos, sino

la frase, abstracciones de abstracciones. Después de haber abstraído la noción de cantidad por signos numéricos en aritmética, pasa á abstraer en álgebra, no ya las cantidades y sus relaciones de aumento y disminución, sino las funciones de las cantidades, esto es, si operan en pro ó en contra de la cantidad buscada y de qué manera, en qué grado de cantidad operan, por suma, resta, división, multiplicación, raíz, potencia, logaritmo; des- sobre abstracciones de abstracciones representadas por signos, llevando la abstracción hasta un grado inconcebible. El signo 60 representa sesenta unidades abstractas; pero el signo 60^2 representa la abstracción de multiplicar esas 60 unidades por sí mismas; pero el signo x representa una cantidad cualquiera; pero el signo $-$ se representa como interviene, como funciona esa cantidad en un cálculo, favorable ó desfavorablemente; pero el signo \sqrt{x} representa la abstracción de que una cantidad funcione en su raíz cuadrada. Y luego los signos de más, menos, potencia, raíz, logaritmo, infinito, ecuación, representan abstracciones cada vez más elevadas; pero esas abstracciones en último resultado expresan identidad de cantidades, esto es, que si pudiéramos tomar matemáticamente pedazos de espacios ó extensiones reales y positivas é hiciéramos en ellas lo que hacemos con sus representantes, con los signos que representan la abstracción de esas operaciones de aumento y disminución, el resultado sería infalible, porque no se trata sino de afirmar ó negar la existencia de más ó menos extensión, y como una cosa no puede á la vez existir y no existir, esa imposibilidad es la que traducimos en el lenguaje matemático por signos. He aquí el por qué de la necesidad de las verdades matemáticas: *to be or no to be*.

"La idea de causa, dice Freycinet, no puede ser invocada directamente en geometría," y nosotros aceptamos que las matemáticas no tratan de relaciones de causas, sino de relaciones de identidad; sin embargo, nadie puede asegurar que sea puramente abstracción concebir la línea como engendrada por el punto, la supercie por la línea, etc.; y si no es pura abstracción, sino que el espacio no es otra cosa que el producto de puntos y líneas, entonces las matemáticas serían la expresión de la esencia y no de las formas de las cosas en cuanto á cantidad.

Véase en la curiosísima y profundamente analítica obra de Gaston Paris, *Métrique Naturelle du Langage*, las conclusiones á que llega respecto de las ideas de tiempo y espacio, diciendo que: *La idea abstracta de espacio es la síntesis indefinida de fenómenos posibles; y la idea abstracta de tiempo es el análisis indefinido de fenómenos posibles.*

pués avanza á mayores abstracciones, pues á primera vista no hay relación aparente entre las magnitudes algebraicas y las magnitudes geométricas, siendo las primeras cifras y las segundas extensiones; pero Descartes, descubriendo esta relación, creó la geometría analítica.» En álgebra para hacer abstracción de valores numéricos se representan las cantidades por letras; y así también, para hacer *abstracción de la figura* y evitar pintarla, se considera su relación con *otra figura*, eligiéndose una muy simple; y en lugar de examinar las relaciones intrínsecas, lo que obliga á determinarlas, se examinará la relación de sus elementos con elementos extrínsecos arbitrariamente definidos. Descartes fué el primero que por la distancia de los ejes rectangulares determinó la posición de todos los puntos de una figura; y en este método se pide al álgebra un procedimiento de generalización que no existe en la geometría pura.»

26. Por último, inventa el prodigioso método llamado cálculo integral y diferencial y cálculo infinitesimal, ese prodigio por el cual somete á ecuaciones de signos los movimientos de los astros y los mundos; y para ello le basta un símbolo, el símbolo del infinito. «Este símbolo, dice Freycinet, no representa ordinariamente en la álgebra elemental sino la forma de una cantidad finita dividida por cero. ¿Pero cuál puede ser el sentido de semejante invitación? ¿Es posible dividir un número por cero? ¿Cómo servirse de un divisor que no existe? Evidentemente esa operación es irrealizable y la conclusión debía ser que el problema propuesto no comporta solución razonable. Pero el geómetra no se deja detener aquí; él hace la siguiente observación. Mientras más el divisor disminuye, más el cociente aumenta; si el divisor cae más abajo de todo grado de pequeñez, el cociente se eleva más arriba de todo grado de grandeza; luego esa

fracción con su carácter particular significa que ninguna cantidad finita responde al problema. ¿Qué consecuencia sacar en la práctica? Aquí está el abismo que debe franquearse, y el geómetra lo franquea con seguridad ayudado por la noción preexistente del infinito, de la que se ampara y de la cual dispone. Querría, por ejemplo, saber á qué distancia una perpendicular á una recta es encontrada por una oblicua á esta misma recta; la distancia le es indicada por una fracción de divisor nulo, y concluye entonces diciendo que las dos líneas no se encontrarán ó que son paralelas, porque el paralelismo es la sola condición que permite decir que el punto de encuentro está situado en el infinito. Valoriza la longitud comprendida entre los dos focos de una elipse y tropieza con el mismo signo; infiere, pues, que la pretendida elipse posee un sólo foco y que es en realidad una parábola. Calcula el número de lados de un polígono y encuentra la misma fracción; deduce, pues, que el pretendido polígono es una curva, porque sólo de ella podía decir que el número de lados es infinito. En estos problemas y en otros aún la situación es la misma; en cierto momento el geómetra está en presencia de un indefinido creciente desprovisto en sí mismo de todo sentido y del cual nada puede deducir; no aborda un terreno firme, no llega á una conclusión aceptable, sino desembarándose de ese *indefinido* y franqueando el abismo del infinito. Llegado á estas cimas recibe nuevas claridades, descubre un sentido á cosas que le parecieron desnudas de sentido, se transporta, si puedo explicarme así, al otro extremo de los problemas y abraza á todos los horizontes. El signo *cero* representa una cantidad que se desvanece (*evanuisant*); pero no representa la nada, se codea con ella simplemente; y este procedimiento no ha entrado verdaderamente al dominio público, sino el día

en que se ha admitido: que las curvas son compuestas de una infinidad de líneas rectas, infinitamente pequeñas ó de *elementos* rectilíneos; que el movimiento variado es compuesto de una infinidad de movimientos uniformes infinitamente cortos, ó de *elementos* uniformes; que una superficie curva está compuesta de una infinidad de superficies infinitamente pequeñas ó de *elementos* planos; que el enfriamiento de los cuerpos se opera por una sucesión de enfriamientos *elementales* durante cada uno de los cuales la velocidad permanece constante. En una palabra, las magnitudes de todá naturaleza han sido descompuestas idealmente en elementos más simples, entre los cuales se hace posible, en razón de esta misma simplicidad, establecer relaciones que se escapan cuando quiere adquirírselas directamente sobre elementos reales. La descomposición de la magnitud continúa en una multitud de pequeñas partes, especie de escala cuyos escalones se hacen cada vez menos y menos distantes, es la mejor representación á nuestros ojos del fenómeno del crecimiento y decrecimiento. Sin duda tenemos la idea de la variación continua; pero no tenemos la *imagen*, y estamos obligados á volver siempre á pequeños saltos sucesivos. El análisis infinitesimal es un procedimiento indirecto (*detournée*), artificial, pues no es el camino directo pasar por un objeto extraño á la cuestión para llegar á la determinación de la que nos interesa; pero, ¿cómo evitarlo? Este procedimiento nos es impuesto por la enfermedad de nuestro espíritu que no es capaz de percibir directamente las propiedades de todas las cosas (1).

(1) Casi todas las ciencias proceden por caminos indirectos. ¿Cómo comprueba la patología y la terapéutica que el fierro mineral no es absorbido por el organismo y sí lo es el fierro *orgánico*? Es analizando químicamente las deyecciones para comprobar la presencia del fierro inalterable que se ingirió en el organismo; porque no pudiendo ver el efecto fisiológico directamente, tenemos que verlo por medios indirectos.

¿Es culpa de los métodos si nosotros no percibimos por un simple golpe de vista la relación entre la superficie de un círculo y un radio, como percibimos la relación entre la superficie de un rectángulo y sus radios?»

27. Armada la matemática con todas estas abstracciones representadas por signos, los cuales representan la realidad de las adiciones, subtracciones, fracciones de cantidad, coordenadas geométricas, descomposición elemental de todas las magnitudes del espacio, del tiempo, del movimiento; armada la matemática con esos signos, con esos símbolos de lo finito y de lo infinito, de la realidad y de su composición, penetra en los abismos siderales y crea la mecánica celeste, la astronomía, midiendo la trayectoria de los mundos, pesando las masas de los astros, calculando sus órbitas y descubriendo las leyes que rigen los impulsos ó movimientos de todos los cuerpos celestes. ¡El universo entero queda explicado matemáticamente por tres leyes! (1)

Según Funt-Brentano (*Science Sociale*), el método científico se reduce á buscar un *común denominador* á hechos ó fenómenos diversos, y cuando las ciencias naturales y sociales lleguen á la perfección que tienen las matemáticas en tener *comunes denominadores*, tendrán la precisión de ellas. Así todo el prodigio del cálculo infinitesimal consiste en que Leibniz y Newton percibieron las relaciones entre cantidades determinadas y cantidades indeterminadas, reduciéndolas á un común denominador. El mismo autor cree haber descubierto el común denominador *económico* del capital y el trabajo en la *circulación de valores*.

Vease en Goblot, *Clasificación des sciences*, los progresos de las matemáticas posteriores á Descartes y los bellísimos problemas que han sido atacados ó resueltos por Desargues, contemporáneo y amigo de Descartes, por Pascal, Carnot, Monge, Poncelet y Charles, que han intentado llegar á las generalizaciones de la *analítica* sin el método cartesiano y por los recursos propios de la geometría, valiéndose de las *propiedades proyectivas* y del principio de *dualidad*.

(1) La ley de la igualdad entre la acción y la reacción debida á Newton enseña que en la naturaleza las *acciones son siempre iguales dos á dos y de sentido contrario*. Newton comprobó este principio sobre todos los movimientos de los cuerpos celestes conocidos en su tiempo, no habiéndose encontrado posteriormente derogación alguna á esta ley; los diferentes cuerpos de nuestro sistema desde el sol hasta el último asteroide se influyen

28. ¡Esto es la ciencia matemática! Ella ha sorprendido la mecánica de las estrellas y de las nebulosas, ha encontrado las leyes que rigen el curso de los mundos (1), ha medido sus trayectorias, ha penetrado en la constitución química de los astros y ha comprobado la unidad del cosmos, es decir, la unidad de fuerzas y leyes que actúan lo mismo en el astro que en la celdilla cerebral.

§ III

FÍSICA.

29. El espacio y el tiempo dieron al humano espíritu la noción de cantidad, y esa noción la hizo tan fecunda que pudo subir por ella al infinito y medir el curso de los astros, sus masas y sus pesos; pero en el curso del espacio y del tiempo se presentan á la vista del hombre dos co-

dos á dos, con igual energía y en direcciones opuestas; y las recientes observaciones hechas en los movimientos de estrellas dobles ó triples conducen á pensar que la misma ley preside á la evolución de los astros lejanos. La segunda ley formulada por Képler, llamada ley de inercia y que más bien debía llamarse ley de la conservación del movimiento (pues nada hay inerte en la naturaleza), enseña que *cuando un cuerpo posee cierta velocidad la guarda sin alteración indefinidamente, si alguna fuerza exterior no obra sobre él*. La tercera ley descubierta por Galileo es la de la *independencia del movimiento* y puede fomentarse así. Los movimientos particulares de que están dotados los diversos cuerpos, los unos con relación á los otros, no son afectados si se imprimen á todos los cuerpos un movimiento común consistente en describir en el mismo tiempo rectas iguales y paralelas. Recíprocamente, si el movimiento común existía ya y si se llega á suprimirlo, los movimientos particulares no serán alterados. En otros términos, el movimiento común y los movimientos particulares se hallan en estado de mutua independencia. (Freycinet. op. cit.)

(1) Por la observación de las estrellas dobles se ha comprobado que están sujetas á la misma ley de gravitación que nuestro sistema planetario.

sas accesibles á los sentidos, perfectamente distintas y que constituyen todo el universo conocido, todo lo cognoscible, lo único cognoscible: la *materia* y la *fuerza*.

30. Y el hombre se puso á estudiar la materia y la fuerza, como había estudiado el tiempo, el espacio y la cantidad; y comenzó á descomponer, á dividir, á analizar la materia y la fuerza existentes en la embrollada é infinita variedad de seres que forman el universo, desde el astro apenas perceptible por su inmensurable distancia, hasta el infusorio que se escapa á las miradas por su infinita tenuidad; desde el gigantesco y mesurado movimiento de los soles hasta el perpetuo y rápido hormigueo de las arenas; y comenzó por hacer la primera clasificación de la materia y de la fuerza, dividiendo á todos los seres materiales en fluidos, líquidos, sólidos, y éstos en minerales, vegetales y animales, y dividiendo las fuerzas en mecánicas, acústicas, térmicas ó de calor, ópticas ó lumínicas y electro-magnéticas, constituyendo así la *Ciencia Física*. Y caminando de investigación en investigación, de observación en observación, de casos particulares á casos más generales y de éstos á otros universales, llegó á sorprender el orden, la ley, la uniformidad con que actúan sobre la materia ó *por medio de ella* esas cinco fuerzas desconocidas; y descubrió la ley de la gravitación ó de la atracción de los cuerpos en razón directa de sus masas é inversa del cuadrado de las distancias, y abordó el problema dinámico de conocer ó medir la cantidad de movimiento por el conocimiento de la cantidad de fuerza y de masa, y recíprocamente, deducir las fuerzas del conocimiento de las masas y sus movimientos, ya se trate de los fenómenos que pasan en nuestro planeta, ya de los que se realizan en el mundo sideral; y pesó y midió la fuerza de los gases y su electricidad. Descubrió las leyes del sonido, midió las vibra-