ma idea, sino de la simple suposicion de que existe algo.

4 ° Este conocimiento no ha menester ninguna experiencia; le basta el órden lógico de las ideas, que por necesidad ofrece su experiencia al entendimiento: no es necesario que exista el mundo; basta que exista el ser que piensa, ó su simple percepcion, ó su idea; basta en una palabra todo lo que no sea un puro nada. Lo absolutamente necesario no puede tener ninguna mudanza. Hay en él algo necesario como se supone; luego todo lo que en sí es y tiene, es inmutable. Siendo libre, todas sus determinaciones estarán tomadas de toda la eternidad. La mudanza en lo necesario no puede salir de él mismo; porque siendo necesario no hay ninguna razon suficiente para que se mude. Lo que es, por intrínseca necesidad; ¿de dónde saldrá la mudanza? ¿Por qué no conservan el estado primitivo incondicional, necesario?

Si tuviese sucesion de modificaciones, la sucesion seria necesaria, luego eterna; luego sin primera; luego una serie infinita en acto; y esto no es posible, porque nunca habrian llegado á una dada, pues para esto se debia agotar lo inagotable.

Si lo necesario no fuese infinitamente perfecto, no seria perfectible por ser inmutable; luego seria de peor condicion que lo contingente dotado de perfectibilidad.

Si lo necesario se mudare, los nuevos estados en que se hallare debian emanar de él mismo; luego todo lo que ellos encerrasen de ser, de perfeccion, debia tenerlo antes de la mudanza. Y entonces ¿á qué mudarse?

Si se suponen muchos seres necesarios y se quiere explicar la mudanza de ellos por la accion recíproca, tampoco se adelanta nada. Tomados en su conjunto, ¿han tenido un estado primitivo? Si no lo han tenido, menos en la serie infinita; si lo han tenido era necesario y no ha podido alterarse.

La existencia del ser necesario excluye la *no* existencia, y esta es absurda; luego un estado de él excluye su *no* estado, y este es absurdo: es así que no puede mudarse sin pasar del estado al *no* estado; luego cuando se le exige mudanza, se le exige un absurdo.

Todo cuanto somos y vemos se muda; luego nada de esto es necesario.

Hay en el orígen de las cosas una voluntad libre.
Teoría de las combinaciones. N. B.
Si hay causalidad secundaria. Influjo físico.
Toda la realidad del efecto ha de estar virtual *in causa*.

EL TIEMPO.

A produce, B ¿qué significa? ¿relacion? ¿condicion? Si A es, B ¿será? No.

Si B es, ¿A fué? no; precedencia. (Otras relaciones de condicion.)

¿Qué es la relacion? ¿Si pienso B, piensa A?

Nota del Editor.—No es muy fácil el interpretar la mente del autor en los puntes de esta página; sin embargo, nos ha parecido que lo mas conveniente ra dejarlos como se encuentran en el manuscrito original.

COLECCION

De fórmulas trigonométricas de las cuales parece se servia D. Jaime Balmes para ampliar sus explicaciones sobre Vallejo.

Trigonometría rectilínea.

1. Sen. $A = \frac{1}{2}$ cuerda 2 A.
2. Sen. $30° = \frac{1}{2}$ R; si $R = 1$, sen. $30° = \frac{1}{2}$.
3. Tan. $45° = R$; si $R = 1$, tan. $45° = 1$.

4. (a) $\text{Sen.}^2 A + \cos.^2 A = R^2$, $\sqrt{\text{sen.}^2 A + \cos.^2 A} = R$. (d).

(b) $\text{Sen.}^2 A = R^2 - \cos.^2 A$, sen. $A = \sqrt{R^2 - \cos.^2 A}$ (e).

(c) $\text{Cos.}^2 A = R^2 - \text{sen.}^2 A$, cos. $A = \sqrt{R^2 - \text{sen.}^2 A}$ (f).
Si $R = 1$.

(a) $\text{Sen.}^2 A + \cos.^2 A = 1$, $\sqrt{\text{sen.}^2 A + \cos.^2 A} = 1$ (d).

(b) $\text{Sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A$, sen. $A = \sqrt{1 - \cos.^2 A}$ (e).

(c) $\text{Cos.}^2 A = 1 - \text{sen.}^2 A$, cos. $A = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}$ (f).
5. Cos. A : R :: sen. A : tan. A :: R : sec. A (a).
Sen. A : R :: cos A : cot. A :: R : cosec. A (b).

$$\text{Tan. } A = \frac{R \text{ sen. } A}{\text{cos. } A} \text{ (c); sec. } A = \frac{R^2}{\text{cos. } A} \text{ (d).}$$

$$\text{Cot. } A = \frac{R \text{ cos. } A}{\text{sen. } A} \text{ (e); cosec. } A = \frac{R^2}{\text{sen. } A} \text{ (f).}$$

Si R=1.

$$\text{Tan. } A = \frac{\text{sen. } A}{\text{cos. } A} \text{ (c'); sec. } A = \frac{1}{\text{cos. } A} \text{ (d').}$$

$$\text{Cot. } A = \frac{\text{cos. } A}{\text{sen. } A} \text{ (e'), cosec. } A = \frac{1}{\text{sen. } A} \text{ (f').}$$

6. $$\text{Sen. } A = \frac{\text{Tan. } A + R}{\sqrt{\text{Tan.}^2 A + R^2}} \text{ (p).}$$

$$\text{Cos. } A = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \text{tan.}^2 A}} \text{ (g).}$$

Dem.

La fórmula (d) del § 5 da; $\text{cos.}^2 A = \frac{R^2}{\text{sec.}^2 A}$ (n). y como el triángulo rectángulo da $\text{sec.}^2 A = R^2 + \text{tan.}^2 A$, sustituyendo en (n) el valor de $\text{sec.}^2 A$, tendremos; $\text{cos.}^2 A = \frac{R.^2}{R^2 + \text{tan.}^2 A}$, y extrayendo la raíz de ambos miembros saldrá la ecuacion (g). Además la fórmula (c) del § 5 da, $\text{sen.}^2 A = \frac{\text{tan. } A \text{ cos. } A}{R} = \frac{\text{tan. } A}{R} + \text{cos. } A$, sustituyendo en esta el valor (g) de cos. A. será; $\text{sen. } A = \frac{\text{tan. } A}{R} \div \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \text{tan.}^2 A}} = \frac{\text{tan. } A. R}{\sqrt{\text{tan.}^2 A + R^2}}$ que es la misma ecuacion (p). L. Q. D. D.

Si hacemos R=1, será; $\text{sen. } A = \frac{\text{tan. } A}{\sqrt{\text{tan.}^2 A \div 1}}$ (p'); $\text{cos. } A = \frac{1}{\sqrt{1 \div \text{tan.}^2 A}}$ (g')

7. $\text{Sec. } A = \sqrt{R^2 \div \text{tan.}^2 A}$ (a); esta fórmula la da el triángulo rectángulo.

$$\text{Cosec. } A = \frac{R}{\text{tan. } A} \div \sqrt{R^2 \div \text{tan.}^2 A} \text{ (b).}$$

Dem.

La fórmula (f) del § 5, da $\text{cosec. } A = \frac{R^2}{\text{sen. } A}$ sustituyendo en esta el valor (p) de sen. A; tendremos $\text{cosec. } A = R^2 : \frac{\text{tan. } A. \times R}{\sqrt{\text{tan.}^2 A + R^2}} = \frac{R\sqrt{R^2 + \text{tan.}^2 A}}{\text{tan. } A}$ que es la misma ecuacion (b) L. Q. D. D.

$$\text{Cot. } A = \frac{R^2}{\text{tan. } A} \text{ (c)}$$

Dem.

La fórmula (e) del § 5, da; $\text{cot. } A = R \times \frac{\text{cos. } A}{\text{sen. } A}$; sustituyendo en esta los valores (g) y (p) de cos, A, y sen. A. del § 6, será; $\text{Cot. } A = R \times \frac{\frac{R^2}{\sqrt{\text{tan.}^2 A + R^2}}}{\frac{\text{tan. } A. \times R}{\sqrt{\text{tan.}^2 A + R^2}}}$ y ejecutando la operacion y simplificando saldrá la fórmula (c).

Si hacemos R = 1; será $\text{Sec. } A = \sqrt{1 + \text{tan.}^2 A}$ (a').

$$\text{Cosec. } A = \frac{1}{\text{tan. } A.} \times \sqrt{1 + \text{tan.}^2 A} \text{ (b')}$$

$$\text{Cot } A = \frac{1}{\text{tan. } A} \text{ (c').}$$

8. Sen. (n*—A) = sen. A (a); sen. ($\frac{1}{2}$ n — A) = cos. A (b); sen. ($\frac{1}{2}$ n + A) cos. A. (c).

Cos. (n — A) = — cos. A (d); tan. (n — A) = — tan. A (e); sec. (n — A) = — sec. A (f).

Cot. (n — A) = — cot. A (g); cosec. (n — A)= cosec. A (h).

Sen. (A — 90)= — cos. A; (l).

Cos. (A — 90) = sen. A; (m).

9. n = 180.

A=0; sen. A=0; cos. A=1; tan. A=0; sec. A=1; cot. A= ∞; cosec. A = ∞ (a).

---

* *Usamos este signo en lugar del propio, que es este* ⊓ *por carecer de él en la imprenta.*—NOTA DEL EDITOR.

$0 < A < \frac{1}{2} n$; El signo de todas sus líneas es $= +$ (b).

$A = \frac{1}{2} n$; sen. $A = 1$; cos. $A = 0$; tan. $A = \infty$; sec. $A = \infty$; cot. $A = 0$; cosec. $A = 1$; (c).

$\frac{1}{2} n < A < n$; sen. $A = +$; cos. $A = -$; tan. $A = -$; sec. $A = +$ cot. $= -$, cosec. $A = +$ (d).

$A = n$; sen. $A = 0$; cos. $A = -1$; tan. $A = -0$; sec. $A = -1$; cot. $A = -\infty$; cosec. $A = \infty$ (e).

$n < A < \frac{3}{2} n$; sen. $A = -$; cos. $A = -$; tan. $A = +$; sec. $A = -$ cot. $A = +$; cosec. $A = -$ (f).

$A = \frac{3}{2} n$; sen. $A = -1$; cos. $A = -0$; tan. $A = \infty$; sec. $A = -\infty$; cot. $A = +0$; cosec. $A = -1$ (g).

$\frac{3}{2} n < A < 2n$; sen. $A = -$; cos. $A = +$; tan. $A = -$; sec. $A = +$; cot. $A = -$; cosec. $A = -$ (h).

$A = 2n$; sen. $A = -0$; cos. $A = 1$; tan. $A = -0$ sec. $A = 1$ cot. $A = -\infty$; cosec. $A = -\infty$ (k).

$(0 - \frac{1}{2} n) < A < 0$; sen. $A = -$; cos. $A = +$; tan. $A = -$ sec. $A = +$; cot. $A = -$; cosec. $A = -1$ (m).

10. Sen. $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2}\sqrt{2 R^2 - 2 R \sqrt{R^2 - \text{sen.}^2 A}}$ (a).

Si $R = 1$; sen. $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}}$ (b).

11. R. Sen. $(A \pm B) =$ sen. A. Cos. B. $\pm$ en B. Cos. A; (a).
R. Cos. $(A \pm B) =$ cos. A. Cos. B $\mp$ sen. A. Sen. B (b).
Si $R = 1$; sen. $(A \pm B) =$ sen. A. Cos. B $\pm$ sen. B. Cos. A; (a').
Cos. $(A \pm B) =$ cos. A. Cos. B $\mp$ sen. A. Sen. B; (b').

$$\text{Tan. } (A \pm B) = \frac{\text{R. sen. } (A \pm B)}{\text{cos. } (A \pm B)} =$$

$$\frac{\text{R. (sen. A cos. B} \pm \text{sen. B cos. A)}}{\text{cos. A cos. B} \mp \text{sen. A sen. B}} \text{ (c)}$$

$$\text{Si R} = 1; \text{ tan. } (A \pm B) = \frac{\text{sen. } (A \pm B)}{\text{cos. } (A \pm B)} =$$

$$\frac{\text{sen. A cos. B} \pm \text{sen. B cos. A}}{\text{cos. A cos. B} \mp \text{sen. A sen. B}} \text{ (c,)}$$

$$\text{Tan. } (A \pm B) = \frac{\text{tan. A} \pm \text{tan. B}}{1 \mp \text{tan. A tan. B}} \text{ (d).}$$ *Dem.* Dividiendo ambos

términos de la (c') por cos. A cos. B tendremos: tan. $(A \pm B) =$

$$\frac{\dfrac{\text{sen. A cos. B}}{\text{cos. A cos. B}} \pm \dfrac{\text{sen. B cos. A}}{\text{cos. A cos. B}}}{\dfrac{\text{cos. A cos. B}}{\text{cos. A cos. B}} \mp \dfrac{\text{sen. A sen. B}}{\text{cos. A cos. B}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}} \pm \dfrac{\text{sen. B}}{\text{cos. B}}}{1 \mp \dfrac{\text{sen. A sen. B}}{\text{cos. A cos. B.}}}$$ (y observando que $\left(\dfrac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}} = \text{tan. A}\right)$

que $\left(\dfrac{\text{sen. B}}{\text{cos. B}} = \text{tan. B}\right)$; y sustituyendo será:

$$\text{Tan. } (A \pm B) = \frac{\text{tan. A} \pm \text{tan. B}}{1 \mp \text{tan. A tan. B}}; \text{ L. Q. D. D.}$$

$$\text{Tan. } (A \pm B) = \frac{\text{cot. B} \pm \text{cot. A}}{\text{cot. A cot. B} \pm 1} \text{ (e).}$$ *Dem.* Buscando la tangente en valores de la cotangente; será tan. $A = \dfrac{1}{\text{cot. A}}$; porque tan. $A. = \dfrac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}}$; y cot. $A = \dfrac{\text{cos. A}}{\text{sen. A}}$, multiplicando estas dos ecuaciones entre sí, tendremos; tan. A cot. $A = \dfrac{\text{sen. A cos. A}}{\text{cos. A sen. A}} = 1$; y despejando la tangente, será; tan. $A = \dfrac{1}{\text{cot. A}}$; y tan $B = \dfrac{1}{\text{cot. B}}$; sustituyendo ahora estos valores en la (d) será; tan. $(A \pm B) = \dfrac{\dfrac{1}{\text{cot. A}} \pm \dfrac{1}{\text{cot. B}}}{1 \mp \dfrac{1}{\text{cot. A}} \times \dfrac{1}{\text{cot. B}}} =$ (ejecutando la operacion indicada en el numerador, y reduciendo en el denominador el entero á la especie del quebrado; y ejecutando tambien la operacion indicada)

$$\frac{\dfrac{\text{cot. B} \pm \text{cot. A}}{\text{cot. A cot. B}}}{\dfrac{\text{cot. A cot. B} \pm 1}{\text{cot. A cot. B}}} = \text{(suprimiendo los denominadores)} = \frac{\text{cot. B} \pm \text{cot. A}}{\text{cot. A cot. B} \pm 1}$$

L. Q. D. D. El valor que se acaba de sacar se habria obtenido tambien dividiendo la (c') por (sen. A sen. B) como es fácil de comprobar.

(f) $\text{Cot. } A \pm B) = \frac{1}{\tan. (A \pm B)} = \frac{1}{\frac{\cot. B \pm \cot. A}{\cot. A \cot. B \pm 1}} = \frac{\cot. A \cot. B \mp 1}{\cot. B \pm \cot. A}$.

(g) $\text{Sec. } (A \pm B) = \frac{1}{\cos. (A \pm B)} = \frac{1}{\cos. A \cos. B \mp \text{sen. } A \text{ sen. } B}$.

(h) $\text{Cosec. } (A \pm B) = \frac{1}{\text{sen. } (A \pm B)} = \frac{1}{\text{sen. } A \cos. B \pm \text{sen. } B \cos. A}$.

(k) $\text{Sen. } 2\,A = 2 \text{ sen. } A \cos. A$.

(l) $\text{Cos. } 2\,A = \cos.^2 A - \text{sen.}^2 A = 1 - 2 \text{ sen.}^2 A$.

(m) $\text{Cos. } 2\,A = \cos.^2 A - \text{sen.}^2 A = \cos.^2 A - (1 - \cos.^2 A) = 2 \cos.^2 A - 1$.

(n) $\text{Sen. } A = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos. 2\,A)}$: Para esta despéjese sen. A, en la (l).

(o) $\text{Cos. } A = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos. 2\,A)}$: Para esta despéjese cos. A, en la (m).

12. R : R' : : sen. : sen.' : : cos. : cos.' : : tan. : tan.' : : sec. : sec.' : : cot. : cot.' : : cosec. : cosec.'

13. R : sen. áng. ag. : : hipot. : catet. op.; (a) catet. op. = $\frac{\text{sen. áng. ag. op.} \times \text{hipot.}}{R.}$ (b).

R : cos. áng. ag. : : hip. : cat. ady.; (c) cat. ady. = $\frac{\text{cos. áng. ag. ady.} \times \text{hip.}}{R.}$ (d)

$\text{Hip.} = \frac{\text{cat.} \times R}{\text{sen. áng. ag. op.}}$ (e) $\text{Hip.} = \frac{\text{cat.} \times R}{\text{cos. áng. ag. ady.}}$ (f):

$\text{Sen. áng. ag.} = \frac{\text{cat. op.} \times R}{\text{hip.}}$; (g) cos. áng. ag. = $\frac{\text{cat. ady.} \times R}{\text{hip.}}$ (h)

R : tan. áng. ag. : : cat. ady. : cat. op. (k); cat. op. = $\frac{\text{tan. áng. ag. op.} \times \text{cat. ady.}}{R}$ (l)

$\text{Cat. ady.} = \frac{R \times \text{cat. op.}}{\text{tan. áng. ag. ady.}}$ (m); $\text{tan. áng. ag.} = \frac{\text{cat. op.} \times R}{\text{cat. ady.}}$ (n)

14. $\frac{\text{Sen. } A}{a} \quad \frac{\text{sen. } B}{b} = \frac{\text{sen. } C}{c}$ — (a).

$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\tan. \frac{1}{2}(A + B)}{\tan. \frac{1}{2}(A - B)}$ (b)

La (b) á mas de la demostracion que da Vallejo, puede demostrarse del modo siguiente, notable por su elegancia. Por la (a) tenemos:

$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\text{sen. } A + \text{sen. } B}{\text{sen. } A - \text{sen. } B} =$ (haciendo $A = p + g$; y $B = p - g$) $= \frac{\text{sen. } (p + g) + \text{sen. } (p - g)}{\text{sen. } (p + g) - \text{sen. } (p - g)} =$

$\frac{\text{sen. } p \cos. g + \text{sen. } g \cos. p + \text{sen. } p \cos. g + \text{sen. } g \cos. p}{\text{sen. } p \cos. g + \text{sen. } g \cos. p - \text{sen } p \cos. g + \text{sen. } g \cos. p}$

$= \frac{\text{sen. } p \cos. g}{\cos. p \text{ sen. } g} = \frac{\text{sen. } p}{\cos. p} \cdot \frac{\text{sen. } g}{\cos. g} = \frac{\tan\ p}{\tan. g} =$

$\frac{\tan. \frac{1}{2}(A + B)}{\tan. \frac{1}{2}(A - B)}$

15. $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos. C$ (a).

$b^2 = a^2 + c^2\ 2\,ac \cos. B$. (b).

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos. A$ (c).

$\text{Cos. } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$ (a').

$\text{Cos. } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$ (b').

$\text{Cos. } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$ (c').

Para resolver un triángulo siempre se han de suponer conocidos tres datos de los seis (a, b, c, A, B, C,), y como en tres ecuaciones se pueden siempre determinar tres incógnitas, resulta que teniendo así los dos sistemas de ecuaciones arriba expresados se podrá resolver cualquier triángulo: pero si se quisiese aplicar el cálculo logarítmico á una cualquiera de estas ecuaciones, resultaria el manejo de ellas muy embarazoso; y por eso es de la

mayor importancia el darles una forma en que sean fácilmente susceptibles del cálculo logarítmico.

Llamando $(a + b + c) = 2p$; digo que será; $\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} A}{R} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ab}}$ (d); $\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} B}{R} = \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ (e) $\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} C}{R} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ab}}$ (f); y haciendo $R = 1$; sen. $\frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ (d') Sen. $\frac{1}{2}B = \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ (e'); sen. $\frac{1}{2} C = + \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ (f').

Dem. Cos. $A = \cos. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A) = \cos.^2 \frac{1}{2} A - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A =$ (considerando que $\cos.^2 \frac{1}{2} A = 1 - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A) = 1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A$; Igualando este valor de cos. A con el de la (c'); será $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 1 - 2$ sen.$^2 \frac{1}{2} A$; luego $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc - 4bc \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A$ y despejando sen.$^2 \frac{1}{2} A$ será; sen.$^2 \frac{1}{2} A = \frac{a - b^2 - c^2 + 2bc}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$ (considerando que la diferencia de dos cuadrados puede descomponerse siempre en dos factores) $= \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc} =$ (añadiendo y quitando á cada factor del numerador la misma cantidad) $\frac{(a + b - c + c - c)(a - b + c + c - c)}{4bc} =$ (recordando que $a + b + c = 2p) = \frac{(2p - 2c)(2p - 2b)}{4bc} = \frac{2(p-c)(2p-b)}{4bc} = \frac{4(p-c)(p-b)}{4bc} = \frac{(p-c)(p-b)}{bc}$ y extrayendo la raiz cuadrada será; sen. $\frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}$ que es la misma ecuacion (d'): es evidente que con el mismo procedimiento se sacaria las (e') y (f'). Luego se tiene L. Q. D. D.

Si se quiere sacar las (d) (e) y (f); se ha de considerar que la (c') se ha de convertir en esta $\frac{\cos. A}{R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ lo que se consigue expresando siempre el radio en todos los procedimientos de que se usa para llegar á la ecuacion (c); y advirtiendo además que se ha de principiar la demostracion que acabamos de dar de esta manera; R cos. $A = R \cos. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A) =$ (refiriéndose á la (b) del párrafo 11) $= \cos.^2 \frac{1}{2} A - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A$; y advirtiendo tambien que $\cos.^2 A = R^2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A$, y que por consiguiente será; R cos. $A = R^2 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A$; (Véase el párrafo 11,) igualando despues los valores de cos. A, sin prescindir jamás del radio y haciendo en lo demás las mismas operaciones, se obtendrá lo que se busca.

Para aplicar á estas fórmulas el cálculo logarítmico se hace del modo siguiente: Considerando que sen.$^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c) R^2}{bc}$ se tendrá; Log. sen.$^2 \frac{1}{2} A = \log. \frac{(p-b)(p-c) R^2}{bc}$, y 2 L sen. $\frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c) R^2}{bc}$ $= L (p-b) + L. (p-c) + L. R. + L. R. - L. b - L. c = L. (p-b) + L. (p-c) + (L. R. - L. b) + (L. R. - L. c) =$ (considerando que el logaritmo del radio de las tablas es igual á 10, y que por tanto L. R. —L. R.—L. b = 10—L. b = complemento L. b.) = L. (p—b) + L. (p—c) + Comp. L. b + Comp. L. c. luego tendremos:

(g) Log. sen. $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2}$ L. (p—b) + L. (p—c) + Comp. L. b. + Comp. L. c.)

Se puede llegar al mismo resultado mas expeditamente haciendo R = 1 pues entonces tendremos, sen.$^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$; luego L sen.$^2 \frac{1}{2} A = L \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$; luego 2 L. sen. $\frac{1}{2} A$ = L. (p—b) + L. (p—c) — L. b—L. c = L. (p—b) + L. (p—c) + Comp. L. b; + Comp. L. c; luego tendremos

Log. sen. $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2}$ L. (p—b) + L (p—c) + Comp. L. b + Comp. L. c) que es la misma ecuacion (g).

Encontrado el valor de sen. $\frac{1}{2} A$; se encontrarian fácilmente por el mismo método los valores de sen. $\frac{1}{2} B$; y sen. $\frac{1}{2} C$; ó bien para estos últimos, supuesto que ya se conoce el ángulo A, se podria echar mano de las fórmulas (a) y (b) del párrafo 14.

Síguese de todo esto que conocidos los tres lados de un triángulo se pueden encontrar todos sus ángulos; y que de consiguiente se puede resolver el problema: Dados los tres lados de un triángulo encontrar sus tres ángulos.

Tambien se pueden obtener los ángulos conocidos los lados, echando mano de estas fórmulas:

$$\text{(h)}\quad \text{Tan}\ \tfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{(a+b-c)\ (b+c-a)}}$$

$$\text{(k)}\quad \text{Tan.}\ \tfrac{1}{2} B = \pm\sqrt{\frac{(b+c-a)\ (b+a-c)}{(a+b+c)\ (a+c-b)}}$$

$$\text{(m)}\quad \text{Tan.}\ \tfrac{1}{2} C = \pm\sqrt{\frac{(b+c-a)\ (a+c-b)}{(a+b+c)\ (a+b-c)}}$$

Para llegar á estas fórmulas se debe advertir, que las fórmulas (n) y (o) del párrafo 11 dan; $\frac{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A}{\cos.^2 \frac{1}{2} A} = \frac{1-\cos. A}{1+\cos. A}$ (n) y como $\frac{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A}{\cos.^2 \frac{1}{2} A} = \tan.^2 \frac{1}{2} A$; tendremos: $\tan.^2 \frac{1}{2} A = \frac{1-\cos. A}{1+\cos. A}$ (o), y como la fórmula (c') del párrafo 15 da $\cos. A = \frac{{}^{2} + c^2 - a^2}{2\,bc}$ sustituyendo este valor de cos. A en la ecuacion (o) tendremos $\tan.^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right)}{1 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right)}$; entonces reduciendo el entero á la especie del quebrado en ambos términos, simplificando y descomponiendo en factores las diferencias de los cuadrados que resultarán, se llegará luego á las fórmulas expresadas.

16. Dados los lados de un triángulo se puede encontrar su superficie; llamando (S) á la superficie y (2 p) á la suma de los lados: será $S = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$ (a) (V. Figura 1.)

Dem. $S = \frac{1}{2} A B \times C P$; $A B = c$, $C P = A C \times \text{sen. } A = b \times \text{sen. } A$; luego sustituyendo tendremos $S = \frac{1}{2} c \times b \text{ sen. } A = \frac{1}{2} bc \text{ sen. } A$; ahora buscando el valor de sen. A en los valores que se necesitan, tendremos; $\text{sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A$; por la ecuacion (c') del párrafo 15 tenemos; $\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$; lo que dará $\text{sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right)^2 = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2\,c^2}$ = (reduciendo el entero á la especie del quebrado) $= \frac{4\,b^2\,c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2\,c^2}$; luego quitando el divisor será $4\,b^2\,c^2 \text{ sen.}^2 A = 4\,b^2\,c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ = (indicando la operacion del primer término del segundo miembro) $= (2\,bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ = (descomponiendo en factores la diferencia de los cuadrados) $= (2\,bc + b^2 + c^2 - a^2)\ (2\,bc - b^2 - c^2 + a^2) = (b^2 + 2\,bc + c^2 - a^2)\ (a^2 - b^2 + 2\,bc - c^2) = (b^2 + 2\,bc + c^2 - a^2)\ (a^2 - (b^2 - 2\,bc + c^2)) = ((b + c)^2 - a^2)\ (a^2 - (b - c)^2) = (b + c + a)\ (b + c - a)\ (a + b - c)\ (a - b + c) = (b + c + a)\ (b + c - a + a - a)\ (a + b - c + c - c)\ (a - b + c + b - b) = (b + c + a)\ (b + c + a - 2\,a)\ (a + b + c - 2c)\ (a + c + b - 2b) = (2\,p)\ (2\,p - 2\,a)\ (2\,p - 2\,c)\ (2\,p - 2\,b) = 2\,(p)\ 2\,(p - a)\ 2\,(p - c)\ 2\,(p - b) = 16\,(p)\ (p - a)\ (p - c)\ (p - b)$; luego despejando $\text{sen.}^2 A$, tendremos; $\text{sen.}^2 A = \frac{16\,(p)\ (p - a)\ (p - c)\ (p - b)}{4\,b^2\,c^2} = \frac{4\,(p)\ (p - a)\ (p - c)\ p - b)}{b^2\,c^2}$ y estrayendo la raiz, será:

$$\text{sen. } A = \pm\sqrt{\frac{4\,(p)\ (p - a)\ (p - c)\ (p - b)}{b^2\,c^2}} = \pm\frac{2\sqrt{p\,(p - a\ (p - c)\ (p - b)}}{bc};$$

y como antes teniamos, $S = \frac{1}{2} bc \times \text{sen. } A$, sustituyendo en vez de sen. A el valor encontrado, será;

$$S = \tfrac{1}{2} bc \times \pm\frac{2\sqrt{p\ (p - a)\ (p - c)\ (p - b)}}{bc}$$ (suprimiendo los factores comunes) $= \pm\sqrt{p\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)}$: L. Q. D. D.

17. Todas las fórmulas trigonométricas pueden sacarse del siguiente sistema de ecuaciones, cuyas letras se refieren á las (fig. 2 y 3), llamado.

20.

a, b, c, los ángulos A, B, C; y a, b, c, los lados respectivamente opuestos;

$$c = a \cos. b + b \cos. a. \text{ (a)}$$
$$b = c \cos. a + a \cos. c. \text{ (b)}$$
$$a = c \cos. b + b \cos. c. \text{ (c)}.$$

Para obtener estas ecuaciones, por ejemplo la (a) basta considerar que c = B P + A P en la (fig. 2), y c = B P — A P en la fig. 5: buscando entonces los valores de B P y A P, con la consideracion de los triángulos semejantes P A C, H A G, P B C y F B D; sustituyendo en vez de las líneas los valores trigonométricos, haciendo el radio igual á 1, y advirtiendo que en la (fig. 3) el ángulo (a) del triángulo A B C, tiene el coseno negativo, se tendrá lo que se busca. Haciendo construcciones análogas para los demás lados resultarian las otras ecuaciones. De las fórmulas (a, b, c,) se saca;

$$a : b : c :: \text{sen. } a : \text{sen. } b : \text{sen. } c \text{ (d)}$$

pues que sustituyendo en las ecuaciones (b y c) el valor del lado (c) sacado de la ecuacion (a), se halla: $\cos. a \cos. b + \cos. c = \frac{b \text{ sen.}^2 a}{a}$; y tambien $\cos. a \cos. b + \cos. c = \frac{a \text{ sen.}^2 b}{b}$; luego será; $\frac{a \text{ sen.}^2 b}{b} = \frac{b \text{ sen.}^2 a}{a}$

que quitando los divisores da; $a^2 \text{ sen.}^2 b = b^2 \text{ sen.}^2 a$, y extrayendo la $\sqrt{\ }$ de ambos miembros resulta; a sen. b = b sen. a; y poniéndolo en forma de proporcion da a : b : : sen. a : sen. b; y como lo mismo se demostraria de los demás, se tiene L. Q. S. D. D. (Véase el § 14.)

De lo que se acaba de explicar puédese tambien sacar la fórmula que sigue:

$$\text{sen. } (a + b) = \text{sen. } a \cos. b + \cos. a \text{ sen. } b \text{ (e)}.$$

Dem. La proporcion (d), da; $a = \frac{c \text{ sen. } a}{\text{sen. } c}$; y $b = \frac{c \text{ sen. } b}{\text{sen. } c}$; sustituyendo estos valores de a y b, en la ecuacion (a) se hallará; sen. c = sen. a cos. b + cos. a sen. b; y observando que perteneciendo a, b, c, á un triángulo, tenemos que v es suplemento de ($a + b$); inferiremos; sen. ($a + b$) = sen. c = sen. a cos. b + cos. a sen. b : que es L. Q. D. D. En esta demostracion debe notarse que ($a+b$) expresa una suma menor que dos rectos porque se han considerado como ángulos de triángulo; pero expresan

todas las sumas desde (0) hasta (180) pues que puédese considerar un triángulo en que el ángulo (c) tenga un valor cualquiera.

Infiérese tambien

$$\text{Sen. } (a - b) = \text{sen. } a \cos. b - \cos. a \text{ sen. } b \text{ (f)}.$$

Dem. Por la ecuacion (a) del párrafo (8) tenemos; sen. (a—b) = sen. (180 — (a—b) = (ejecutando la operacion) = sen. ((180—a) + b) = (recordando la ecuacion (e) del presente párrafo) = sen. (180—a) cos. b + cos. (180—a) sen. b=(recordando las ecuaciones (a) y (d) del párrafo 8) = sen. a cos. b + (— cos. a sen. b) = sen. a cos. b — cos. a sen. b: L. Q. D. D.

Tendremos tambien;

$$\text{Cos. } (a \pm b) = \cos. a \cos. b \pm \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ (g)}.$$

Dem. Por la (c) del § 8 tenemos cos. ($a + b$) = sen. (90 + ($a + b$) = sen. ((90 + b) + a); por lo mismo tendremos cos. ($a - b$) = sen. (90 + ($a - b$)) = sen. ((90 — b) + a); ahora recordando la (e) del presente párrafo, y la (h) del párrafo 8, haciendo las trasformaciones correspondientes y enlazando los signos de + y — en uno ± se tendrá L. Q. S. D. D.

18. En las fórmulas del párrafo anterior se han considerado a y b menores que 180; pero se pueden generalizar tambien á los casos en que (a> 180 y b> 180. Para esto observaremos que como en el párrafo anterior se ha considerado ya el caso en que a> 90, y b> 90: por suponerse a y b ángulos cualesquiera de un triángulo, si ahora hacemos; $a = a' - 90$; y $b = b' - 90$; tendremos tambien; $a' = a + 90$; y $b' = b + 90$; y por tanto a' y b' se podrán ya considerar como mayores de 180; pues que a y b ya se podian considerar como mayores de 90. Esto supuesto tendremos: por lo dicho antes;

$$\text{(a)} \begin{array}{l} \text{sen. } (a \pm b) = \text{sen. } a \cos. b \pm \cos. a \text{ sen. } b \\ \cos. (a \pm b) = \cos. a \cos. b \pm \text{sen. } a \text{ sen. } b \end{array}$$

Se tiene tambien; (b) sen. (90 + ($a \pm b$)) = cos. ($a \pm b$)
(c) cos. (90 + ($a \pm b$)) = — sen. ($a \pm b$)
(d) sen. (($a - b$) — 90) = — cos. ($a - b$)
(e) cos. (($a - b$) — 90) = sen. ($a - b$)