TRIGONOMETRIA ESFERICA.

20. Véase á Vallejo. T. 1. Desde el § 427 hasta el 431, y tambien V. § 473 de id. Sentada la definicion de los ángulos esféricos; y el modo de medirlos, se aleanza fácilmente que los hay adyacentes y opuestos al vértice, rectos, agudos y obtusos; y que:

(a) Los dos ángulos formados por un arco al caer sobre otro valen dos rectos.

(b) Los opuestos al vértice son iguales.

(c) Todos los formados al rededor de un punto valen cuatro rectos.

Nota. (d) Cuando se habla de arcos, en no advirtiendo lo contrario se entienden arcos máximos pero menores de 180.°

(e) Si por un punto O (Valle. fig. 139. T. 1) del diámetro D K se tira un plano B F A M perpendicular al diámetro D K; todos los arcos D A D B, D M, D F, etc. etc. son iguales, porque sus cuerdas lo son. Lo mismo se verifica de los arcos K E A, K G B, etc. etc.

(f) Polo de una circunferencia ó arco, es un punto equidistante de todos los puntos de la circunferencia ó arco; sean mayores los arcos ó menores; de modo que los puntos D y K (fig. 139) son polos de todos los arcos formados por los planos enfilados perpendicularmente en el diámetro D K.

Nota. (g) Las distancias sobre la esfera se miden por arcos de círculo máximo.

(h) De la definicion del polo (f) es fácil inferir que haciendo centro en D ó en K (f. 139) con un hilo tirante sobre la superficie de la esfera, ó con un compás de piernas curvas se pueden trazar fácilmente tantos arcos y circunferencias como se quiera. Serán máximos ó menores segun se tome una longitud igual á un cuadrante ó menor que un cuadrante.

(k) Si un punto es polo de un arco, sea máximo ó menor, el diámetro que pasa por aquel punto es perpendicular al plano del arco: y pasa por el centro del arco.

(l) Todo arco de círculo máximo que pasa por un polo es perpendicular á todos los planos de todos los arcos á que se refiere el polo: porque su plano pasa por el diámetro que pasa por el polo (Véa. K) y (Tom. 1 Vallejo § 378).

(m) Todos los planos de los arcos que tienen un mismo polo son paralelos: porque todos son perpendiculares al diámetro que pasa por su polo. (Véa. K).

(n) Si un arco de círculo máximo es perpendicular al plano de un arco máximo ó mínimo pasará por su polo (prolongándose en caso necesario). *Dem.* Porque si el arco perpendicular se considera con respecto á otro círculo máximo tendremos; que por ser ambos máximos, tendrá aquel de comun con este el centro de la esfera; luego pasará por el diámetro que pasa por el polo. Para comprender esto último se ha de advertir que si un plano es perpendicular á otro, si aquel pasa por un punto de este, en que se halle levantada una perpendicular, el plano aquel debe pasar por la perpendicular; pues que de otra manera si por la interseccion de los dos planos, haciamos pasar un nuevo plano que al mismo tiempo pasase por la perpendicular, este nuevo plano seria perpendicular al primitivo; y como por el supuesto lo era tambien el otro tendriamos tirados por una misma interseccion dos planos distintos perpendiculares á un tercero, lo que no puede ser, L. Q. D. D. Y si ahora observamos que por lo dicho (m) todos los planos de arcos que tienen un mismo polo son paralelos, quedará generalizado. L. Q. D. D.

(o) Todos los arcos tirados desde un polo al arco de círculo máximo correspondiente valen 90°: porque por el supuesto y por (k) el radio D C (f. 139) es perpendicular á C G, C E, etc. etc. Luego los arcos D B G D A E, etc. etc. que miden los ángulos formados valen 90° L. Q. D. D.

(p) Si un diámetro es perpendicular al plano de círculo máximo E G E los puntos D y K serán polos del arco; pues que los círculos D A E, D B G, etc. etc. serán iguales por medidas de ángulos rectos.

(q) Los arcos formados por planos paralelos tienen un mismo polo. *Dem.* Si D K (f. 149) es polo del arco de círculo máximo E G E; será tambien polo de su paralelo A M F B M'; por ser D polo de E G E; será D B G = D A E = etc. etc. y por ser los arcos paralelos será A E = B G = etc. etc.; restando esta ecuacion de la primera tendremos D B G — B G = D A E — A E; ó simplificando será D B = A D etc. L. Q. D. D.

(r) Si un diámetro D K (f. 139) es perpendicular al plano de un círcu-

lo menor A M F B M' pasará por sus polos que serán D, K; *Dem.* Por (p) tenemos que los polos del arco máximo E G E; son D, K, y como E G E es paralelo á A M F B M' tendremos por (q) L. Q. D. D.

(s) El diámetro D K (f. 139) perpendicular á A M F B M' pasa por su centro O pues que por pasar por D polo del arco, tendremos cuerda D B = cuerda D A = etc. etc.; luego los triángulos D O B, D O A etc. rectángulos en O tienen los hipotenusas iguales y como tienen el cateto D O comun resulta igualdad; y por tanto O B = O A = O M etc. etc. L. Q. D. D.

(u) Recíprocamente toda línea tirada desde el centro del círculo menor es perpendicular á su plano.

(x) Si dos puntos cualesquier E, G (fig. 139) de un arco de círculo máximo distan de D 90°, D será polo del arco; pero con tal que E y G no sean extremos de un diámetro: pues que aunque así lo represente la f. 139 nos servimos de ella solo para ahorrar construcciones. *Dem.* Por ser D B G y D A E iguales á 90° tendremos los ángulos D C G, D C E rectos, luego D C perpendicular al plano E G E, luego D polo de E G E. L. Q. D. D.

(y) Si un arco máximo E A D (f. 139) es de 90° y perpendicular al círculo máximo E G E; el punto D, es polo del círculo máximo E G E: *Dem.* Por ser E A D perpendicular á E G E por (n) tendremos que pasará por su polo; luego el polo será uno de los puntos A, D, B, etc. etc.: ahora el polo no puede ser ni A, ni B: luego ha de ser D; porque E A D B G = 180; y por el supuesto E A D = 90°; luego A E> A D B G; luego A no puede ser polo: y como lo mismo tendriamos de B etc. etc. resulta L. Q. D. D.

(z) De lo dicho (x) resulta que si haciendo centro en dos puntos de un arco máximo (pero que no sean los extremos de un diámetro) con una abertura de 90° se trazan dos arcos sobre la superficie de la esfera, la interseccion de estos determinará el polo del primero.

(z') Si desde el punto n de la superficie de una esfera se quiere tirar un arco de círculo máximo perpendicular á otro A G B F; hágase centro en n, y con una abertura de 90° trácese un arco que corte al arco A G B F en un punto tal como d; entonces haciendo centro en d tómese sobre el arco A G B F, un arco de G que valga 90°, entonces tirando un arco máximo por los puntos n y G, este será perpendicular al A B F: (V fig. 4) *Dem.* Por construccion tenemos d n = 90°; d G = 90°; luego es polo del arco n G; luego A G B F pasa por el polo d del arco n G, luego por (1) será A G B F perpendicular á n G y recíprocamente L. Q. D. D.

El ángulo esférico C A B (Vall. T. 1. fig. 151) á mas de medirse por (z") el ángulo E A D formado por las tangentes E A, D A; se puede tambien medir por el arco comprendido por los arcos A b C, A c B prolongados cada uno hasta 90. En efecto, si suponemos que haciendo centro en A con una abertura de 90° trazamos un arco C a B por ser la abertura de 90° será el arco A b C de 90° y tambien lo será el A c B; luego los ángulos C O A, y B O A serán rectos; luego las líneas C O y B O (pertenecientes respectivamente á los planos de los arcos C bA y B c A) serán perpendiculares á O A interseccion de los planos de los arcos, luego el ángulo C O B medirá el ángulo de los planos, que es el mismo que el de los arcos: es así que el ángulo C O B es medido por el arco C a B; luego C a B será la medida del ángulo esférico C A B. L. Q. D. D.

21. (a) Si se tiene el triángulo esférico A B C, y desde los vértices A, B, C, como polos se trazan los arcos del círculo máximo B' C', A' B'; se formará un nuevo triángulo esférico A' B' C', cuyos vértices A', B', C', serán respectivamente polos de los arcos opuestos B C, A C, A B. *Dem.* Si desde A' se tiran los arcos máximos A' B, A' C, estos valdrán 90° pues que A' es un punto de A' C' del cual es polo B, y es punto de A' B' del cual es polo C, luego por lo dicho (§ 20 (o)) A' B, A' C valen 90°; luego el arco B C tiene dos puntos, B, C, distantes 90° de A', luego por lo dicho (§ 20 (x)) se tendrá L. Q. S. D. D. (V. fig. 5.)

(b) Cada ángulo de uno cualquiera de los dos triángulos A B C, A' B' C', será suplemento del lado opuesto del otro triángulo; es decir que tendremos por ejemplo, A + B' C' = 180. *Dem.*

Si prolongamos los arcos A B, A C, hasta D, E,; por ser B' polo de A C E, el arco B' E = 90°; y por ser C' polo de A B D; el arco C' D = 90°; (§ 20 (o)) luego será B' E + C' E + D E = 180; ó bien B' C' + C' E + D E = 180; pero D E mide el ángulo A por lo dicho (§ 20 (z")) luego en vez de D E se podrá sustituir A, y tendremos; B' C' + A = 180: L. Q. D. D.

(c) Nota. El triángulo A' B' C' se llama polar del A B C; y aunque con la construccion dicha resultan otros triángulos como demuestra la figura, el A' B' C' es el que se considera solamente; este se llama central, y se conoce en que los ángulos A A' están situados hácia una misma parte de B C; los B B' hácia una misma parte de A C etc. etc.

(d) Llamando a, b, c, los ángulos A, B, C,; a, b, c, los lados opuestos á los ángulos, A, B, C: a', b', c', los ángulos A', B', C'; y a', b', c', los lados opuestos á los ángulos A', B', C', tendremos el siguiente sistema de ecuaciones, por lo dicho en (c).

$$a + a' = 180\ (1);\quad b + b' = 180\ (2);$$
$$c + c' = 180\ (3);\quad a' + a = 180\ (4);$$
$$b' + b = 180\ (5);\quad c' + c = 180\ (6);$$

(e) Si suponemos a = b; tendremos $a' = b'$ (1)
Si $a = b$, , , , , , , , $a' = b'$ (2)
Si $a > b$, , , , , , , , $a' < b'$ (3)
Si $a > b$, , , , , , , , $a' < b'$ (4)

La primera de estas ecuaciones nos dice que si dos lados de un triángulo son iguales, lo serán tambien los ángulos correspondientes del triángulo polar. (1)

La segunda ecuacion nos dice que si dos ángulos de un triángulo son iguales, lo serán tambien los lados correspondientes del triángulo polar. (2')

La desigualdad (3) nos dice que si un lado es mayor que otro; el ángulo correspondiente (en el triángulo polar) al primero será menor que el que corresponde al segundo.

La desigualdad (4) nos dice que si un ángulo es mayor que otro; en el triángulo polar el lado correspondiente al primero será menor que el correspondiente al segundo.

(f) Considéranse siempre triángulos esféricos cuyos lados sean menores que 180°; no porque no existan triángulos cuyos lados sean mayores que 180°; sino porque la consideracion y conocimiento de estos depende de la de aquellos. *Dem.* Para concebir esto considérese la semi-esfera C A D′ B′ E D B convexa por la parte de C; y asentada sobre el plano del círculo máximo A D′ B′ E D B; si su superficie se corta por los círculos máximos D′ C D; B′ C B; A C B; resultará el triángulo esférico A C B; pero tambien por la otra parte resultará otro triángulo A C B; cuyos ángulos serán A, C, B, y cuyos lados opuestos serán respectivamente B C; B D E B' D′ A; y A C. En el triángulo grande el ángulo C será mayor que 180°; (§ 20 (c)) y su lado opuesto A D' B' E D B tambien será mayor que 180°; pero conociendo el triángulo menor A C B, se conocerá tambien el mayor A C B, porque los lados A C, y B C son comunes; el lado

A D′ B' E D B = 360 — A B; y el ángulo C del mayor = 360 — C del menor; el A del mayor = 180 — A del menor; y el B del mayor = 180 — B del menor, L. Q. D. D. (V. fig 6.)

(g) Considerando como se ha explicado en (f) los triángulos esféricos, es decir que cada lado sea menor que 180°, tendremos que cada ángulo será menor que 180.° *Dem.* Como por el supuesto, A B < 180°; A C < 180°; tendremos que para encontrarse se habrán de prolongar ambos lados hasta A′ extremo del diámetro A A′, línea de interseccion de los dos círculos máximos; luego se formarán los ángulos adyacentes A B C, A′ B C, y como por ((a) § 20 A B C + A′ B C = 180°; será A B C < 180° L. Q. D. D. (V. fig. 7.)

(h) La suma de los tres lados es menor que 360°; y cada lado menor que la suma de los otros dos. *Dem.* Los tres planos de los arcos A B, B C, C A, determinan en el centro O un ángulo sólido. El lado A C es la medida del ángulo plano A O C; el lado B C mide el ángulo plano B O C; y el lado A B mide el A O B: pero A O C + B O C + A O B < 360° porque las sumas de los ángulos planos que forman un ángulo sólido, es menor que 360°: luego tambien A C + A B + B C < 360°. (V. fig. 8.)

Además en un ángulo sólido, cada ángulo plano es menor que la suma de los otros dos; luego se verificará lo mismo en sus medidas que son los lados del triángulo esférico. L. Q. D. D.

(k) La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es menor que seis rectos. *Dem.* Por (g) cada ángulo es menor que dos rectos, luego su suma será menor que seis rectos. L. Q. D. D.

(l) La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180°. *Dem.* El sistema de ecuaciones (d) nos da; $a + a' = 180°$; $b + b' = 180°$; $c + c' = 180$; sumando ordenadamente será $a + a' + b + b' + c + c' = 3 \times 180$; lo que dará $a + b + c = 3 \times 180 - (a' + b' + c') = 360° + 180 - (a' + b' + c')$; y como por (h) $a' + b' + c' < 360°$; tendremos L. Q. D. D.

(m) Si a, b, c, son los ángulos de un triángulo esférico, tendremos:

$$a + b > 180° - c;\ a + b < 180° + c;$$

Dem. Por (h) tenemos $c' < a' + b'$; sustituyendo en vez de c' a' b' sus valores sacados del sistema de ecuaciones (d), tendremos que la desigualdad se convertirá en $180° - c < 180 - a + 180 - b$; y ejecutando las operaciones, traslaciones y simplificaciones correspondientes se obtendrá a

$+ b < 180° + c$; Además por (1) tenemos $a + b + c > 180°$; y trasladando c; será $a + b > 180° - c$ L. Q. D. D.

22. Reasumiendo lo dicho en el párrafo anterior y conservando las mismas denominaciones tendremos:

$$a + b + c < 360; \text{ (a).}$$
$$a + b > c; \text{ (b).}$$
$$a + c > b; \text{ (c).}$$
$$b + c > a \text{ (d).}$$
$$a + b + c > 180°; \text{ (e).}$$
$$a + b + c < 3 \times 180°; \text{ (f).}$$
$$a + b > 180 - c \text{ (g).}$$
$$a + b < 180 + c \text{ (h).}$$
$$a + c < 180 + b \text{ (k).}$$
$$a + c > 180 - b \text{ (l).}$$
$$a + c > 180 - a \text{ (m).}$$
$$a + c < 180 + a \text{ (n).}$$

(o) Nota; como por el sistema (d) tenemos una relacion constante entre los valores de los ángulos de un triángulo, con los lados de su triángulo polar y recíprocamente, se infiere que los ángulos del uno se podrán expresar en valores de los lados del otro; por ejemplo $a = 180 - a'$; $a = 180 - a'$; $a' = 180 - a$; $a' = 180 - a$, etc. etc.; luego teniendo demostradas las relaciones (b) (c) (d) sustituyendo en ellas a' b' c' en vez de a b c; y luego después en vez de a' b' c' sus valores en valores de 180 y de $a\ b\ c$; se demostrarán las relaciones (g) (h) (k) etc. etc.: y como si demostráramos primero estas últimas, podriamos hacer sustituciones análogas, se sigue que así como de aquellas podemos inferir estas, de estas infeririamos aquellas.

23. Si suponemos el triángulo rectángulo, por ejemplo; $a = 90$; tendremos:

$$b + c > 90°; \text{ (a).}$$
$$b + c < 3 \times 90° \text{ (b).}$$
$$b < 90° + c \text{ (c).}$$
$$c < 90 + b \text{ (d).}$$

Dem. La (a) se saca de la ((e) § 22); la (b) de la ((n) § 22); la (c) de la ((e) § 22); y la (d) de la ((k) § 22): L. Q. D. D.

24. Enunciando en forma de teoremas las relaciones (a) y (b) del (§

23) diremos; (1) En un triángulo esférico rectángulo la suma de dos ángulos oblícuos, es mayor que un recto y menor que tres rectos.

Y como de las (c) y (d) se saca $b - c < 90$; $c - b < 90$ diremos (2): Que en un triángulo esférico rectángulo, la diferencia entre los ángulos oblícuos es menor que un recto.

25. (a) Teniendo el triángulo A B C, si desde los puntos A, y C, como polos se trazan arcos de círculos con los radios A B, C B; y desde el punto h, en que se encuentran se tiran los arcos de círculo máximo b A, b C; resultará un triángulo A b C, que será igual con A B C; es decir, que tendrá iguales con el otro todos los lados y los ángulos (los de las mismas denominaciones cambiando B en b). (V. fig. 9). *Dem.*

El lado A C es comun; el A B = A b y el C B = C b por construccion. Ahora para demostrar la igualdad de los ángulos, tiraremos los radios O A, O b, O C, O B: los cuales determinarán dos ángulos sólidos en O; á saber O A b C formado por los planos b O A, b O C, A O C; y el O A B C formado por los planos B O A, B O C, A O C que es comun á ambos ángulos sólidos: ahora el ángulo plano b O A = B O A; por ser medidos por los arcos iguales A b, A B; por la misma razon b O C = B O C; el ángulo A O C comun á ambos ángulos sólidos; luego los dos ángulos sólidos están formados por tres ángulos planos iguales cada uno al suyo; luego serán iguales, luego los planos correspondientes estarán igualmente inclinados ó formarán los mismos ángulos: es así que los ángulos de los planos son respectivamente los mismos ángulos de los triángulos A B C, A b C; luego será L. Q. D. D.

(b) Los ángulos sólidos O A B C, O A b C, aunque sean iguales no pueden suponerse (á no ser que fueran isóceles, esto es que en el primero el ángulo plano C O A= b O A; y en el segundo C O A = B O A; pues en este caso haciendo entrar el plano B O C sobre C O B, por la igualdad de los ángulos B O C, b O C; se ajustarian exactamente; y por el supuesto se ajustarian tambien los otros).

(c) Se llaman triángulos esféricos simétricos, los que son iguales pero que no pueden superponerse. Y lo mismo se dice de los ángulos sólidos; ambos casos están mostrados en la figura.

(d) Luego si dados tres lados se construye un triángulo esférico, si con los mismos lados se construye otro, será igual al primero, porque se podrá suponer ó sobre este ó sobre su simétrico.

(e) Para mayor precision y exactitud se podrán llamar iguales los

triángulos, cuando puedan superponerse; y simétricos cuando tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales, pero que no pueden superponerse.

26. (a) Dos triángulos esféricos son iguales (ó al menos simétricos) cuando tienen sus tres lados iguales. *Dem.* Véase (§ 25 (d)).

(b) Dos triángulos esféricos son iguales, ó simétricos, cuando tienen sus tres ángulos iguales. *Dem.* Por lo dicho (§ 21) tendremos que los triángulos polares de los dos triángulos del supuesto, tendrán sus lados respectivamente iguales; luego tendrán tambien sus ángulos respectivamente iguales; y como por el mismo párrafo la igualdad de los ángulos de los triángulos polares dará igualdad de lados respectivamente en los primitivos, tendremos L. Q. D. D.

(c) Dos triángulos son iguales (ó simétricos) cuando tienen un ángulo igual comprendido por dos lados iguales. *Dem.* En tal caso el uno podrá superimponerse al otro ó al menos sobre su simétrico. Luego será L. Q. S. D. D.

(d) Dos triángulos son iguales (ó simétricos) cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales. *Dem.* La igualdad del lado dará igualdad respectiva del ángulo en los triángulos polares, y la igualdad de los dos ángulos adyacentes dará igualdad respectiva de los lados en los triángulos polares; luego los triángulos polares tendrán un ángulo igual comprendido por dos lados iguales; luego serán iguales por lo dicho (c); luego lo serán tambien los primitivos. L. Q. S. D. D.

27. (a) Si dos lados C B, C A, de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos C A B, C B A, serán tambien iguales. *Dem.* Fig. 10. Si desde el vértice C, se tira al punto P, medio de A B, el arco máximo C P; los triángulos C P A, C P B serán iguales, por lo dicho (§ 26 (a)): luego darán ángulo A = B; L. Q. D. D.

(b) Infiérese de (a) que el arco C P tirado al punto medio de la base es perpendicular á ella y divide el ángulo C en dos partes iguales.

(c) Si los ángulos A, y B, son iguales lo serán sus lados opuestos. *Dem.* Fig. 5.

Siendo A = B; los lados C' B', A' C' del triángulo polar serán iguales, luego los ángulos A' B' del triángulo polar serán iguales por lo dicho (a); luego los lados C B, y C A del triángulo primitivo serán tambien iguales. L. Q. D. D.

(d) Luego todo triángulo equilátero es equiángulo y recíprocamente.

CAPILLA ALFONSINA

(e) Si el ángulo C A B > C B A; Fig. 11. tendremos C B > C A. *Dem.* Siendo C A B > C B A podremos tirar el arco A D de modo que D A B = D B A; luego por (c) tendremos en el triángulo D A B, D B = D A; añadiendo á ambos miembros D C, será D B + D C = D A + D C, y simplificando C B = D A + D C, pero por lo dicho ((4) § 21) D A + D C > C A; luego C B > C A. L. Q. D. D.

(f) Si B C > C A, el ángulo C A B será > C B A; *Dem.* Fig. 5. Siendo B C > C A el ángulo A' del triángulo polar será menor que B'; luego el lado B' C' < A' C'; luego en el triángulo primero será A > B. L. Q. D. D.

28. (a) Si desde el punto A Fig 12. de la superficie de una esfera se tira el arco máximo A M B; el arco A M B será mas corto que otra curva cualquiera, ó conjunto de curvas que se puedan tirar desde A á B; ó en otros términos, el arco de círculo máximo es la línea mas corta que se puede tirar de un punto á otro en la superficie de la esfera. *Dem.* Teniendo presente lo dicho en ((h) § 21) si por el punto C tiramos los arcos máximos A D C, B E C; será A D C + C E B > A M B; si por el punto F tiramos los arcos máximos A F, C F; será A Q F + C O F > A D C; y por lo mismo será tambien B P N + C S N > C E B: y sumando ordenadamente A Q F + C O F + B P N + C S N > A D C + C E B > A M B; si ahora por los puntos O, S, Q, P, etc. etc., se tiran arcos máximos se demostraria del mismo modo que el conjunto de ellos y de los otros que antes se habian tirado eran > que A M B: luego A M B es tal que al paso que crece se acerca á la curva A F C N B, pues que va teniendo mas puntos con ella, luego es menor que ella. L. Q. D. D.

29. Cos. a = cos. b cos. c + sen. b sen. c cos. *a*
Cos. b = cos. a cos. c + sen. a sen. c cos. *b* (a)
Cos. c = cos. a cos. b + sen. a sen. b cos. *c*

La *Dem.* Véase Vallejo, T. 1. § 474.

(b) Si en el sistema de ecuaciones (a) se cambia en una ecuacion cualquiera un lado en otro, y los ángulos opuestos; no se alterará la ecuacion, pues que no hace mas que trasformarse en otra del mismo sistema: por ejemplo: si en la primera trocamos a en c, c en a, *a* en *c*, tendremos que se nos convertirá en esta otra: cos. c = cos. b cos. a + sen. b sen. a cos. *c*; que es la ecuacion tercera del mismo sistema; y lo mismo sucederá en otra cualquiera, como se puede comprobar.

(c) De lo dicho en (b) se infiere que podrá cambiarse a en b, b en a, a en b, b en a; en todas las fórmulas generales que se saquen del sistema (a); ya que se ha visto que estas cantidades están entre sí en tal relacion que cambiar las unas en las otras no es mas que pasar de una ecuacion á otra.

(d) Como el sistema (a) es general, llamando a' b' c' a' b' c' los lados y ángulos del triángulo polar se convertirá el sistema en

$$\text{(e)}\quad \begin{aligned} \cos.\, a' &= \cos.\, b' \cos.\, c' + \text{sen.}\, b' \,\text{sen.}\, c' \cos.\, a' \\ \cos.\, b' &= \cos.\, a' \cos.\, c' + \text{sen.}\, a' \,\text{sen.}\, c' \cos.\, b' \\ \cos.\, c' &= \cos.\, a' \cos.\, b' + \text{sen.}\, a' \,\text{sen.}\, b' \cos.\, c' \end{aligned}$$

Sustituyendo en vez de a' su valor 180 — a. en vez de a' su valor 180 —a, y así sucesivamente se convertirá ese sistema (e) en este otro: cos. (180 — a) = cos. (180 — b) cos. (180 — c) + sen. (180 — b) sen. (180 — c) cos. (180 — a) etc. etc.; luego si trasformamos del modo dicho todo el sistema, y despues recordamos que el seno de un ángulo es el seno de su suplemento, y que del coseno se verifica lo mismo con solo cambiar el signo, tendremos:

$$\begin{aligned} -\cos.\, a &= \cos.\, b \cos.\, c - \text{sen.}\, b \,\text{sen.}\, c \cos.\, a \\ -\cos.\, b &= \cos.\, a \cos.\, c - \text{sen.}\, a \,\text{sen.}\, c \cos.\, b \quad \text{(f)} \\ -\cos.\, c &= \cos.\, a \cos.\, b - \text{sen.}\, a \,\text{sen.}\, b \cos.\, c \end{aligned}$$

(g) Para la demostracion de las fórmulas (f) no hay necesidad de recurrir á la consideracion del triángulo polar, como se ha hecho, sino que se pueden sacar directamente de las fórmulas (a): en efecto, eliminando cos. c, en la primera y tercera de las (a), sustituyendo (1 — sen.^{2} b) en vez de cos.^{2} b; se encuentra: Cos. a sen. b = sen. a cos. b cos. c + sen. c cos. a (h).

Cambiando en la (h) a en b y a en b; se encontrará la siguiente: cos. b sen. a = sen. b cos. a cos. a cos. c + sen. c cos. b (k); eliminando cos. b, entre la (h) y la (k), sustituyendo (1 — sen.^{2} c) en vez de cos.^{2} c, y en vez de sen. c su valor $\frac{\text{sen. b sen. } b}{\text{sen. } b}$ sacado de las ecuaciones $\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. a}} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. b}} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. c}}$; (que se demostrarán mas abajo) se obtendrá la primera de las (f), y se obtendrán en seguida las otras cambiando a en b, a en b, etc. etc. L. Q. D. D.

30.
$$\frac{\text{Sen. } a}{\text{Sen. a}} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. b}} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. c}} \text{ (a).}$$

Dem. (Véase Vallejo t. 1 § 475), solo advirtiendo que así como él dice "y haciendo operaciones análogas con las otras dos (M) etc." se puede ahorrar este trabajo teniendo presente aquello de cambiar a en b, a en b etc. etc.

31. Del sistema ((a) § 29) se saca,

$$\text{Cos. } a = \frac{\cos.\, \text{a} - \cos.\, \text{b} \cos.\, \text{c.}}{\text{sen. b sen. c}} \text{ (a).}$$

$$\text{Cos. } b = \frac{\cos.\, \text{b} - \cos.\, \text{a} \cos.\, \text{c}}{\text{sen. a sen. c}} \text{ (b).}$$

$$\text{Cos. } c = \frac{\cos.\, \text{c} - \cos.\, \text{a} \cos.\, \text{b}}{\text{sen. a sen. b}} \text{ (c).}$$

32.
$$\text{Sen. } \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(\text{a} + \text{b} - \text{c})\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(\text{a} + \text{c} - \text{b})}{\text{sen. b sen. c}}} \text{ (a).}$$

$$\text{Sen. } \tfrac{1}{2}\, b = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(\text{a} + \text{b} - \text{c})\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(\text{b} + \text{c} - \text{a})}{\text{sen. a sen. c}}} \text{ (b).}$$

$$\text{Sen. } \tfrac{1}{2}\, c = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\,(\text{b} + \text{c} - \text{a})\ \text{sen. } \frac{1}{2}\,(\text{a} + \text{c} - \text{b})}{\text{sen. a sen. b}}} \text{ (c)}$$

Dem. La ((a) § 31) nos da cos. $a = \frac{\cos.\, \text{a} - \cos.\, \text{b} \cos.\, \text{c}}{\text{sen. b sen. c}}$; recordando ahora que por ((L) § 11) tenemos cos. a = 1 — 2 sen.^{2} $\frac{1}{2}$ a, sustituyendo este valor; tendremos 1 — 2 sen.^{2} $\frac{1}{2}$ a = $\frac{\cos.\, \text{a} - \cos.\, \text{b} \cos.\, \text{c}}{\text{sen. b sen. c}}$: restando ambos miembros de 1, será 1 — 1 + 2 sen.^{2} $\frac{1}{2}$ a = 1 — $\frac{\cos.\, \text{a} - \cos.\, \text{b} \cos.\, \text{c}}{\text{sen. b sen. c}}$; lo que da simplificando, y reduciendo el entero á la especie del quebrado; 2 sen.^{2} $\frac{1}{2}$ a = $\frac{\text{sen. b sen. c} - \cos.\, \text{a} + \cos.\, \text{b} \cos.\, \text{c}}{\text{sen. b sen. c}}$ = $\frac{\text{sen. b sen. c} + \cos.\, \text{b} \cos.\, \text{c} - \cos.\, \text{a}}{\text{sen. b sen. c}}$ = (recordando que sen. b sen. c + cos. b cos. c = cos. (b — c) por ((b) § 11) = $\frac{\cos.\, (\text{b} - \text{e}) - \cos.\, \text{a}}{\text{sen. b sen. c}}$

$$= \text{(recordando ((d') § 19))} = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}((b-c)+a) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a-(b-c))}{\text{sen. b sen. c}}$$

$$= \text{(ejecutando las operaciones)} = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen. b sen. c}}$$

simplificando ahora por 2 y extrayendo la raiz cuadrada será Sen $\frac{1}{2}a =$

$$\pm\sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen. b sen. c}}}$$; y ejecutando lo mismo con las otras dos, será L. Q. D. D.

33. Si llamamos S, la suma de los lados (a + b + c), y ejecutamos operaciones análogas á las del (§ 16) las fórmulas (a) (b) (c) del (§ 32 se trasformarán en estas otras;

$$\text{Sen } \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{sen. } (\frac{1}{2}s-c) \text{ sen. } (\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen. b sen. c}}} \quad \text{(a).}$$

$$\text{Sen } \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\text{sen. } (\frac{1}{2}s-a) \text{ sen. } (\frac{1}{2}s-c)}{\text{sen. a sen. c}}} \quad \text{(b).}$$

$$\text{Sen. } \tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\text{sen. } (\frac{1}{2}s-a) \text{ sen. } (\frac{1}{2}s-b)}{\text{sen. a sen. b}}} \quad \text{(c).}$$

34. $$\text{Tan.}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a-b+c)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(b+c-a)} \quad \text{(a)}$$

$$\text{Cot.}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ cos. } (\frac{1}{2}a-b+c)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ cos. } (\frac{1}{2}b+c-a)} \quad \text{(b)}$$

Dem. Dividiendo la ecuacion (n) por (o) del (§ 11); elevando al cuadrado, simplificando y sustituyendo en vez de $\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}a}{\text{cos. } \frac{1}{2}a}$ su valor tan. $\frac{1}{2}a$ se tendrá: $\text{tan.}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1-\text{cos. } a}{1+\text{cos. } a} =$ sustituyendo en vez de cos. a su valor sacado de la ((a) § 31); y recordando lo ejecutado en el párrafo 32; se obtendrá la (a), y si despues de esta se sustituye en vez de a su valor 180 — a, en vez de a, — 180 a: y así en b, b etc. ejecutando las operaciones, y teniendo presente todo lo relativo á los signos de senos y cosenos, y la relacion de las líneas trigonométricas de los ángulos y sus complementos, se obtendrá la ecuacion (b). L. Q. D. D.

35. (a) $$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)} \times \text{cot. } \tfrac{1}{2}c.$$

(b) $$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)} \times \text{cot. } \tfrac{1}{2}c.$$

(c) $$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)} \times \text{tan. } \tfrac{1}{2}c.$$

(d) $$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)} \times \text{tan. } \tfrac{1}{2}c.$$

Dem. Las fórmulas (h) y (k) del (§ 29) dan

(e) Cos. a sen. c = cos. a sen. b — sen. a cos. b cos. c;

(f) Cos. b sen. c = cos. b sen. a — sen. b cos. a cos. c; sumando ordenadamente, recordando el (§ 11), y descomponiendo en factores se obtendrá

(g) (Cos. a + cos. b) sen. c = (1 cos. c) sen. (a + b); ahora la (a § 30) da

(h) (Sen. a + sen. b) sen. c = (sen. a + sen. b) sen. c:

(k) (Sen. a — sen. b) sen. c = (sen. a — sen. b) sen. c: dividiendo ahora las (h) y (k) por la (g) obtendremos;

(l) $$\frac{\text{sen. } a + \text{sen. } b}{\text{cos. } a + \text{cos. } b} = \frac{\text{sen. a} + \text{sen. b}}{\text{sen. (a + b)}} \times \frac{\text{sen. } c}{(1 - \text{cos. } c)};$$

(m) $$\frac{\text{sen. } a - \text{sen. } b}{\text{cos. } a + \text{cos. } b} = \frac{\text{sen. a} - \text{sen. b}}{\text{sen. (a + b)}} \times \frac{\text{sen. } c}{(1 - \text{cos. } c)};$$

ahora la ((f) § 19) da

(n) $\frac{\text{sen. } a \pm \text{sen. } b}{\text{cos. } a + \text{cos. } b} = \text{tan. } \frac{1}{2}(a \pm b)$; y la ((g) § 19) da tambien

(o) $\frac{\text{sen. a} + \text{sen. b}}{\text{sen. (a + b)}} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(\text{a} - \text{b})}{\text{cos. } \frac{1}{2}(\text{a} + \text{b})}$; y la ((k) § 19) da tambien

(p) $\frac{\text{sen. } c}{1 - \text{cos. } c} = \text{cot. } \frac{1}{2}c$; sustituyendo ahora en las (l) y (m) los valores sacados de las (n) (o) y (p), resultarán las (a) y (b).

Si en las (a) y (b) se sustituye en vez de a, 180 — a'; y así en las otras b, c, a, b, etc. etc., ejecutando las operaciones, teniendo muy presentes los signos de las líneas trigonométricas, lo que sucede con los arcos negativos, y recordando que un ángulo y tambien un lado de un triángulo esférico son menores que 180°; se sacarán las (c) y (d). L. Q. D. D.

36. Ahora puede ya formarse una tabla de siete fórmulas bastantes á resolver todos los triángulos esféricos en todos los casos que puedan ofrecerse; estas son las mismas obtenidas en los números anteriores, y con las mismas denominaciones, excepto la (2) y (3) en que se hace a + b + c = 2 p, y a + b + c = 2 P;