$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. a}} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. b}} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. c}} \text{ (1) (V. (a) § 30).}$$

$$\text{Tan.}^2 \tfrac{1}{2}\, a = \frac{\text{sen. (p — b) sen. (p — c)}}{\text{sen. p sen. (p — a)}} \text{ (2) (V. (a) § 34).}$$

$$\text{Cot.}^2 \tfrac{1}{2}\, \text{a} = \frac{\text{cos. (P — } b\text{) cos. (P — } c\text{)}}{\text{— cos. P cos. (P — } a\text{)}} \text{ (3) (V. (b) § 34).}$$

$$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}\,(\text{a} + \text{b}) = \frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(a - b)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(a + b)} \times \text{tan. } \tfrac{1}{2}\,\text{c (4) (V. (c) § 35)}$$

$$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}\,(\text{a} - \text{b}) = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\, a - c)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\, c + c)} \times \text{tan. } \tfrac{1}{2}\,\text{c (5) (V. (d) § 35).}$$

$$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}\,(a + b) = \frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{a} - \text{b})}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{a} + \text{b})} \times \text{cot. } \tfrac{1}{2}\, c. \text{ (6) (V. (a) § 35).}$$

$$\text{Tan. } \tfrac{1}{2}\,(a - b) = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(\text{a} - \text{b})}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,(\text{a} + \text{b})} \times \text{cot. } \tfrac{1}{2}\, c. \text{ (7) (V. (b) § 35).}$$

37. (a) Es notable la forma ((7) § 36) por la suma sencillez con que da las proposiciones del (§ 27); para sacarlas se debe tener presente que $a < 180$ y $\text{a} < 180$, etc. etc., y que de consiguiente $\tfrac{1}{2}\,(\text{a} - \text{b}) < \tfrac{1}{2}\,(180)$, $\tfrac{1}{2}\,(a - b) < \tfrac{1}{2}\,(180)$ etc. etc. Lo demás es muy sencillo y con solo hacer los varios supuestos, se sacarán las ilasiones.

38. Si suponemos $a = 90°$; el triángulo será rectángulo, y entonces obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones para los triángulos rectángulos.

(1) $\frac{1}{\text{sen. a}} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. b}} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. c}}$; V. ((a) § 30).

(2) Cos. a = cos. b cos. c; V. ((a) § 29).

(3) Cos. a = cot. b cot. c; V. (la primera de (f § 29); recordando que $\frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \text{cot.}$

(4) Cos. b = sen. c cos. b; V. (la segunda de (f § 29)).

(5) Cos. c = sen. b cos. c; V. (la tercera de (f § 29)).

(6) Tan. b = tan. a cos. c; V. ((h) § 29) recordando que $\text{tan.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$

(7) Tan. c = tan. a cos. b; esta se saca de la (6) combinando b en c, c en b.

(8) Tan. b = sen. c tan. b.

(9) Tan. c = sen. b tan. c.

Para obtener la (8) las fórmulas (1) y (4) dan $\text{sen. b} = \frac{\text{sen. c sen. } b}{\text{sen. } c}$

$\text{cos. b} = \frac{\text{cos. } b}{\text{cos. } c}$; dividiendo sen. b por cos. b se obtiene la ecuacion (8) y cambiando b en c, b en c resulta la (9).

Si se quiere introducir el radio en el precedente sistema, en vez de 1 póngase R en la (1), y en las demás multiplíquense por R los miembros que tengan una dimension menos que el otro.

39. Es notable el artificio ideado para volver á encontrar fácilmente las fórmulas del (§ 38): para esto, trazado el triángulo A, B, C, rectángulo en A, se traza un pentágono en cuyos lados se figuran los ángulos b, y c; el lado a, y los complementos de b, y c, tal como manifiestan las figuras 13 y 14; hecho esto recuérdese la siguiente proposicion: "El producto del radio por el coseno de un lado cualquiera del pentágono es igual al producto de las cotangentes de los dos lados adyacentes, y tambien al producto de los senos de los otros dos lados." Por ejemplo.

R cos. a = cot. b cot. c; que es la ecuacion (3).

R cos. c = sen. b sen. (90 — c) = sen. b cos. c; que es la (5).

R cos. a = sen. (90 — c) sen. (90 — b) = cos. b cos. c; que es la (2).

1 cos. c = cot. á cot. (90 — b) = cot a tan. b; lo que da tan. b =

$$\frac{1 \text{ cos. } c}{\text{cot. a}} = \text{cos. v} \times \frac{1}{\text{cot.a}} = \text{cos. } c \times \left(1 : \frac{\text{cos. a}}{\text{sen. a}}\right) = \text{cos. } c \times \frac{1 \text{ sen. a}}{\text{cos. a}}$$

= cos. c × 1 × tan. a = 1 × cos. c tan. a, que es la (6) etc. etc. Yo entiendo que este artificio no es mas que un medio para recordar las fórmulas, como si dijéramos reasumidas en la regla que se acaba de dar, y presentadas á la memoria por medio del pentágono; y así la regla es verdadera en el supuesto de tener ya las fórmulas demostradas; y así nada tienen que ver los lados ni los ángulos del pentágono, en cuanto se consideran en sí mismos, pues que son signos meramente arbitrarios: al menos yo así lo creo.

40. Si suponemos a = 90°, tendremos un sistema de ecuaciones análogo al anterior, que será el siguiente:

(1) $\frac{1}{\text{sen.}a} = \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. } b} = \frac{\text{sen. c}}{\text{sen. } c}$;

(2) — cos. a = cos. b cos. c;

(3) — cos. a = cot. b cot. c;

(4) Cos. b = sen. c cos. b;
(5) Cos. c = sen. b cos. c
(6) — tan. a = tan a cos. c;
(7) — tan. c = tan. a cos. b;
(8) Tan. b = tan b sen. b;
(9) Tan. c = tan. c sen. b;

Dem. Siendo a = 90°; da para el triángulo polar a' = 90°; luego para el mismo triángulo polar tendremos el sistema del (§ 39); entonces en vez de a b c a b c, habrá a' b' c' a' b' c'; y sustituyendo en vez de a', (180 — a) etc. etc., teniendo presente lo relativo á los signos se tendrá L. Q. S. D. D.

41. (a) En todo triángulo esférico rectángulo, cada lado del ángulo recto es de la misma especie que el ángulo opuesto; es decir, suponiendo a = 90°. Fig. 13. Si c > 90°, c > 90°; si c < 90° c, < 90°; si c = 90°, c = 90°; y lo mismo de b y b.

Dem. Véanse las ecuaciones (4) (5) (8) y (9) del (§ 38), háganse los supuestos de la cuestion y se observará que solo verificándose lo que se acaba de sentar se puede salvar la verdad de los signos. L. Q. D. D.

(b) En todo triángulo esférico rectángulo si uno de los tres lados es < 90°, los otros dos lados son de la misma especie entre sí; es decir, si suponemos a < 90° será, que si b > 90°, c > 90°; si b < 90°, c < 90°; si b = 90° c = 90°; pero si uno de los tres lados es > 90° los otros dos son de diferente especie entre sí; es decir, si suponemos a > 90°; si b > 90°, c < 90; si b < 90, c > 90. Y si uno de los tres lados = 90°, uno de los otros dos será = 90° *Dem.* Véase la fórmula (2 § 38); recuérdese que cos. 90° = o, háganse los supuestos de la cuestion, recuérdese lo de los signos y se tendrá L. Q. S. D. D.

42. Si desde un punto C. Fig. 15, se tira una perpendicular C D y diferentes oblicuas se verificará lo siguiente:

(a) Las oblicuas equidistantes de la perpendicular serán iguales. *Dem* Por la (2 § 38) tenemos cos. a = cos. b cos. c; ahora el triángulo B C D es rectángulo en D por el supuesto, luego será (llamando p á la C D, l á la C B, d á la B D) cos. l = cos. p cos. d; y como el triángulo E C D es tambien rectángulo en D, llamando l' al lado C E, y d' á la distancia D E será cos. l' = cos. p cos. d': la primera de estas dos últimas ecuaciones nos da, $\frac{\text{cos. l}}{\text{cos. } d}$ = cos. p, y la segunda nos da $\frac{\text{cos. l'}}{\text{cos. } d}$ = cos. p; luego será

$\frac{\text{cos. l}}{\text{cos. } d} = \frac{\text{cos. l'}}{\text{cos. } d'}$ (1) observando la (1) veremos que si las distancias son iguales, ó bien si $d = d'$; será cos. d = cos. d': lo que dará cos. l = cos. l', y como l y l' son positivos y menores que 180°, ya que cos. l = cos. l', será tambien l = l' L. Q. D. D. Y como suponiendo l = l' resultaria d = d' tendremos demostrada tambien la recíproca.

(b) Si la perpendicular p < 90°, las oblícuas mas distantes de la perpendicular serán mas largas. *Dem.* Por el supuesto y por ((b) § 41) l y d serán entre sí de la misma especie; supongamos que ambos sean < 90°; y observemos la ecuacion cos. l = cos. p cos. d, si d crece menguará cos. d; luego tambien menguará cos. l; luego crecerá l; L. Q. D. D. Y como si l crece menguará cos. l, y por tanto menguará tambien cos. d en cuyo caso crecerá d, tendremos demostrada la recíproca. Supongamos ahora que l y d sean ambos > 90; en este caso sus cosenos serán negativos; si crece d, crece (en cuanto á su valor absoluto) cos. d, luego crecerá tambien en el mismo sentido cos. l· luego crecerá l L. Q. Q. D. Con un discurso análogo se demostrará la recíproca.

(c) Cuando la perpendicular p > 90°, las oblicuas mas distantes de la perpendicular serán las mas cortas. *Dem.* Por el supuesto y por ((b) § 41) l y d serán entre sí de diferente especie; ahora considerando la ecuacion cos. l = cos. p cos. d; veremos que si en ella se supone l > 90° y d < 90°, si en este caso d crece, menguará cos. G, luego menguará tambien cos. l, y como l > 90° menguando su coseno menguará l; L. Q. D. D. Haciendo consideraciones análogas se demostraria lo mismo en otros supuestos, y lo mismo se demostraria de la recíproca.

(d) Cuando la perpendicular p = 90°, todos los arcos C E, C B, etc., tirados del punto C á la circunferencia D E F G B D, son = 90°; son además perpendiculares á la misma circunferencia, y el punto C es uno de los polos de la circunferencia. *Dem.* Tenemos, cos. l = cos. p cos. d; si se supone p = 90° será cos. l = o; luego l = 90° que es lo primero Q. D. D. Siendo p = 90° y l = 90°; será p = l, luego el ángulo C B D = C D B. y como por el supuesto C D B = 90°; será tambien C B D = 90°; luego el lado C B que es l será perpendicular á la circunferencia, que es lo segundo Q. D. D. Siendo todos los arcos tirados del punto C iguales á 90°, el punto C distará 90° por todas partes de la circunferencia, luego será el polo de esta que es lo tercero. Q. D. D.

(e) La perpendicular C B = p es la mas corta que se puede tirar del

punto C á la circunferencia; y si la C D se prolonga por la otra parte hasta encontrar la circunferencia en G, la C G será la mas larga que se podrá tirar del punto C. *Dem.* (Antes véase la figura 17.) La longitud de las líneas que se tiran del punto C depende de las distancias D B, D E, etc., por lo dicho en (b); luego la que no dista nada como es la C D, será la mas corta, y la que dista mas que es la C G, pues dista todo el arco D B G = 180°, será la mas larga. L. Q. D. D.

(f) La distancia de un punto C á la circunferencia se mide por la perpendicular C D < 90°. *Dem.* La medida do las distancias ha de ser un arco máximo, porque es la curva mas corta que se puede tirar de un punto á otro; pero entre estos arcos el mas corto es el perpendicular con tal que sea < 90°. por lo dicho (e); luego será L. Q. D. D.

RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS ESFERICOS

OBLICUANGULOS.

43. Fig. 13. Primer problema. Dados dos lados a y b y el ángulo comprendido *b*, encontrar *a*, *b*, y c: Resolucion. Las fórmulas (6) y (7) del (§ 36) darán á conocer $\frac{1}{2}(a+b)$ y $\frac{1}{2}(a-b)$; supongamos que se halla $\frac{1}{2}(a+b) = m$; $\frac{1}{2}(a-b) = n$; resultará $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = m$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = n$; lo que dará $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$; $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n$; ó bien multiplicando por 2; $a = m + n$; $b = m - n$; ahora la ((4) § 36) dará á conocer $\frac{1}{2}c$; luego tambien c; L. Q. D. H. y D. No admite sino una solucion ó es determinado.

Segundo problema. Dados dos ángulos *a*, y *b*; y el lado comprendido c, encontrar *c*, a, y b: Resol. Véanse las ecuaciones (4) (5) y (6) del (§ 36) y háganse las mismas consideraciones que en el anterior, y se tendrá L. Q. S. D. H. y D. Tambien es determinado. Para buscar *c* podria usarse de la (f) § 36 si se conociere la especie de *c*.

Tercer problema. Dados los tres lados a, b, c, hallar los tres ángulos *a*, *b*, *c*: Resol. La fórmula (2 § 36) resuelve el problema. Y si se quiere poner la ecuacion en forma que le sea aplicable inmediatamente el cálculo logarítmico, recordando ((9) § 15) tendremos: 2 Log. tan. $\frac{1}{2}a$ = log. sen. (p — b) + log. sen. (p — c) + comp. log. sen. p + comp. log. sen. (p — a): y haciendo lo mismo análogamente para *b* y *c*; se tendrá L. Q. S. D. H. y D. Es tambien determinado.

Cuarto problema. Dados los tres ángulos *a*, *b*, *c*, hallar los tres lados a, b, c.

Resol. De la fórmula (3 § 36) y de (9 § 15); análogamente al caso anterior se sacará: 2 log. cot. $\frac{1}{2}$ a = log. cos. (P — *b*) + log. cos. (P — *c*) + comp. log. cos. (P — *a*) comp. log. sen. (90° × 3 — P): aquí debe observarse que en vez de — cos. P se ha sustituido sen. (90° × 3 —P); para demostrar que — cos. P = sen. × (90° × 3 — P), se ha de considerar que; sen. (90° × 3 — P) = sen. (90 + 180 — P) = sen. (180 — (P — 90°)) = sen. (P — 90°) = (por (l § 8)) = — cos. P: L. Q. D. H. y D.

Quinto problema. Dados los lados a y b, y el ángulo *a* opuesto al lado a, encontrar los ángulos *b* y *c*; y el lado c.

Resol. La ((1) § 36) dará sen. a : sen. b : : sen. *a* : sen. *b*; lo que dará dos valores para b; porque sen. *b* = sen. (180 — *b*); tomando un valor de *b*; entonces nonoceremos a, b, *a*, *b*; y las fórmulas (4 y 6 § 36) nos darán á conocer c y *c*: L Q. D. H. y D.

Sexto problema. Dados dos ángulos *a*, *b*, y el lado a opuesto á uno de estos ángulos, encontrar *c*, b, c.

Resol. La ((1) § 36) da sen. *a* : sen. *b* : : sen. a : : sen b; entonces haciendo consideraciones análogas á las del caso anterior, y con las fórmulas (4 y 6 § 36) se obtendrá L. Q. S. D. H. y D.

RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS ESFERICOS

EN QUE HAYA UN LADO O UN ANGULO RECTO.

44. Las resoluciones del § anterior son generales á todos los casos, pero en la resolucion de los triángulos en que un ángulo ó un lado es recto se puede hacer alguna simplificacion echando mano de sus formas peculiares (§ 38 y § 40), y para esto sirve el párrafo presente.

Primer problema. Dado el triángulo rectángulo en *a* y sus dos lados b, y c; hallar su hipotenusa a, y sus ángulos *b* y *c*.

Resolucion. Las fórmulas (2, 8, 9, (§ 38)) darán lo Q. S. D. H. y D. Este problema es determinado.

Segundo problema. Dado a recto, el ángulo oblicuo *b*, y el lado c; hallar a b *c*.

Resol. Las ecuaciones (5, 7, 8 (§ 36)) dan L. Q. S. D. H y D. El problema es determinado.

Tercer problema. Dado *a* recto, la hipotenusa a, y el ángulo oblicuo *b*; hallar b, c, *c*.

Resol. Las fórmulas (1, 3, 7, (§ 38)) dan L. Q. S. D. H. y D. El problema es determinado.

Cuarto problema. Dado *a* recto, y los ángulos oblicuos *b*, *c*; hallar a, b, c.

Resol. Las fórmulas (3, 4, 5, (§ 36)) dan L. Q. S. D. H. y D. El problema es determinado.

Quinto problema. Dado *a* recto, la hipotenusa a y el lado b; hallar *b*, *c*, c.

Resol. Las fórmulas (1, 2, 6, (§ 38)) dan L. Q. S. D. H. y D. El problema es determinado.

Sexto problema. Dado *a* recto, el ángulo oblicuo *b* y el lado b, hallar a, c, *c*.

Resol. Las fórmulas (1, 4, 8, (§ 38)) dan L. Q. S. D. H. y D. El problema admite dos soluciones.

45. Suponiendo a = 90°, se ofrecen seis problemas como en el § anterior; con la diferencia de haber de echar mano de las fórmulas del (§ 40).

Nota. Si á mas de ser *a* recto, lo es tambien *b*; entonces tendremos que el triángulo será birectángulo; y lo mismo si a y b valen 90°; de modo que teniendo *a* = *b* = 90°, las fórmulas (4, 5 (§ 38)) darán b = 90°: y además *c* = c; y si a = b = 90°, las fórmulas (4 y 5 (§ 40)) darán *b* = 90°; y además c = *c*, como es fácil comprobar.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE NUEVO LEON

OBSERVACIONES acerca de algunas proposiciones que sienta Vallejo en su tratado de Algebra, con la demostracion de un nuevo caso de igualdad y otro de semejanza de triángulos.

Vallejo en su compendio de Matemáticas, ed. 1835, § 331, esc. 4, pág. 359, raciocina del modo siguiente: en el supuesto de tener AD : BC : : ad : bc; "si los dos primeros términos de la proporcion del supuesto, los multiplicamos por AB, y los otros dos por ab, se nos convertirá en AD × AB : BC × AB : : ad × ab : bc × ab. Esta proporcion compuesta la podremos descomponer (190) en las dos proporciones simples siguientes (AD : AB : : ad : ab y AB : BC : : ab : bc)." En contra de tal raciocinio pueden hacerse al parecer, las reflexiones siguientes; en el pár. (190) se dice que si dos ó mas proporciones se multiplican ordenadamente el resultado será una proporcion, mas no se afirma allí, ni pudiera afirmarse que si teniendo una proporcion se descomponen sus términos en factores y estos se ponen en tal órden que multiplicados ordenadamente vuelvan á dan la proporcion; ya se siga de aquí que los factores puestos en dicho órden estén tambien en proporcion: y esto es cabalmente lo que necesitábamos: y lo que allí no se dice y repito que ni decirse podia : en efecto : sea (a : b : : c : d) será tambien (am : bm : : cn : dn) mas no por eso tendremos, (a : m : : c : n) ni (m : b : : n : d) porque alternando en ambas, seria, (a : c : m : n) y (m : n : : b : d) resultados falsos porque la razon (a : c) lo mismo que la (b : d) son razones fijas pues que son razones de cantidades dadas, cuando la razon (m : n) puede ser una cualquiera, pues que sean cuales fueren, con tal que se multipliquen los dos términos de la razon por una misma cantidad, satisfarán siempre á lo que se necesita.

Para que esto se palpe hagamos una comprobacion numérica; sea (Ad = 12, BC = 16, ad = 6, bc = 8) y tendremos (12 : 16 : : 6 : 8) si ahora suponemos (AB = 7, ab = 3) será (11 × 7 : 16 × 7 : : 6 × 3 : 8 × 3) lo que segun el autor nos daria las dos siguientes (12 : 7 : : 6 : 3) y (7 : 16 : : 3 : 8) resultados absurdos. Aun hay mas, si de (AD × AB : BC × AB : : ad × ab : bc × ad) (A) salen las proporciones (AD : AB : : ad : ab y AB : BC : : ab : bc) (B) si suponemos que la del supuesto (AD : BC : :

ad : bc) (C) se multiplica por AC y ac en vez de AB y ab, en lo que no hay, ni puede haber inconveniente; tendremos (AD × AC : BC × AC : : ad × ac : bc × ac) (D); y aplicando el raciocinio del Autor, será (AD : AC : : ad : ac (M) y además tendremos (AC : BC : : ac : bc) (N). Ahora bien:

La primera de las (B) alternadas dará (AD : ad : : AB : ab) la del supuesto (C) alternada dará (AD : ad : : BC : bc) y alternando tambien la (M) será (AD : ad : : AC : ac) resultado que nos diria que los triángulos son semejantes aun sin suponer iguales los ángulos BAC, bac; lo que es falso, pues que si no se exigiera (BAC = bac) se puedenconstruir muchos triángulos que tengan la condicion (AD : BC : : ad : bc) y sin embargo no sean semejantes.

Ya se deja suponer que el que escribe estas líneas no se atreverá á decir que Vallejo se haya equivocado; y que recela que estas dificultades nazcan de la escasez de inteligencia del que las opera: no obstante, quedaria muy agradecido el infrascrito á quien se las deshiciese.

El mismo Vallejo en su compendio de matemáticas asienta el siguiente *Teorema.*

Si dos variables X, Z, creciendo ó menguando, se pueden acercar tanto como se quiera á dos constantes A, B, la relacion de las constantes será la misma que la de las variables, y se tendrá A : B : : X : Z.

A primera vista se ofrecen algunas cuestiones que no ha sabido resolver completamente el que escribe estas líneas.

1.ª ¿Es verdadero el teorema suponiendo las variables en cualquier punto de aumento ó disminucion?

2.ª ¿Debe suponerse alguna ley fija de aumento ó disminucion en las variables para que se verifique siempre el teorema?

3.ª ¿En tal caso, cuál debe ser esta ley?

4.ª Como podria hacerse palpable la verdad del teorema aplicándole el ejemplo siguiente: Se piden los números cuya suma sea = 8: y otros dos cuya suma sea 18. Tendremos: V + X = A = 8: Y + Z = B= 18: en estos casos tenemos A, B constantes: V, X, Y, Z, variables: V puede acercarse tanto como se quiera á A: lo propio puede decirse de X: además; Y puede acercarse tanto como se quiera á B; y lo mismo puede hacer Z, resultará pues: V : Y : : A : B.

X : Z : : A : B, y sin embargo, el que esto escribe no ha podido apear cómo pueda resultar siempre exacto: si se hace la prueba dando alguno de los valores, sean estos enteros ó quebrados, de los infinitos que pueden tener las variables, se palpará la dificultad.

Vallejo aplica este teorema para probar que: las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios ó diámetros; pero esta aplicacion no parece pueda servir para arrojar luz sobre las cuestiones propuestas arriba.

T. Si dos cantidades X y Z son tales, que se puedan acercar continuamente creciendo en una misma proporcion á una misma cantidad A, dichas cantidades serán iguales.

Dem. Porque no podemos suponer que Z = X + a, pues que entonces creciendo Z creceria X + a luego creceria la cantidad a, de manera que se tendria, que expresando por X' y Z' los nuevos valores que fuesen tomando X y Z, se tendria que Z — X' > Z, y como por ser A > Z se tendria A — X > Z — X, y como por el supuesto seria Z — X = a; resultaria A — X > a; luego X no se podria acercar continuamente á A creciendo, y como el mismo absurdo se seguiria de suponer Z < X, resulta que Z = X, que es L. Q. D. D.

T. Si dos cantidades X y Z son tales que se puedan acercar continuamente creciendo ó menguando á dos constantes A y B, se tendrá que A : B : : X : Z.

Dem. Supongamos primeramente A > X, B > Z; entonces tendremos que $\frac{X}{A} < 1$, $\frac{Z}{B} < 1$; ahora si suponemos X = A — a tendremos que $\frac{X}{A} = \frac{A - a}{A} = 1 - \frac{a}{A}$; luego la diferencia de la unidad á $\frac{X}{A}$ será menor que a, á no ser que a y A sean quebrados, luego si A — X puede ser menor que cualquier cantidad dada, con mas razon lo podrá ser $1 - \frac{X}{A}$, y como lo mismo se verifica de $\frac{Z}{B}$ resulta (T precedente) que $\frac{X}{A} = \frac{Z}{B}$ ó A : B : : X : Z.

Si a y A fuesen quebrados; entonces suponiendo $a = \frac{m}{n}$, $A = \frac{b}{c}$ siendo m, n, b y c números enteros, tendremos que podrá hacerse crecer la X,

hasta que se tenga $a = \frac{m}{n} < \frac{bd}{c}$, expresando por d la cantidad dada; de manera que se ha de demostrar que $\frac{m}{n} : \frac{b}{c} < d$, en el supuesto que $\frac{m}{n} < \frac{bd}{c}$ y en este caso tendremos dividiendo ambas cantidades por $\frac{b}{c}$, $\frac{m\,c}{n\,b} < d$, ó $\frac{m}{n} : \frac{b}{c} < d$.

Supongamos ahora $A < X$, $B < Z$, en cuyo caso $\frac{A}{X} < 1$, $\frac{B}{Z} < 1$, y suponiendo que $A = X - a$, tendremos que $\frac{A}{X} = \frac{X - a}{X} = 1 - \frac{a}{X}$ y como $\frac{a}{X}$ expresa la diferencia de la unidad á $\frac{A}{X}$ que es menor que $X - A$ en el caso que a y x no sean quebrados y lo mismo se verifica con $\frac{B}{Z}$, resulta que estas cantidades son tales, que creciendo se pueden acercar continuamente á la unidad, lo que nos da $\frac{A}{X} = \frac{B}{Z}$ ó $A : B :: X : Z$, como en el caso en que a y X sean quebrados se demostraria con un discurso análogo al anterior, resulta L. Q. D. D.

Dem. 2.ª Si $A > X$ y $B > Z$; expresando por a la cantidad que se nos da, podemos hacer crecer X hasta que se tenga $A - X < A\,a$, y en este caso tendremos dividiendo ambos miembros por A, $1 - \frac{X}{A} < a$, y como lo mismo se verifica de Z y B resulta que $\frac{X}{A}$ y $\frac{Z}{B}$ se pueden acercar siempre creciendo á una misma cantidad, luego serán iguales, lo que nos da $A : B :: X : Z$.

Si $X > A$ y $Z > B$ haciendo menguar á X, hasta que resulte $X - A < A\,a$, siendo a la cantidad dada; en cuyo caso tendremos aun con mas razon, $X - A < a\,X$, lo que nos da $1 - \frac{A}{X} < a$, y como lo mismo se

verifica de Z y B resulta que $\frac{A}{X} = \frac{B}{Z}$ ó $A : B :: X : Z$, que es L. Q. D. D.

T. Si X y Z son tales, que se puedan acercar á A y B tanto como se quiere, el producto X Z se puede hacer acercar á A B tanto como se quiere.

Dem. Expresando por c el cociente de la cantidad dada por A, dicha cantidad quedará expresada por A c; ahora suponiendo $A > X$ y $B > Z$, suponiendo que Z crece hasta que se tenga $B - c < Z$, entonces $\frac{B - c}{Z}$ será un quebrado, y considerando ahora Z como constante, $A\,\frac{B - c}{Z}$ será una cantidad constante y menor que A; luego se puede hacer crecer la X hasta que se tenga $X > A\,\frac{B - c}{Z}$ que, multiplicando ambas cantidades por Z y ejecutando la operacion indicada, resulta $X\,Z > A\,B - A\,c$ ó $A\,B - X\,Z < A\,c$.

Si $A < X$ y $B < Z$, expresando la cantidad dada por $A\,c'$ y considerando que Z mengua hasta que $B + c' > Z$, $A\,\frac{B + c'}{Z}$ será una cantidad constante; considerando á Z constante y mayor que A, y suponiendo que X mengua hasta que $X < A\,\frac{B + c'}{Z}$, quitando el divisor y ejecutando la operacion indicada, resulta $X\,Z < A\,B + A\,c'$ ó $X\,Z - A\,B < A\,c'$.

Si $X > A$ y $Z < B$, entonces podemos suponer otras dos variables tales como $X' < A$ y $Z > B$, que se puedan acercar á A y B tanto como se quiera, creciendo X' con la misma ley que Z, y menguando Z' con la misma ley que X, y entonces tendremos que en cualquier estado de la cuestion será $X\,Z < X'\,Z'$ y $X\,Z > X'\,Z$ y como $X\,Z'$ y $X'\,Z$ se pueden acercar á A B tanto como se quiera, resulta que con mas razon se podrá acercar X Z; luego resulta L. Q. D. D.

T. Cuando un fluido sale por un orificio muy pequeño, estando el nivel del fluido á una altura constante, la velocidad del fluido que sale será la misma que adquiriria un cuerpo pesado cayendo libremente de una altura igual á la del fluido sobre el orificio.

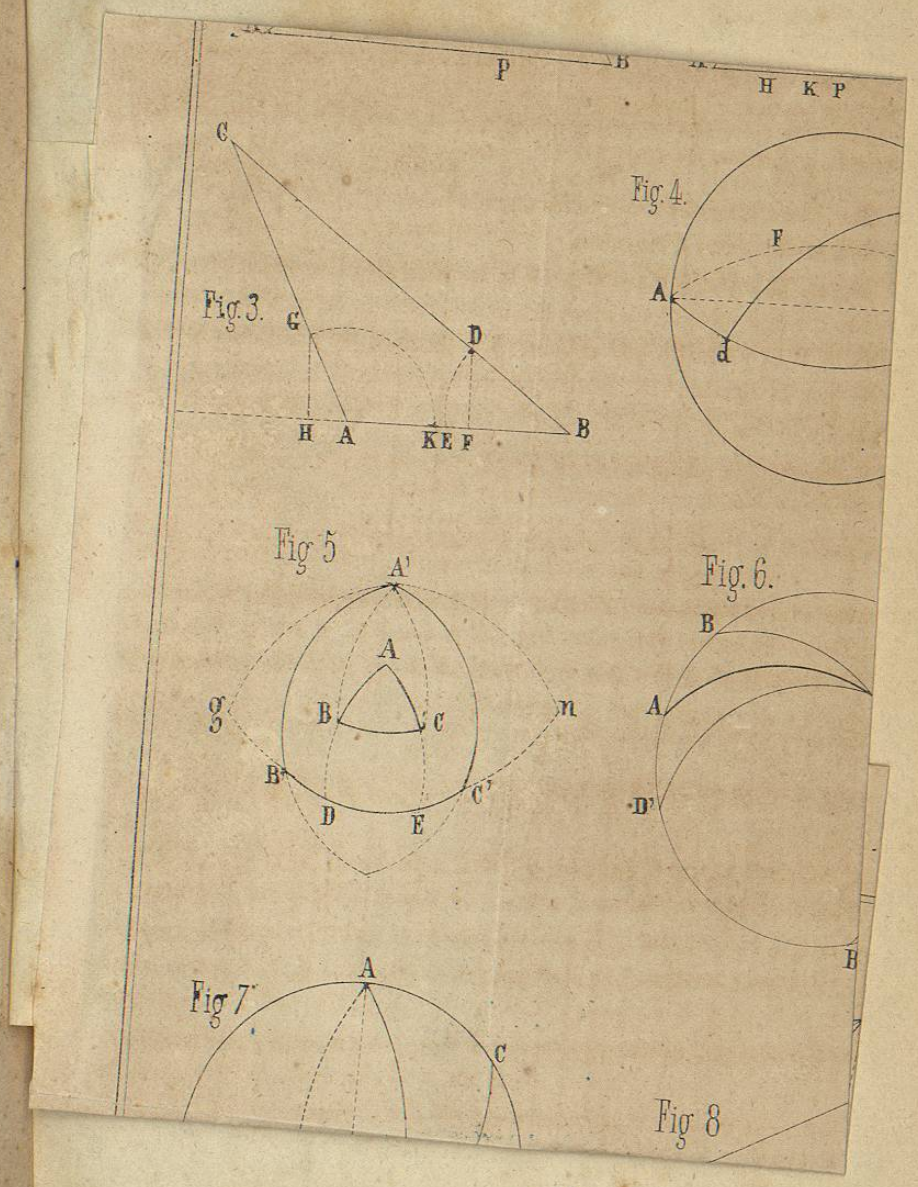
FONDO BIBLIOTECA PÚBLICA
DEL ESTADO DE NUEVO LEON

Dem. Si expresamos por F la fuerza motriz ó peso de la columna que descansa sobre el orificio, tendremos que la capa contigua al orificio correrá, con movimiento elevado, en el instante de salir un espacio expresado por el grueso de una capa de fluido que, expresándolo por e y por v la velocidad, se tendrá $v = \sqrt{2 F e}$, ahora expresando por n el número de capas que contiene el fluido, expresando por A la altura, será $A = n e$, y $F = g n$, lo que nos da $v = \sqrt{2 g n \frac{A}{n}} = \sqrt{2 A g}$, que es L. Q. D. D.

T. Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales las bases, alturas y ángulos opuestos á las bases.

Dem. Si superponemos Fig. 16. la base b c á la B c de manera que el punto c carga sobre C y b sobre B; circunscribiendo un círculo en el triángulo A B C, y tirando por el punto A la paralela M N, el punto a deberá caer por la igualdad de las alturas en un punto de la paralela, y por la igualdad de los ángulos A y a en un punto de la circunferencia; ahora si cae en el punto A quedarán confundidos, y en el punto A' resultará que tendrán un lado igual adyacente á dos ángulos iguales; luego serán iguales que es L. Q. D. D.

T. Dos triángulos son semejantes cuando tienen las bases proporcionales con las alturas é iguales los ángulos opuestos á las bases.

Dem. Si en los triángulos Fig. 17. A B c y a b c suponemos B A C = b a c y B c : A D : : b c : a d, tomando en la A D desde A una parte igual á a d, y tirando por su extremo d' la b' c' paralela á B C, los triángulos semejantes A B C y A b' c' nos darán, B C : A D : : b' c' : A d', y como A d' = a d, y de esta proporcion y la del supuesto resulta b c = b' c' los triángulos a b c y A b' c' tendrán iguales las bases, alturas y ángulos opuestos á las bases, luego son iguales, y los A B C y a b c semejantes, que es L. Q. D. D.

CAPILLA ALFONSINA
FIN
UNL
FONDO BIBLIOTECA PUBLICA
DEL ESTADO DE NUEVO LEON