El espesor de los muros de contension ó de terraplen está expresado en la fórmula : $e = c \times a$ siendo *e* el espesor correspondiente al muro de que se trata, *a* la altura del mismo, y *c* un coeficiente que varia de 0'13 á 0'54 para los muros rectos en que el espesor es igual en toda su altura, y de 0'08 á 0'50 para el espesor en la parte superior de los muros que tienen un taluz exterior cuya base es un vigésimo de su altura. Generalmente el espesor dado por las fórmulas es el que necesita el muro para equilibrarse con el empuje de las tierras; y por esto se le dará mas espesor, ó se aumentará el taluz.

Los muros de contension se refuerzan por medio de otros muros adosados á los primeros y formados con el mismo material : estos muros se llaman *contrafuertes*.

Los contrafuertes pueden ser interiores ó exeriores: los primeros tienen la ventaja de dividir el prisma llamado de mayor empuje disminuyendo este, pero los segundos ligan mejor la construccion.

Para obtener los espesores que en determinados casos deben darse á las bóvedas y sus estribos se podrá consultar el manual de puentes y calzadas de la Enciclopedia Roret.

Hay que considerar dos clases de resistencia : *instantánea y permanente*. Se llama resistencia instantánea la del cuerpo que á poco de estar sujeto á un esfuerzo se rompe ó descompone, y resistencia permanente la del cuerpo sometido á un esfuerzo que puede resistir por un tiempo indefinido : este esfuerzo ó resistencia es el que resulta de las fórmulas y cálculos del texto.

En la resistencia á la flexion debe tenerse presente que cuando la carga se halla uniformemente repartida en toda la longitud de una pieza produce los mismos efectos que si estuviese reunida y aplicada en su punto medio.



Cuando una pieza se considera empotrada por un extremo y siendo de seccion cuadrada tiene una de sus diagonales horizontal y la otra vertical, vendrá expresada su resistencia en la fórmula $C = \frac{c \times a}{8'485 L}$ cuyas letras representan los mismos elementos que se indican en la página 169. De esto se puede deducir, que la resistencia de una pieza colocada del modo dicho es menor que en el caso de tener dos de sus lados en sentido horizontal.

Para cuando la seccion sea un rectángulo hueco, ó presente la forma llamada *doble T* se usará la fórmula

$C = \frac{c}{6} \times (a^2 l - a'^2 l')$ siendo *a'* y *l'* la altura y base respectivas del rectángulo interior, y *c* el coeficiente expresado en la citada página.

Si la pieza tiene una posicion inclinada se descompondrá la fuerza á que esté sujeta en otras dos, una en el sentido de su longitud, y otra perpendicular á su direccion. Para calcular la resistencia de una pieza inclinada deberá atenderse á la vez á las dos fuerzas, teniendo presente que la primera será de traccion ó compresion, segun el sentido en que obre, y la segunda corresponderá á la flexion : las fórmulas del texto servirán para determinar la resistencia pedida, ó para calcular la seccion, segun el esfuerzo á que deba sujetarse.

Cuando no es posible proporcionarse una pieza de madera del grueso que se necesita, es preciso unir varios maderos cuyo conjunto ofrezca la resistencia apetecida. Esta union puede hacerse *de una manera íntima y de una ma-*

*nera lijera*. La union se llama íntima si los maderos están sujetos de modo que no puedan resbalar uno á lo largo de otro; y la union se hace de una manera lijera cuando los maderos colocados juntos pueden resbalar fácilmente. La union íntima de los maderos puede hacerse con pasadores ó abrazaderas de hierro, con tarugos de madera y por medio de un ensamblaje á diente. Por este medio se obtendrán piezas de tanta resistencia como se quiera, pues, bastará darles el grueso correspondiente juntando los maderos que sean menester.

Se puede reforzar una pieza de madera uniéndole en la parte inferior una plancha de hierro, ó tambien dos planchas á las caras laterales que dan mas resistencia al conjunto. Estas planchas suelen ser de hierro forjado, pero tambien puede reforzarse una viga con un arco de hierro fundido y su cuerda de hierro forjado, unidas estas piezas, si se quiere, con piés derechos y cruces de san Andrés. Para los efectos de la resistencia se considera el conjunto como una sola pieza.

Resistencia á la flexion. La resistencia de un cuerpo á la flexion es la que opone á todo esfuerzo que obra perpendicularmente á su longitud, como sucede en las palancas, balancines, etc.

Un cuerpo puede estar sometido á la flexion de cuatro maneras distintas: 1.ª empotrado por un extremo y cargado en el otro extremo ó en cualquier punto de su longitud: 2.ª sostenido simplemente por en medio y cargado por ambos extremos: 3.ª sostenido simplemente por sus extremos y cargado en cualquier punto de su extension; y 4.ª empotrado por sus dos extremos y cargado á una distancia cualquiera de ellos.

1.ª Si una pieza rectangular *st* (fig. 50) se halla empotrada por un extremo *su* y está cargada en el otro ex-



tremo *t*, podrá resistir sin ser alterada una carga representada por la fórmula $C=\dfrac{c\times a^2\times l}{6\times L}$ en la cual C es el número de kilógramos de la carga que podrá suportar; L la longitud de la pieza expresada en centímetros ó la distancia del punto en que carga el peso á la línea *us* de encajamiento; *a* la altura ó grueso *us* de la pieza; *l* la latitud ó ancho en el sentido horizontal, y *c* un coeficiente variable segun los casos deducidos por experiencias, cuyo valor es de 600 para el hierro forjado, 750 para el hierro colado, y 60 para la encina ó abeto.

Si en la fórmula general se sustituye cada uno de los valores indicados y se simplifica todo lo posible, el resultado se tendrá:

Para las piezas de hierro forjado $C=\dfrac{100\times a^2\times l}{L}$

Para las piezas de id. colado $C=\dfrac{125\times a^2\times l}{L}$

Para las piezas de madera $C=\dfrac{10\times a^2\times l}{L}$

En estas fórmulas se observa que la resistencia de una pieza á la flexion es directamente proporcional á su ancho y al cuadrado de su grueso, pero está en razon inversa de su longitud; de donde resulta, que aumentará la resistencia de la pieza en cuanto sea mas corta y se coloque de modo que la altura ó grueso *us* sea la mayor de las dimensiones transversales.

De estas fórmulas se deduce la siguiente regla general: *para calcular la resistencia á la flexion de una pieza empotrada por un extremo y cargada en el otro extremo, se multiplicará el coeficiente correspondiente por el ancho y por el cuadrado de la altura ó grueso, dividiendo el resultado por la longitud de la pieza en centímetros.*

Ejemplo: Calcular el peso que podrá sostener, sin ser alterada, una pieza rectangular *st* empotrada por un extremo, que tiene 12 centímetros de ancho, 8 centímetros de grueso y 1'25 m. de longitud.

De hierro forjado $C=\frac{100\times(8)^2\times12}{125}=614'4$ kg.

De hierro colado $C=\frac{125\times(8)^2\times12}{125}=768$ kg.

De encina ó abeto $C=\frac{10\times(8)^2\times12}{125}=61'44$ kg.

Estos resultados expresan la resistencia de la pieza colocada de modo que la menor dimension, 8 cent., esté en sentido vertical, pero si se fija de manera que le sirva de altura ó grueso la dimension de 12 cent., su resistencia será mucho mayor, como se ve por los cálculos siguientes:

De hierro forjado $C=\frac{100\times(12)^2\times8}{125}=921'6$ kg.

De hierro colado $C=\frac{125\times(12)^2\times8}{125}=1152$ kg.

De encina ó abeto $C=\frac{10\times(12)^2\times8}{125}=92'16$ kg.



Si la pieza fuese de seccion cuadrada, el ancho seria igual á la altura ó grueso y se tendria $a=l$, en cuyo caso se podria sustituir $a$ en vez de $l$ en la fórmula general, de donde resultaria:

$$C=\frac{100\times(a)^3}{L};\ C=\frac{125\times(a)^3}{L};\ C=\frac{10\times(a)^3}{L}.$$

Si la pieza se supone cilíndrica, las fórmulas correspondientes serán como sigue, representando el diámetro por $d$.

Para el hierro forjado $C=\frac{60\times(d)^3}{L}$.

Para el hierro colado $C=\frac{75\times(d)^3}{L}$.

Para la encina y abeto $C=\frac{6\times(d)^3}{L}$.

Para calcular el valor de la seccion que corresponde á la pieza, conociendo la carga que debe suportar, se despejará en cada una de las fórmulas deducidas la cantidad correspondiente, y se hallará:

| Materias. | Seccion rectangular. | Seccion cuadrada. | Seccion cilíndrica. |
|---|---|---|---|
| De hierro forjado. . . | $a^2l=\frac{C\times L}{100}$. . . . | $a^3=\frac{C\times L}{100}$. . . . | $d^3=\frac{C\times L}{60}$ |
| De hierro colado.. . . | $a^2l=\frac{C\times L}{125}$. . . . | $a^3=\frac{C\times L}{125}$. . . . | $d^3=\frac{C\times L}{75}$ |
| De encina ó abeto. . . | $a^2l=\frac{C\times L}{10}$. . . . | $a^3=\frac{C\times L}{10}$. . . . | $d^3=\frac{C\times L}{6}$ |

En todas las fórmulas deducidas en este capítulo se ha prescindido del peso absoluto de la pieza, el cual deberá entrar en el cálculo cuando sea de alguna consideracion. En este caso se hallarán las dimensiones de la pieza por las fórmulas anteriores, se determinará con ellas su peso aproximado y uniendo la mitad de este peso á la carga propuesta se calcularán nuevamente las dimensiones, y estas serán las verdaderas.

Ejemplo: Determinar las dimensiones de la seccion rectangular para una pieza de 2 metros, que empotrada por un extremo, debe sostener en el otro una carga de 75 kilógramos.

Si la pieza es de hierro forjado será $a^2l=\dfrac{75\times200}{100}=150.$

Si es de hierro colado. . . . $a^2l=\dfrac{75\times200}{125}=120.$

Si es de encina ó abeto. . . . $a^2l=\dfrac{75\times200}{10}=1500.$

Suponiendo ahora que el ancho $l$ de la pieza es de 5 centímetros, en los dos primeros casos resultará: $5a^2=150$ si es de hierro forjado, y $5a^2=120$ si fuese colado; de donde se deduce $a=\sqrt{150\setminus5}=5'48$ cent. y $a=\sqrt{120\setminus5}=4'9$ cent.

Es decir, que si la pieza es de hierro forjado y se le dan 5 centímetros de ancho, su grueso ó altura deberá tener 5'48 centímetros; y si es de hierro colado, teniendo el mismo ancho, le corresponderán 4'9 centímetros de grueso.

Si la pieza fuese de madera, suponiendo el ancho $l$ de



10 centímetros tendríamos $10a^2=1500$, de donde sale $a=\sqrt{150}=12'25$ centímetros.

De modo, que si la pieza es de madera, dándole 10 centímetros de ancho, su altura ó grueso corresponderá á 12'25 centímetros.

Con las dimensiones halladas se calculará el peso de la barra para cada caso especial, se unirá la mitad de este peso á la carga de 75 kg., y repitiendo nuevamente las operaciones con esta suma, se deducirán las dimensiones verdaderas que corresponden á la pieza.

Si la pieza fuese de seccion cuadrada se tendria:

$$a=\sqrt[3]{\frac{75\times200}{100}}=5'3 \text{ cent.} \quad a=\sqrt[3]{\frac{75\times200}{125}}=4'9 \text{ c.}$$

$$a=\sqrt[3]{\frac{75\times200}{10}}=11'44 \text{ cent.}$$

Por manera, que siendo la seccion cuadrada deberia tener su lado 5'3 cent., 4'9 cent. ú 11'44 cent., segun la pieza fuese de hierro forjado, de hierro colado ó de madera.

Si la barra fuese cilíndrica tendríamos por lo dicho

$$d=\sqrt[3]{\frac{75\times200}{60}}=6'3 \text{ cent.} \quad d=\sqrt[3]{\frac{75\times200}{75}}=5'8 \text{ c.}$$

$$d=\sqrt[3]{\frac{75\times200}{6}}=13'5 \text{ cent.}$$

De modo que cuando se emplee una barra cilíndrica, su diámetro será de 6'3 contímetros, 5'8 centímetros ó

13'5 centímetros, segun sea de hierro forjado, de hierro colado ó de madera.

Piezas de igual resistencia. La experiencia y el cálculo han dado á conocer hasta qué punto se puede disminuir el grueso de una pieza empotrada por un extremo y cargada en el otro extremo sin que pierda nada de su solidez y resistencia. La forma mas propia y resistente que se le puede dar para descargarla en cuanto es posible, sin perjudicar su resistencia en lo mas mínimo, es haciéndola terminar en su cara inferior por una curva parabólica.

Para obtener la forma que conviene dar á la pieza, se procederá como sigue: sea *bc* (fig. 50*) el grueso ó altura correspondiente á la pieza segun las fórmulas anteriores: colóquese esta misma magnitud desde *b* á *d* y divídase la *bc* en cuatro ó mas partes iguales, igualmente que la longitud *bn*: por los puntos *s, t, q* se trazarán las paralelas *sh, tg, qe* y desde el punto *d* se dirigirán por los puntos de division de la longitud las líneas *de, dg, dh,* las cuales determinarán por su interseccion con las paralelas, varios puntos de la parábola *ceghn*. Esta curva indica la cantidad de materia que puede rebajarse de una pieza sin perjudicar de ningun modo su solidez, pues con dicha curva se proporciona á la pieza una resistencia igual en cualquiera de sus puntos. Esta es la forma que se acostumbra dar al balancin de la máquina de vapor en razon de ser la mas conveniente y propia segun su modo de obrar.

Piezas sostenidas por en medio ó por sus extremos. Cuando una pieza está sostenida por en medio y cargada en sus extremos, ó se halla simplemente sostenida por sus extremos y cargada en su punto medio (fig. 51) y (fig. 52), su resistencia á la flexion será doble de la que ofreceria empotrada por un extremo y cargada en el otro extremo; pues al esfuerzo que obra en los extremos le corresponde



solamente como brazo de palanca la mitad de la longitud de la pieza, cuando empotrada por un extremo el brazo de palanca equivaldria á la longitud total de la misma pieza. De aquí resulta, que para estos dos casos servirán las mismas fórmulas deducidas últimamente con solo doblar el resultado ó multiplicar en cada una el coeficiente por 2.

Ejemplo: Hallar el peso ó carga que podrá suportar en cada extremo una barra sostenida en su punto medio, cuya longitud es de 3'50 m., su ancho de 5 cent. y su grueso ó altura de 8 cent.

Si es de hierro colado. $C = \dfrac{250 \times (8)^2 \times 5}{350} = 228'57$ kg.

Si es de hierro forjado. $C = \dfrac{200 \times (8)^2 \times 5}{350} = 182'86$ kg.

Si es de madera. . $C = \dfrac{20 \times (8)^2 \times 5}{350} = 18'29$ kg.

Estos resultados expresan la carga que podrá suportar en cada extremo, y convendrán igualmente para cuando la pieza esté simplemente sostenida por sus extremos y deba ser cargada en el punto medio.

Pero si la carga no corresponde al punto medio de la pieza, debe tenerse en consideracion la distancia á que se halla de cada extremo, y entonces las fórmulas propuestas se transforman en las siguientes:

Hierro forjado. $C = \dfrac{100 \times (a)^2 \times L}{d \times d'}$. . $C = \dfrac{60 \times D^3 \times L}{d \times d'}$

Hierro colado. $C=\frac{125\times(a)^3\times L}{d\times d'}$. . $C=\frac{75\times D^3\times L}{d\times d'}$

Encina ó abeto. $C=\frac{10\times(a)^3\times L}{d\times d'}$. . $C=\frac{6\times D^3\times L}{d\times d'}$.

En estas expresiones debe observarse que $d$ $d'$ son las distancias respectivas del punto en que obra la carga á cada uno de los apoyos en que descansan los extremos de la pieza: D representa el diámetro de la barra, si es cilíndrica; L su longitud en centímetros, y $a$ su lado ó grueso y ancho respectivos.

Si conocida la carga C se quiere determinar la seccion correspondiente se podrá despejar en las mismas fórmulas el diámetro D y el ancho ó grueso $a$.

Ejemplos: El árbol ó eje de una rueda hidráulica tiene 3 metros de longitud entre sus apoyos, el peso de la rueda se estima en 9,000 kg. y la vertical de su centro de gravedad corresponde á 1'20 m. del apoyo de la derecha. Pídese cuál es la carga que corresponde á cada apoyo y cuál el diámetro del árbol de hierro colado.

Apoyo de la derecha. 3 m : 9000 kg. : : 1'20 : $x$=3600 k.
Apoyo de la izquierda 3 m : 9000 kg. : : 1'80 : $z$=5400 kg.

Para el diámetro del árbol ó de los muñones se tendrá:

$$D=\sqrt[3]{\frac{C\times d\times d'}{75\times L}}=\sqrt[3]{\frac{9000\times120\times180}{75\times300}}=20'5 \text{ c.}$$

De manera, que el apoyo de la derecha cargará con 3'600 kg., el de la izquierda con 5'400 kg. y el diámetro de los muñones será de 20 ½ centímetros próximamente.



Cual será el lado para la seccion cuadrada de una viga de encina que teniendo 5 metros de largo debe suportar una carga de 2,500 kg. situada á 2 metros de uno de los apoyos.

El lado de la seccion

$$a=\sqrt[3]{\frac{C\times d\times d'}{10\times L}}=\sqrt[3]{\frac{2500\times200\times300}{10\times500}}=31'06 \text{ cents.}$$

Es decir, que el lado de la seccion cuadrada deberá tener poco mas de 31 centímetros para resistir, sin ser alterada, la carga de 2,500 kg. en las circunstancias dichas.

*Advertencia.* Cuando el árbol ó eje sea de hierro colado y esté expuesto á choques mas ó menos bruscos, deberá reemplazarse el coeficiente 75 por 37'5 con el fin de darle la resistencia conveniente.

**Árboles ó ejes huecos.** Cuando los árboles ó ejes deben ofrecer gran resistencia se puede disminuir su peso sin perjudicar su solidez, haciendo que sean huecos. En este caso hay que tomar en consideracion el diámetro exterior y el grueso que deba darse á la parte llena ó maciza del árbol.

Los constructores acostumbran dar á la parte llena ⅕ del diámetro total, y bajo este supuesto las fórmulas serán: $120\times D^3=C\times L$ y $30\times L\times D^3=C\times d\times d'$ siendo D el diámetro total ó exterior en centímetros; C la carga en kilógramos; L la longitud en centímetros, y $d$, $d'$ las distancias respectivas de la carga á los apoyos, tambien en centímetros.

Ejemplo: Determinar el diámetro exterior y el grueso que deberá darse á un árbol ó eje hueco, de hierro colado, cuya longitud es de 2'80 m., y la carga que debe suportar de 4000 kilógramos.

Si la carga se halla en el punto medio se tendrá :

$$D=\sqrt[3]{\frac{C\times L}{120}}=\sqrt[3]{\frac{4000\times 280}{120}}=21'05 \text{ centímetros.}$$

El grueso de la parte llena será $21'05 \setminus 5=4'21$ cent.

Es decir, que el diámetro exterior será de 21 centímetros próximamente, y el grueso de la parte llena de 4 centímetros y 21 centésimos de otro.

Si la carga estuviese colocada á 1'20 metros de uno de los apoyos y por lo mismo á 1'60 m. del otro, se tendria:

$$D=\sqrt[3]{\frac{C\times d\times d'}{30\times L}}=\sqrt[3]{\frac{4000\times 120\times 160}{30\times 280}}=20'9 \text{ c.}$$

El grueso de la parte llena $20'9 \setminus 5=4'2$ centímetros.

De donde resulta, que bajo esta condicion el diámetro exterior deberá ser de 20 centímetros y 9 décimos próximamente y el grueso de la parte maciza de 4 centímetros con 2 décimos.

**Piezas empotradas por ambos extremos.** Cuando una pieza está empotrada por ambos extremos en paredes que no pueden ceder (fig. 53), su resistencia á la flexion es cuádrupla de la que ofrece empotrada por un solo extremo y cargada en el otro, porque el brazo de palanca en que obra la carga es la mitad, y las superficies de encajamiento ó de ruptura son dos. En este supuesto, las fórmulas deducidas para el caso de una pieza empotrada por un extremo y cargada en el otro, servirán para cuando esté empotrada por ambos extremos y cargada en su punto medio, multiplicando por 4 cada uno de los coeficientes numéricos que figuran en ellas.



Así, si la carga obra en el punto medio, las fórmulas serán :

Para el hierro forjado $C\times L=(a)^3\times 400$ $C\times L=D^3\times 240$.
Para el hierro colado $C\times L=(a)^3\times 500$ $C\times L=D^3\times 300$.
Para la encina ó abeto $C\times L=(a)^3\times 40$ $C\times L=D^3\times 24$.

Si la carga se halla á distancias desiguales de los puntos de encajamiento, las fórmulas serán :

Para el hierro forjado
$(a)^3\times 200\times L=C\times d\times d'$ $D^3\times 120\times L=C\times d\times d'$.

Para el hierro colado
$(a)^3\times 250\times L=C\times d\times d'$ $D^3\times 150\times L=C\times d\times d'$.

Para la encina y abeto
$(a)^3\times 20\times L=C\times d\times d'$ $D^3\times 12\times L=C\times d\times d'$

teniendo presente que las de la primera columna son para cuando la seccion es cuadrada y cuyo lado se representa por *a*, y las de la segunda para las de seccion cilíndrica cuyo diámetro es D. Por medio de estas fórmulas se pueden resolver todos los casos despejando convenientemente las indeterminadas C, L, *a*, D.

Ejemplo : Calcular la carga que puede suportar, sin ser alterada, una viga de encina empotrada por ambos extremos, cuyo lado de su seccion cuadrada es de 20 centímetros y su longitud de 2'50 metros.

Si la carga gravita en su punto medio, dará :

$$C=\frac{(a)^3\times 40}{L}=\frac{(20)^3\times 40}{250}=1280 \text{ kilógramos.}$$