Observando ahora que *Rot.* B=*Rot.* C por ser poleas paralelas fijadas en un mismo árbol ó eje, y *Rot.* D=*Rot.* E por igual razon, se podrán multiplicar ordenadamente las tres proporciones suprimiendo estas cantidades, por corresponder al antecedente y consecuente de la segunda razon, y se tendrá:

Diám. B×*Diám.* D×*Diám.* F : *Diám.* A×*Diám.* C× *Diám.* E : : *Rot.* A : *Rot.* F.

Si en esta proporcion se iguala el producto de medios con el producto de los extremos, resultará:

(*b*) *Rot.* A×*Diám.* A×*Diám.* C×*Diám.* *E* = *Rot.* F×*Diám.* B×*Diám.* D×*Diám.* F, de cuya igualdad se deduce, que *en todo sistema de poleas, la rotacion de la primera multiplicada por los diámetros de todas las conductrices es igual á la rotacion de la última multiplicada por el diámetro de todas las conducidas.*

Si de esta igualdad se deduce el valor de *Rot.* A será:

$$\text{Rot. A} = \frac{\textit{Rot.}\ \text{F} \times \textit{Diám.}\ \text{B} \times \textit{Diám.}\ \text{D} \times \textit{Diám.}\ \text{F.}}{\textit{Diám.}\ \text{A} \times \textit{Diám.}\ \text{C} \times \textit{Diám.}\ \text{E.}}$$

cuya fórmula nos dice que *en todo sistema de poleas se hallará la rotacion de la primera, multiplicando la rotacion de la última por los diámetros de todas las conducidas, y dividiendo el resultado por el producto de los diámetros de todas las conductrices.*

Deduciendo ahora, de la misma igualdad, el valor del diámetro de la primera, resulta:

$$\textit{Diám.}\ \text{A} = \frac{\textit{Rot.}\ \text{F} \times \textit{Diám.}\ \text{B} \times \textit{Diám.}\ \text{D} \times \textit{Diám.}\ \text{F}}{\textit{Rot.}\ \text{A} \times \textit{Diám.}\ \text{C} \times \textit{Diám.}\ \text{E}}$$

cuya expresion manifiesta, que *el diámetro de la primera*

se hallará multiplicando la rotacion de la última por todos los diámetros de las conducidas, y partiendo el resultado por el producto de la rotacion de la primera por el diámetro de las conductrices.

Despejando la rotacion de la última se tendrá:

$$\textit{Rot.}\ \text{F} = \frac{\textit{Rot.}\ \text{A} \times \textit{Diám.}\ \text{A} \times \textit{Diám.}\ \text{C} \times \textit{Diám.}\ \text{E}}{\textit{Diám.}\ \text{B} \times \textit{Diám.}\ \text{D} \times \textit{Diám.}\ \text{F}}$$

de cuya fórmula se deduce, que *en toda série ó sistema de poleas, la rotacion de la última se hallará multiplicando la rotacion de la primera por los diámetros de todas las conductrices y partiendo el producto por lo que resulta de multiplicar entre sí los diámetros de las conducidas.*

Hallando el valor del diámetro de la última será:

$$\textit{Diám.}\ \text{F} = \frac{\textit{Rot.}\ \text{A} \times \textit{Diám.}\ \text{A} \times \textit{Diám.}\ \text{C} \times \textit{Diám.}\ \text{E}}{\textit{Rot.}\ \text{F} \times \textit{Diám.}\ \text{B} \times \textit{Diám.}\ \text{D.}}$$

de cuyo resultado se saca, que *en toda série de poleas se hallará el diámetro de la última multiplicando la rotacion de la primera por los diámetros de todas las que conducen y partiendo el producto por lo que resulta de multiplicar la rotacion de la última por los diámetros de las conducidas.*

Aplicaciones. 1.ª Hallar la rotacion correspondiente á la primera polea de una série (fig. 64) sabiendo que su diámetro es de 36 cent., el de la C de 42 cent., el de la E de 48 cent., el de la B de 28, el de la D de 20, el de la F de 18, y la rotacion de la última F de 180 vueltas por minuto.

Segun la 1.ª de las reglas generales que se acaban de establecer se formará el dividendo multiplicando 180 por los diámetros 28, 20 y 18 de las conducidas, y el divisor haciendo el producto de los diámetros 36, 42 y 48 de las conductrices: el cociente será la rotacion pedida.

$$Rot.\ A = \frac{180 \times 28 \times 20 \times 18}{36 \times 42 \times 48} = \frac{1.814,400}{72,576} = 25 \text{ vueltas.}$$

es decir, que en las circunstancias dichas la polea primera dará 25 vueltas por minuto.

2.ª Sabiendo que la primera polea de una série debe dar 25 vueltas por minuto y la última 180; ¿cuál será el diámetro de la primera, siendo el de la última de 18 centímetros, el de las C y E que conducen, de 42 y 48 centímetros, y el de las conducidas B y D, de 28 y 20 cent.?

Por la segunda de las reglas sentadas, se multiplicará la rotacion de la última 180 por los diámetros de las conducidas 28, 20 y 18, y se tendrá el dividendo; y la rotacion 25 de la primera multiplicada por los diámetros 42 y 48 de las conductrices formará el divisor así:

$$Diám. = \frac{180 \times 28 \times 20 \times 18}{25 \times 42 \times 48} = \frac{1.814,400}{50,400} = 36 \text{ cent.}$$

de modo, que el diámetro de la primera será de 36 cent.

3.ª Conocida la rotacion de la primera polea A, de 25 vueltas, el diámetro de todas las que conducen A, C y E de 36, 42 y 48 cent., y el diámetro de las conducidas B, D y F de 28, 20 y 18, determinar la rotacion de la última.

La tercera de las reglas expuestas dice que se ha de multiplicar la rotacion 25 de la primera, por los diámetros 36, 42 y 48 de todas las conductrices, y se tendrá el dividendo ó numerador; y multiplicando los diámetros 28,

20 y 18 de todas las conducidas se formará el divisor ó denomimador, así:

$$Rot.\ F = \frac{25 \times 36 \times 42 \times 48}{28 \times 20 \times 18} = \frac{1.814,400}{10,080} = 180 \text{ vueltas.}$$

es decir, que la última polea dará 180 vueltas por minuto.

4.ª Calcular el diámetro que deberá tener la última polea F de una série para dar 180 vueltas por minuto, sabiendo que la rotacion de la primera es de 25 vueltas, los diámetros de las A, C y E que conducen de 36, 42 y 48 cent., y los de las conducidas B y D de 28 y 20 cent.

Segun la regla cuarta, se formará el numerador ó dividendo multiplicando la rotacion 25 de la primera por los diámetros 36, 42 y 48 de las conductrices, y el denominador ó divisor, multiplicando la rotacion 180 de la última por los diámetros 28 y 20 de las conducidas, de este modo:

$$Diám.\ F = \frac{25 \times 36 \times 42 \times 48}{180 \times 28 \times 20} = \frac{1.814,400}{100,800} = 18 \text{ cent.}$$

es decir, que el diámetro de la última será de 18 cent.

Cuando se quiere saber cuál es la rotacion correspondiente á cada uno de los ejes ó árboles intermedios se forma la proporcion relativa á cada par de poleas enlazadas por la misma correa, recordando la ley expuesta para este caso, esto es, que los diámetros están en razon inversa de las respectivas rotaciones. Así, para hallar la rotacion que corresponde al segundo eje ó árbol de la série que acabamos de considerar, se formará la proporcion:

$$Diám.\ B : Diám.\ A :: Rot.\ A : Rot.\ B.$$

y sustituyendo será, $28 : 36 :: 25 : \text{Rot. } B = 32\,{}^1/_7$ vueltas. De modo, que el eje ó árbol en que se hallan las poleas B y C dará 32 vueltas y $^1/_7$ por minuto.

Para determinar la rotacion del tercer árbol ó eje en que se hallan montadas las poleas E y D, se le puede comparar con el último ó con el segundo, cuya rotacion se ha calculado en el problema anterior. Así, comparando con el último, la proporcion será :

$$\textit{Diám. } E : \textit{Diám. } F :: \textit{Rot. } F : \textit{Rot. } E.$$

y sustituyendo dará, $48 : 18 :: 180 : \textit{Rot. } E = 67\,{}^1/_2$.

De modo, que resultan para el tercer árbol $67\,{}^1/_2$ vueltas por minuto.

Si se compara con el segundo árbol, dará :

$$\textit{Diám. } D : \textit{Diám. } C :: \textit{Rot. } C : \textit{Rot. } D.$$

y sustituyendo, $20 : 42 :: 32\,{}^1/_7 : \textit{Rot.} D = 67\,{}^1/_2$ vueltas, que es la misma rotacion obtenida antes.

Otra de las cuestiones que se presentan en la práctica es la que trata de determinar los diámetros de las poleas intermedias cuando se conocen los diámetros y rotaciones de la primera y última. Esta y todas las cuestiones que se refieren á un sistema ó série de poleas, se pueden resolver acudiendo á la igualdad *(b)* de la *pág.* 204, que debe considerarse como la ecuacion fundamental de una transmision compuesta de varias poleas.

En efecto, si dividimos los dos miembros de la citada igualdad *(b)* por el producto *Rot.* F×*Diám.* F×*Diám.* C×*Diám.* E y simplificamos lo posible el numerador y denominador de los quebrados resultantes se tendrá :

$$(c)\quad \frac{\textit{Rotacion } A \times \textit{Diámetro } A}{\textit{Rotacion } F \times \textit{Diámetro } F} = \frac{\textit{Diámetro } B \times \textit{Diámetro } D}{\textit{Diámetro } C \times \textit{Diámetro } E}$$

de esta ecuacion se deduce la siguiente regla general: fórmese un quebrado cuyo numerador sea la rotacion de la primera polea multiplicada por su diámetro, y el denominador la rotacion de la última multiplicada por el suyo: este quebrado será tal que su numerador representará el producto de los diámetros de las poleas intermedias conducidas, y el denominador el producto de los diámetros de las conductrices. Luego, cuando en una série ó sistema de poleas se conozcan las rotaciones y diámetros de la primera y última, se hallarán los diámetros de las intermedias por la siguiente regla : *multiplíquese la rotacion de la primera por su diámetro y póngase el resultado por numerador, y el producto de la rotacion de la última por su diámetro por denominador. Descompónganse numerador y denominador en tantos factores cuantos pares de poleas intermedias se quieran introducir : los factores del numerador representarán los diámetros de las poleas conducidas, y los del denominador serán los dáimetros de las poleas intermedias conductrices.*

Ejemplo : Determinar el diámetro de cada una de las cuatro poleas intermedias B, C, D, E, de una série, en que la primera con 36 centímetros de diámetro da 25 vueltas por minuto, y la última cuyo diámetro es de 18 centímetros debe dar 180 vueltas por minuto.

Segun la regla que se acaba de establecer se tendrá el quebrado $\frac{25 \times 36}{180 \times 18} = \frac{900}{3240}$ cuyo numerador y dominador se descompondrán en dos factores cada uno, por ser dos el número de pares de poleas intermedias que se deben introducir. Si esta descomposicion es arbitraria dará regularmente un número considerable de soluciones, y por esto puede decirse que la cuestion es indeterminada. En efecto, el numerador 900 puede descomponerse en los factores 60×15; 18×50; 12×75; 45×20 y en muchos otros; y el denominador 3240 en 72×45; 36×90; 54×60; 120×27 y en muchos mas.

El número de soluciones aumentará considerablemente si atendiendo á la propiedad general de los quebrados se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número, y como este número puede ser arbitrario, se sigue, que la cuestion tendrá un número infinito de soluciones.

Cuando se ofrezca el caso de que nos estamos ocupando podrán aprovecharse fácilmente las poleas ó tambores que se tengan á mano, sin que sea necesario construir de nuevo todas las que indica el cálculo en la descomposicion antes expresada. Por manera, que si tenemos un tambor ó polea de 50 centímetros de diámetro, dividirémos 900 por este 50, y el cociente será 18. Si hubiese otra polea de 48 centímetros, se dividiria el denominador 3240 por el mismo 48 y el cociente resultante daria $67^1/_2$. De modo, que los factores del numerador serian 50 y 18, y los del denominador 48 y $67^1/_2$; cuyo resultado manifiesta, que aprovechando las poleas ó tambores de 50 y 48 centímetros de diámetro debe procurarse por una de 18 y otra de $67^1/_2$. Sin embargo, estos dos diámetros podrán ser multiplicados ó partidos por igual número, si así conviene, porque segun lo que se ha dicho antes esta operacion no altera en nada el efecto deseado.

En todos los casos semejantes se podrán aprovechar tantas poleas menos una cuantas sean las que se busquen; de modo, que si en el ejemplo anterior se supone que podemos disponer de tres poleas cuyos diámetros son de 42, 48 y 20 centímetros, sustituirémos estos valores y los propuestos en la igualdad *(c)* (pág. 208) y se tendrá:

$$\frac{25\times36}{180\times18}=\frac{20\times \textit{Diám. } B.}{42\times48}$$

que despejando el diámetro que falta dará:

$$\textit{Diám. } B=\frac{25\times36\times42\times48}{180\times20\times18}=28 \text{ cent.}$$

Es decir, que teniendo las poleas de 42, 48 y 20 centímetros faltará una de 28 centímetros de diámetro. Las dos de 42 y 48 serán conductrices y las de 20 y 28 conducidas.

Engargantes ó engranajes. Las ruedas dentadas son cilindros de poco grueso en cuya circunferencia ó superficie lateral tienen partes simétricas entrantes y salientes que se llaman vacíos y dientes.

Si las partes salientes de una rueda engargantan en las entrantes de otra para conducirse mútuamente se dice que *engranan* entre sí, y forman lo que se llama *engranaje*.

Cuando dos ruedas planas ó cónicas engranan para comunicarse el movimiento, las rotaciones se verifican en sentido contrario, como lo indican las saetas (fig. 65), y si se quiere que los dos ejes giren en igual sentido, deberá introducirse una rueda intermedia que comunique el movimiento de la una á la otra; y con esto se logrará que la rueda primera y tercera tengan su rotacion en el mismo sentido, como se ve por la (fig. 66).

Debe notarse, que *las ruedas intermedias cualquiera que sea su diámetro, no cambian de ningun modo la velocidad de rotacion y solo sirven para variar el sentido del movimiento y para llenar el espacio que media entre dos ruedas que deben conducirse.* En efecto, cuando adelanta un diente de la primera rueda hace marchar uno de la segunda;

uno de esta empuja otro de la tercera, y así siguiendo hasta la última: de donde resulta, que un diente de la primera hace marchar uno de la última del mismo modo que si estuviesen en inmediato contacto.

Los dientes de dos ruedas planas ó cónicas que engranan entre sí deben ser perfectamente iguales y simétricas, con el fin de que puedan girar y conducirse mútuamente en todos sentidos.

En la transmision de movimiento por medio de ruedas dentadas deben tenerse en consideracion las circunstancias siguientes:

1.ª *Que el número de los dientes de dos ruedas en contacto es proporcional á sus circunferencias, á sus rádios y á sus diámetros.*

2.ª *Que la rotacion ó el número de vueltas de dos ruedas que engranan, está en razon inversa del número de sus dientes, de la longitud de sus circunferencias, rádios ó diámetros.*

3.ª *Que dichas leyes se verifican igualmente entre la primera y última de las ruedas dentadas de un sistema, cualquiera que sea el diámetro y el número de las intermedias.*

4.ª *Que en una série de árboles ó ejes, cuya transmision se haga por pares de ruedas paralelas, se verificarán las mismas leyes deducidas antes para un sistema ó série de poleas.*

Por lo general se llama *piñon* á la menor de dos ruedas dentadas que engranan, y á la mayor se la llama simplemente *rueda*. Algunos llaman piñon á la rueda conducida.

Aplicaciones: 1.º Hallar el número de dientes que corresponde á un piñon de 20 centímetros de diámetro, sabiendo que debe ser conducido por una rueda de 120 dientes con 60 centímetros de diámetro.

La 1.ª regla da; $60 : 20 :: 120 : x = 40$ dientes. De modo, que los dientes del piñon serán 40.

Si esta proporcion se generaliza, representando por D, d los diámetros y por N, n el número correspondiente de los dientes de dos ruedas en contacto, se tendrá; $D : d :: N : n$ de donde se deduce: que *para hallar el número de dientes de una rueda conducida se multiplicará su diámetro por los dientes de la conductriz y el producto se dividirá por el diámetro de esta.*

El diámetro de la rueda conducida se determinará multiplicando el número de sus dientes por el diámetro de la conductriz, y partiendo el producto por el número de dientes de esta.

Ejemplo: Hallar el diámetro de la rueda conducida B sabiendo que el número de sus dientes es 32, y que la conductriz A lleva 80 dientes y su diámetro tiene 48 cent.

Como la rueda intermedia C (fig. 66) no debe entrar en el cálculo por las razones antes indicadas, pues solo sirve para cambiar el sentido del movimiento, se formará la sencilla proporcion; $80 : 32 :: 48 : x = 19'2$ centímetros.

El diámetro será pues de 19 centímetros y 2 décimos.

Si se conoce la distancia de dos ejes ó árboles paralelos s y t (fig. 67) y el número de vueltas que deben dar por minuto, se podrá calcular el diámetro de las dos ruedas c y d que les harán marchar, por la siguiente proporcion general: *La suma de las rotaciones de los dos árboles es á la rotacion del primero, como, la distancia entre sus ejes es al rádio de la rueda fijada en el segundo.* Esto es:

$$\textit{Rot. } c + \textit{Rot. } d : \textit{Rot. } c :: \textit{Distancia } st : \textit{Rádio } d.$$

Hallado el rádio de la segunda rueda se determinará el de la primera restándolo de la distancia total.

Ejemplo. Hallar el rádio correspondiente á las ruedas *c* y *d* sabiendo que la distancia *st* de los dos ejes es de 51 centímetros y que mientras el primero da 175 vueltas el segundo debe dar 420.

Segun la proporcion anterior se tendrá :

175+420 : 175 : : 51 : *Rádio d*=15 centímetros.
El rádio de la rueda *c* será, 51—15=36 centím.

De manera, que el rádio de la rueda *c* fijada en el primer eje tendrá 36 centímetros, y la *d* fijada en el segundo tendrá 15 centímetros de rádio.

El número de dientes estará en la misma razon que los rádios de las dos ruedas, y por lo mismo, si á la rueda *c* se le dan 72 dientes, la *d* deberá tener 30, como así es en efecto.

Los rádios de las ruedas *c* y *d* se pueden determinar geométricamente por la siguiente regla : *divídase la distancia* st *de eje á eje en tantas partes iguales como unidades hay en la suma de las rotaciones : el número de partes correspondiente á la rotacion del primer árbol expresará el rádio de la rueda* d *fijada en el segundo, y el número de partes que corresponden á la rotacion del segundo será el diámetro de la rueda fijada en el primero.*

Cuando la transmision tiene lugar por medio de algunos pares de ruedas paralelas (fig. 67) entre árboles ó ejes paralelos, perpendiculares ú oblícuos, se hallará la relacion de las rotaciones y número de dientes de la primera y última por la misma fórmula y regla general deducida para las poleas, sustituyendo el número de dientes en lugar del diámetro de cada rueda. Así, pues, en todo sistema de ruedas dentadas, *la rotacion de la primera multiplicada por los dientes de todas las conductrices es igual á la rotacion de la última multiplicada por los dientes de todas las conducidas.*

De cuya proposicion general se deduce :

1.° *Que la rotacion de la última se hallará multiplicando la rotacion de la primera por los dientes de todas las que conducen y dividiendo el resultado por el producto de los dientes de todas las conducidas.*

2.° *Que la rotacion de la primera se hallará multiplicando la rotacion de la última por los dientes de todas las conducidas y dividiendo el resultado por el producto de los dientes de todas las conductrices.*

3.° *El número de dientes de la última se hallará multiplicando la rotacion de la primera por las dientes de todas las conductrices y partiendo el resultado por la rotacion de la última multiplicada por los dientes de las conducidas.*

4.° *El número de dientes de la primera se determinará multiplicando la rotacion de la última por los dientes de todas las conducidas y partiendo el resultado por la rotacion de la primera multiplicada por los dientes de las conductrices.*

Ejémplos : 1.° Calcular la rotacion de la última rueda *f* suponiendo que lleva 36 dientes; que la primera *a* da 84 vueltas por minuto y con 50 dientes conduce la *b* de 48; que la *c* de 72 dientes conduce la *d* de 30, y que la conductriz *e* tiene 42 dientes.

Aplicando la primera de las reglas establecidas será :

$$Rot.\ f = \frac{84 \times 50 \times 72 \times 42}{48 \times 30 \times 36} = 245 \text{ vueltas.}$$

De modo, que la última rueda *f* dará 245 vueltas por minuto.

2.° Hallar el número de dientes de la última rueda *f* que debe dar 245 vueltas por minuto, sabiendo que la primera *a* con 50 dientes da 84 vueltas ; que la *b* tiene 48 dientes ; la *c*, 72 ; la *d*, 30 y la *e*, 42.