

Por la tercera regla resulta :

$$\text{Dientes de } f = \frac{84 \times 50 \times 72 \times 42}{245 \times 48 \times 30} = 36 \text{ dientes.}$$

Los dientes de la última rueda serán 36.

Del mismo modo se determinaría el diámetro y el número de dientes de la primera rueda.

Otro ejemplo. Un árbol h (fig. 68) da 32 vueltas por minuto y debe transmitir el movimiento á otro árbol p haciéndole dar 18 vueltas en igual tiempo : la transmisión debe tener lugar por medio de un eje ó árbol intermedio g , por dos ruedas dentadas a y b , y por dos poleas n y m : sabiendo que la rueda conductriz a lleva 36 dientes y que la polea n tiene 16 centímetros de diámetro ; se quiere averiguar el número de dientes de la rueda b y el diámetro correspondiente á la polea m .

En este caso se hallará la rotación media entre las de los árboles h y p , para el árbol intermedio g , extrayendo la raíz cuadrada del producto de las rotaciones extremas ; así :

$$\text{Rot. } g = \sqrt{32 \times 18} = \sqrt{576} = 24 \text{ vueltas.}$$

Para los dientes de la rueda b se dirá :

$$24 : 32 :: 36 : \text{Dientes } b = 48$$

Para el diámetro de la polea m será :

$$18 : 24 :: 16 : \text{Diám. } m = 21 \frac{1}{3} \text{ centímetros.}$$

Así, pues, los dientes de la conducida b serán 48 ; el diámetro de la polea m , $21 \frac{1}{3}$ centímetros, y el árbol intermedio g dará 24 vueltas por minuto.

No obstante, si el árbol ó eje intermedio debiese tener

una rotación particular conocida, se determinaría el número de dientes de la b y el diámetro de la polea m por las reglas sencillas expuestas antes.

En muchos casos se necesita conocer la velocidad correspondiente á la circunferencia de una polea, rueda, tambor ó cilindro y se determina por la siguiente regla : *Para hallar la velocidad á la circunferencia de un cuerpo que gira al rededor de su centro, se calculará la longitud de su circunferencia, se multiplicará por el número de vueltas que da en cada minuto y dividiendo el producto por 60 se tendrá la velocidad por segundo.*

Si dada la velocidad á la circunferencia se quiere hallar el número de vueltas por minuto, se dividirá la velocidad propuesta por la extensión de la circunferencia, y el cociente se multiplicará por 60 : el producto resultante será la rotación pedida.

Ejemplos. 1.° Hallar la velocidad á la circunferencia de una rueda que da 84 vueltas por minuto y su diámetro es de 40 centímetros.

$$\text{Circunferencia} = 3 \cdot 1416 \times 40 = 125 \cdot 664 \text{ cent.}$$

$$\text{Velocidad} = 125 \cdot 664 \times 84 \div 60 = 175 \cdot 9296 \text{ cent.}$$

Esto es, la velocidad á la circunferencia será de 176 centímetros próximamente ó de 1 metro 76 centímetros.

2.° Sabiendo que una polea tiene 50 centímetros de diámetro y que debe arrollar 2 metros de correa por segundo, hallar cuántas vueltas dará por minuto.

$$\text{Circunferencia} = 3 \cdot 1416 \times 50 = 157 \cdot 08 \text{ cent.}$$

$$\text{Número de vueltas} = (2 \div 1 \cdot 5708) \times 60 = 76 \cdot 392 \text{ vuelt.}$$

De modo, que dará 76 vueltas y $\frac{2}{5}$ por minuto.

DIMENSIONES Y RESISTENCIA DE LAS RUEDAS Y DE SUS DIENTES. Si se consideran dos ruedas dentadas que la una

conduce á la otra (fig. 65), el contacto directo tiene lugar sobre la línea *ab* de los centros en el punto de tangencia de las circunferencias que pasan generalmente á los 56 centésimos de la altura total de los dientes.

Estas circunferencias que en la figura están señaladas con puntos, se llaman *circunferencias primitivas ó circunferencias de contacto*, y sus rádios y diámetros se denominan *rádios y diámetros primitivos*.

Para el cálculo de las ruedas dentadas se usa siempre de los rádios y diámetros primitivos, y sobre las circunferencias primitivas se toman todas las dimensiones de los dientes y de los huecos ó vacíos.

Se llama *paso del engranaje* ó simplemente *paso* á la distancia *cd* (fig. 69) que media entre los ejes de dos dientes inmediatos, tomada en la circunferencia primitiva, por manera, que el paso comprende siempre un diente y un vacío ó hueco. El espesor ó grueso del diente es la dimension *st*; el ancho es la *mh* en el sentido del eje, y su altura en el sentido del radio es la parte saliente *hg*.

Los dientes de una rueda son generalmente simétricos en dos sentidos con el fin de que puedan conducir y ser conducidos, y constan de dos partes; una recta ó plana *sp* llamada *flanco*, y otra curva *th* que se llama *diente*. La circunferencia primitiva corresponde siempre en la union del flanco con la parte curva y sobre ella se mide el paso del engranaje y el espesor de los dientes.

Los datos indispensables para la construccion de una rueda dentada son tres: 1.º el esfuerzo que debe suportar un diente; 2.º el radio ó diámetro primitivo, y 3.º la velocidad á su circunferencia.

1.º El esfuerzo que ha de suportar un diente se hallará partiendo el trabajo, en kilográmetros, que debe transmitir la rueda, por la velocidad á la circunferencia.

2.º El radio ó diámetro primitivo se determinará por el cálculo de la transmision expuesto antes.

3.º La velocidad á la circunferencia se hallará como se ha hecho en las últimas cuestiones.

Conocido el esfuerzo en kilogramos que ha de suportar un diente, se calculará el espesor que debe dársele empleando las fórmulas deducidas para la seccion rectangular, en la (pág. 171), correspondientes á una pieza empotrada por un extremo. Pero debe tenerse presente, que la mayor energía de la presion para producir la ruptura tiene lugar en la circunferencia primitiva cuando los dientes en contacto se hallan en la línea de los centros. En tal caso *l* representaria la latitud ó ancho del diente *mh*, y *a* el espesor ó grueso *st*.

Cuando la velocidad por segundo, á la circunferencia primitiva, no excede de 1'50 metros, se supone constantemente $l=4a$; si la velocidad es mayor, se hace $l=5a$; y si los dientes están expuestos á mojarse habitualmente de agua, se considera $l=6a$. La altura *hg* de los dientes en el sentido del radio no podrá esceder nunca de 1'5*a*, esto es, nunca escederá de una vez y media el espesor del diente.

Debe tenerse en consideracion que los dientes de las ruedas están expuestos á algunos choques y que á veces el trabajo transmitido aumenta, y en tal concepto deben reforzarse mas dándoles mayor grueso del que resultaria por las citadas fórmulas. Por esto los mecánicos, fijando las condiciones mas desfavorables y teniendo en consideracion todas las circunstancias que pueden debilitar la resistencia de los dientes han modificado aquellas fórmulas y adoptado para calcular el espesor, las siguientes:

Si es de hierro colado. . . .	$E=0'105 \times \sqrt{P}$
Si es de bronce ó cobre. . .	$E=0'131 \times \sqrt{P}$
Si es de madera fuerte. . . .	$E=0'145 \times \sqrt{P}$

En estas fórmulas la E representa el espesor ó grueso del diente en centímetros, y P es el esfuerzo en kilogramos, que debe transmitir.

Cuando se ha calculado por estas fórmulas el grueso que ha de tener un diente, se determina el paso del engranaje multiplicando el espesor hallado por 2'1; y partiendo luego la longitud de la circunferencia por el paso resultante, se tendrá el número de dientes de la rueda.

Si las ruedas tienen gran velocidad, el engranaje puede ser muy fino reduciendo el paso á 24 ó 26 milímetros; el ancho se hace de cinco á seis veces el espesor, y el mayor número de dientes en contacto compensa ventajosamente la mayor resistencia ofrecida por los dientes mas gruesos.

El hueco ó vacío entre dos dientes, en ruedas bien construidas, debe comprender el grueso y de 6 á 10 milésimos mas del espesor del diente con el fin de que este pueda moverse libremente.

Para evitar el ruido en las fábricas se emplean con ventaja las ruedas de hierro colado con dientes de madera haciéndolas engranar con otras cuyos dientes sean del mismo metal. En este caso el rozamiento es mas suave, y se ha observado que el desgaste es repartido entre los dientes de hierro y los de madera, llegando solo á ser absorbido por el frote menos de un milímetro por año de trabajo.

Cuando las ruedas dentadas son de alguna dimension, se las descarga de gran parte de su peso sentando los dientes sobre un anillo y uniendo este á la parte central por medio de tres ó mas ródios ó brazos.

El espesor del anillo de hierro colado, en el sentido del ródio debe ser igual al espesor de los dientes; y al objeto de impedir la flexion de los brazos dándoles la conveniente

resistencia se usará la fórmula $a^2 l = \frac{C \times L}{125}$ de la (pág. 171),

en la cual l representará el grueso ó espesor constante del brazo, a su ancho que hasta encontrar el anillo se reduce á los 8 décimos, y se supone generalmente $a = 5'5 \times l : C$ representa en kilogramos la presion ó esfuerzo de un diente, y L la longitud del brazo en centímetros.

Ejemplo: 1.º Hallar las dimensiones correspondientes á una rueda dentada para un árbol de segunda clase, que debe transmitir una potencia de 12 caballos dando 35 vueltas por minuto, y siendo su diámetro de 0'80 metros.

Recordando cuanto se acaba de exponer se hallarán todas las dimensiones de la rueda del modo siguiente:

1.º La circunferencia primitiva dará, $c = 3'1416 \times 2 \times 0'40 = 2'513$ metros.

2.º La velocidad por segundo en dicha circunferencia, será: $v = 2'513 \times 35 \div 60 = 1'466$ metros.

3.º El esfuerzo ó presion que debe soportar un diente equivaldrá á $P = 12 \times 75$ kilogramos $\div 1'466 = 613'915$ kilogramos.

4.º El espesor ó grueso del diente corresponderá á $E = 0'105 \times \sqrt{613'915} = 0'105 \times 24'78 = 2'6$ centímetros próximamente.

5.º El paso del engranaje será de $2'6 \times 2'1 = 5'46$ cent.

6.º El número de los dientes dará $251'3 \div 5'46 = 46$ dientes.

7.º Siendo la velocidad á la circunferencia primitiva menor que 1'50 m. se tomará para el ancho del diente, en el sentido del eje, el cuádruplo de su espesor, esto es, $2'6 \times 4 = 10'4$ centímetros.

8.º La altura total del diente en el sentido del ródio

equivaldrá como se ha dicho al espesor multiplicado por $1 \frac{1}{3}$, y dará, $2'6 \times 1 \frac{1}{3} = 3'47$ centímetros.

El flanco tendrá de altura $3'47 \times \frac{1}{2} = 1'54$ centímetros.

Tales deberán ser las dimensiones de la rueda para que resista y transmita sin alteracion el trabajo de 12 caballos, con la velocidad que se ha indicado.

Ejemplo 2.º Una rueda hidráulica posee á su circunferencia una fuerza de 30 caballos con una velocidad de 1'80 m. por segundo; su rádio es de 2'5 m., y en su mismo árbol debe fijarse una rueda con dientes de madera de 1'75 m. de rádio; se desean las dimensiones de la rueda dentada.

El trabajo en la circunferencia de la rueda hidráulica es de $30 \times 75 = 2250$ kilográmetros, y el esfuerzo correspondiente dará $2250 \div 1'80 = 1250$ kilogramos.

La circunferencia de la rueda dentada valdrá, $3'1416 \times 2 \times 1'75 = 11$ m. próximamente.

Recordando ahora la ley de las palancas se ve que el esfuerzo correspondiente á la circunferencia primitiva de la rueda dentada estará con el hallado para la hidráulica en razon inversa de sus rádios, y se tendrá la proporcion:

$$1'75 : 2'5 :: 1250 : P = 1785'71 \text{ kilogramos.}$$

Con el esfuerzo de 1785'71 kg. que debe suportar un diente de madera, se calculará su grueso ó espesor por la fórmula, $E = 0'145 \times \sqrt{1785'71} = 0,145 \times 42'25 = 6'13$ centímetros.

La velocidad á la circunferencia de la rueda dentada se determinará por la proporcion, $2'5 : 1'75 :: 1'80 : v = 1'26$ m.

En este caso, el ancho del diente en el sentido del eje será, $6'13 \times 4 = 24'52$ centímetros.

El paso del engranaje dará, $6'13 \times 2'1 = 12'873$ cent.

El número de dientes será, $11 \div 0'12873 = 85'42$. De modo, que á la rueda se le darán 85 dientes, y para asegurar mas la resistencia de estos podrian dársele solo 84.

Altura del diente en el sentido del rádio $= 6'13 \times 1 \frac{1}{3} = 8'17$ centímetros.

La rueda se construirá de hierro colado, dándole seis brazos; y como el espesor del anillo en el sentido del rádio debe ser igual al espesor del diente, será de 6'13 centímetros.

Los brazos llevan en toda su longitud unas tiras salientes de poco grueso que se llaman *nervios*, y suponiendo que solo sirven para impedir la flexion del brazo, no entran en consideracion para determinar las dimensiones de este.

Si la longitud del brazo se supone de 1'22 m. y su ancho a de 5'5 veces el grueso l , sustituyendo se tendrá: $a^2 l = 1785'71 \times 122 \div 125 = 1742'85$ centímetros cuadrados: suponiendo ahora $a = 5'5 l$, sustituyendo este va-

lor y despejando l , resulta; $l = \sqrt[3]{1742'85 \div 30'25} = \sqrt[3]{57'615} = 3'86$ centímetros próximamente.

Por lo dicho, será: $a = 5'5 l = 5'5 \times 3'86 = 21'23$ centímetros.

De manera, que el brazo en el arranque tendrá 21'23 centímetros de ancho, y al unirse con el anillo será los 8 décimos de este valor, esto es, $21'23 \times 0'8 = 16'984$ centímetros.

Cubo ó boton de la rueda. El espesor del metal al redor del árbol en el cubo de la rueda, se determina con relacion á la fuerza y espesor de los dientes, añadiendo además una cantidad constante por el esfuerzo que resulta de la accion de la *chapeta*. Dicho espesor se calcula por

la fórmula $E' = 1.5 \times E + 10$, siendo E' el espesor del boton ó cubo en milímetros y E el espesor del diente, calculado antes, tambien en milímetros.

El ancho del cubo en el sentido del árbol ó eje en que se halla montada la rueda, es regularmente igual al ancho de los dientes ó del anillo mas una cantidad proporcional al rádio primitivo de la rueda para asegurar su resistencia, y se determina por la fórmula $l = E \times r + 0.10 R$, siendo r la relacion entre el ancho y el espesor del diente y R el rádio de la circunferencia primitiva de la rueda.

La chapeta (*clavette*) forma cuerpo con el árbol ó eje y ajusta en el canal ó hendidura del boton para sujetar convenientemente la rueda. Puede dársele de ancho $\frac{1}{10}$ del rádio primitivo de la rueda, cuidando que nunca llegue al tercio del diámetro del árbol, en cuyo caso se pondrán dos ó mas chapetas. Su espesor será sobre la mitad de su ancho.

La chapeta se coloca debajo de un brazo para que en razon del mayor grueso se haga menos susceptible la ruptura.

Con el auxilio de las fórmulas que se acaban de aplicar, se ha formado la siguiente tabla para determinar á la simple inspeccion de ella el espesor ó grueso del diente y el paso del engranage conociendo la carga ó presion que debe suportar.

TABLA DE LAS DIMENSIONES QUE DEBEN DARSE AL GRUESO Ó ESPESOR DEL DIENTE Y AL PASO DEL ENGRANAJE CONOCIENDO LA CARGA Ó PRESION QUE DEBE SUPORTAR.

Carga ó presion que debe suportar un diente.	RUEDAS DE HIERRO COLADO.		RUEDAS CON DIENTES DE MADERA.	
	Espesor del diente.	Paso del engranaje.	Espesor del diente.	Paso del engranaje.
	Kilógramos.	Milímetros.	Milímetros.	Milímetros.
5	2.3	4.9	3.2	6.8
10	3.3	6.9	4.7	9.8
15	4	8.5	5.6	11.8
20	4.6	9.7	6.4	13.4
30	5.7	12	7.9	16.6
40	6.6	13.9	9.1	19.2
50	7.4	15.6	10.2	21.5
60	8.1	17	11.2	23.5
70	8.7	18.4	12.1	25.4
80	9.4	19.7	12.9	27.3
90	9.9	20.8	13.7	28.8
100	10.5	22	14.5	30.4
125	11.6	24.4	16.1	33.8
150	12.8	26.9	17.7	37.1
175	13.8	29.1	19.1	40.2
200	14.8	31.1	20.2	42.5
225	15.7	33	21.7	47.6
250	16.6	34.8	22.9	48.1
275	17.3	36.3	23.9	50.2
300	18.2	38.1	25.1	52.6
350	19.6	41.2	27.1	56.9
400	21	43.2	29	60.9
500	23.4	49.1	32.3	67.9
600	25.7	54	33.5	74.6
700	27.7	58.2	37.2	78.3
800	29.7	62.4	41	86.2
900	31.5	66.1	43.5	91.3
1000	33.2	69.6	45.8	96.2

Para cuando se conozca la fuerza en caballos que debe transmitir una rueda dentada, y la velocidad por segundo

que lleva su circunferencia, se podrá obtener el espesor de los dientes, en milímetros, por medio de la siguiente

TABLA DEL ESPESOR EN MILÍMETROS QUE DEBE DARSE Á LOS DIENTES, CONOCIDA LA VELOCIDAD Á LA CIRCUNFERENCIA, EN METROS POR SEGUNDO, Y LA FUERZA EN CABALLOS QUE DEBE TRANSMITIR.

Fuerza en caballos.	Velocidad en metros por segundo á la circunferencia.					
	0'5 m.	1 m.	1'5 m.	2 m.	2'5 m.	3 m.
1	12 mils.	8 mils.	7 mils.	6 mils.	»	»
2	17 »	12 »	10 »	9 »	8 »	7 »
3	21 »	15 »	12 »	11 »	10 »	9 »
4	24 »	17 »	14 »	12 »	11 »	10 »
5	27 »	19 »	15 »	14 »	12 »	11 »
6	30 »	21 »	17 »	15 »	13 »	12 »
7	32 »	22 »	18 »	16 »	14 »	13 »
8	34 »	24 »	20 »	17 »	15 »	14 »
9	36 »	26 »	21 »	18 »	16 »	15 »
10	38 »	27 »	22 »	19 »	17 »	16 »
12	40 »	30 »	24 »	21 »	18 »	17 »
14	45 »	32 »	26 »	22 »	20 »	18 »
16	49 »	34 »	28 »	24 »	21 »	20 »
18	51 »	36 »	30 »	26 »	23 »	21 »
20	54 »	38 »	31 »	27 »	24 »	22 »
25	»	43 »	35 »	30 »	27 »	25 »
30	»	47 »	38 »	33 »	30 »	27 »
35	»	51 »	41 »	36 »	32 »	29 »
40	»	54 »	44 »	38 »	34 »	31 »

TRAZADO Y CONSTRUCCION DE LOS ENGRANAJES. Los engranajes forman una parte tan esencial de la maquinaria que son pocas las máquinas y aparatos en que las ruedas dentadas no representan un papel muy importante para la transmision de la fuerza y del movimiento. Por esto debe tenerse un grande interés en fijar sus dimensiones de una manera precisa para no emplear inútilmente el material y darles al propio tiempo la resistencia suficiente. Tambien

es menester que se atienda de un modo especial á la forma de la parte curva de los dientes para que la transmision se haga con suavidad y sin choque ni resalto.

El diente contiene la parte plana ó el flanco que se halla hácia el interior de la circunferencia primitiva, y la parte curva ó diente que corresponde al exterior de la misma.

El flanco está formado por el mismo rádio, y el diente puede ser una cicloide, epicicloide ó evolvente, segun sea el engranaje de un piñon con una barra dentada, de una rueda con un piñon ó con otra rueda. Tambien debe considerarse el engranaje de una linterna con un piñon ó con una barra dentada, y el de una rueda coronada con una rueda plana, barra dentada ó linterna.

La *rueda coronada* es aquella cuyos dientes son perpendiculares á su plano y por lo mismo paralelos al eje; y la *linterna* (fig. 70) se compone de dos planos circulares y paralelos á los cuales están sujetas unas piezas cilindricas llamadas *usillos* que engranan con los dientes de una rueda plana ó coronada para conducir ó ser conducida por ella. La (fig. 71) representa el engranaje de una linterna con una rueda coronada.

Los engranajes pueden ser exteriores ó interiores: son *exteriores* si los dientes corresponden al borde ó parte exterior de la rueda (fig. 74), é *interiores* cuando los dientes se hallan en su parte interior (fig. 72).

Para trazar el engranaje de dos ruedas ó de una rueda y un piñon se procederá como sigue: hállese por el cálculo anterior todos los elementos indispensables para la construccion de las ruedas: trácense sobre una recta AB (fig. 73) dos circunferencias tangentes cuyos rádios tengan la magnitud dada por el cálculo: dividase cada circunferencia en tantas partes iguales cuantos dientes deba tener la respectiva rueda, y cada una de estas partes en

