inæqualitatem efficiendum erat, ut majore existente vi motrice minor foret distantia à centro motus, ideoque et minor machinulæ diameter, et contra; oportet nempè, ut in machinulæ puncto quolibet productum ex vi tensionis in distantiam à centro motus sit constans semper et æquale; hoc enim artificio fit, ut vis motrix eadem perpetuo maneat, atque uniformiter ferè moveantur rotæ, non secus ac facerent appenso aliquo constanti pondere. Cum ergo demonstrata principia accuratam nobis suppeditent temporis mensuram, hanc quoque utilitatem inter innumeras alias commendare voluimus. Problema est apud Geometras notissimum: invenire curvam, cujus revolutione genitum solidum quæsitam præberet in horologiis motus æqualitatem, ex qua proindè curva formari deberet prædicta machinula. Verùm res est sublimioris indaginis, atque motus uniformitatem, convenientemque figuram repetitis experimentis accuratissime inveniunt peritiores horologiorum artifices; talis figuræ rationem exposuisse satis sit.

SECTIO SECUNDA.

De reliquis universalibus corporum proprietatibus ex virium notione derivandis.

CAPUT I.

De motu genere, variisque illius speciebus.

Ex ipsa virium notione derivari *mobilitatem* et *quiescibilitatem*, evidens est; motus enim est; virium effectus, et seclusa vi qualibet impressa, corpus semel quiescens perpetuo quiesceret. Amplissimum quidem patet hujus capitis argumentum; sed præcipuas dumtaxat motuum species expendemus. Et 1. quidem de motu generatim paucis præmissis, ad motum rectilineum, et deinde ad curvilineum progrediemur, illas autem dumtaxat motuum leges explicabimus, quæ in rerum natura maxime obtinent, prætermissis variis motuum variabilium pro arbitrio confictis hypothesibus; tandèm corporis solitarii motu considerato, diversos corporum motus inter se comparabimus, et conflictuum regulas demonstrabimus.

ARTICULUS I.

De motu generaiìm considerato.

I.

Motum jam antea definivimus *continuam loci mutationem*; unde intelligitur, quietem esse *perseverantiam* in eodem loco: quare cum *mobile* non consideremus, nisi quatenus locum mutet, et à magnitudine, aliisque affectionibus quibuscumque abstrahamus, mobile instar puncti consideratur, quamdiu solius mutationis loci ratio habetur, atque ideò durante motu lineam describere ponitur; continuo enim motu puncti linea describi concipitur. Locus, à quo mobile recedit vel recedere conatur, dici solet in scholis *terminus à quo*; locus verò; ad quem mobile accedere conatur, *terminus ad quem* appellatur. Locus duplex distinguitur, *absolutus et relativus*; Locus absolutus dicitur pars spatii immobilis; et immensi, quam res occupat; locus autem relativus est spati alicujus dati pars illa, quæ tamquam immota spectatur, et in qua res locatur. Hinc patet, fieri posse, ut mutatur locus absolutus, non mutato loco relativo, et viceversa, nam si nauta in navi, quæ plenis velis fertur, dormiat, locum suum absolutum mutat cum navi ipsa servat verò eumdem locum relativum respectu partium navis; at si nauta pari velocitate, qua fertur navis ipsa, progrederetur contra navis directionem, mutaret locum relativum, manens in eodem loco absoluto. Itaque pro varia loci mutatione, motus vel est absolutus, si mutetur locus relativus; vel relativus si mutetur locus relativus. Idem dicendum

est de quiete, quæ est perseverantia in loco vel absoluto, vel relativo. Fieri igitur potest, ut ea, quæ absolute quiescunt, nobis videantur moveri, dum nempè locum suum mutant relative ad alia objecta, quæ tamquam immota consideramus, vel quorum motuum non percipimus. Nam cum omne corpus nobis conspicuum suam imaginem ope radiorum ab eodem objecto prodeuntium in oculi fundo, seu in retina depingat, ea objecta moveri videntur, quorum imagines in retina moventur, seu diversas retinæ partes continuo, ac succesive occupant, dum quis oculum suum velut immotum fingit. Contra autem velut quiescentia cernimus objecta illa, quorum imagines eamdem semper occupant retinæ partem, cum scilicet imaginum motus in fundo oculi non sentitur: atque hinc est, quod homines in navi sedentes ipsum navis motum non percipiant, omnes quippe navis partes inter se relative quiescentes eamdem quoad oculum positionem, et distantiam servant, imaginesque suas in iisdem retinæ partibus delineant; at cum oculos ad litora convertit spectator, necesse est, ut objecta in litore posita situm suum respectu oculi continuo mutent, ac proinde imagines suas in aliis, aliisque retinæ partibus succesive pingant; qua ratione fit, ut litora, urbesque moveri videantur.

II. Omissis quæstionibus plurimis, et omninò superfluis de natura motus, considerari satis erit motum velut certissimum, atque indubitatum naturæ effectum, à nemine, nisi Sceptico, negandum. Et quidem experientia quotidiana constat, plura corpora inter se relative moveri cum infinita propemodum varietate; sed corpus unum non potest moveri relative ad alterum, nisi ad alterutrum saltem moveatur absolute, etenim si corpora duo absolute quiescunt, positionem suam inter se non mutant ac proindè si unum spectetur ut immotum, alterum etiam immotum apparebit, nullaque erit locorum mutatio relativa; ergo ex motu relativo evidenter demonstratur motus absolutus. Serio refelli non merentur ineptissimæ veterum Scepticorum argutiæ, quibus impossibilitatem motus adstruere stultissimæ laborabant. Tales cavillationes risu exipi debent, quemadmodum ab Herophilo Medico factum fuisse, narrat Sextus Empiricus. Hoc argumentum proposuerat Diodorus Crhonus Sophista: si corpus moveretur, vel moveretur in loco, in quo est, vel in loco, in quo non est; atqui nec moveri potest in loco in quo est, ut enim moveatur; debet mutare locum; nec moveri potest in loco, in quo non est, siquidem nec agere, nec pati potest, ubi non est: ergo corpus nullo modo moveri potest. Hoc sophisma lepide soluisse fertur Herophilus. Cum enim à Diodoro, ut luxatum ipsius humerum restitueret, vocatus esset, subridens dixit, eum forte alio morbo laborare, humerum è suo loco excidere non potuisse, cum nequeat moveri; etenim, inquit Herophilus, si motus esset, vel motus est in loco, in quo erat, vel in quo non erat; sed neutrum fieri potest; ergo humerus luxatus non est. Sophista, cui non placebat argumentum, rogavit Medicum, ut dictorum oblivisceretur, et remedium malo adhiberet. Ceterùm statim patet sophisma; nec enim corpus movetur in loco, in quo est, nec in loco in quo non est, sed movetur è loco in locum, seu dum continuo mutat locum, et de loco, in quo est, transfertur in locum, in quo non erat. Nihilo solidius est vulgatissimum

Zenonis argumentum. Sophisma est hujusmodi; ponatur Achillem cursu velocissimum à testudine animali tardissimo distare intervallo passum mille, atque eum centies velocius testudine moveri. Dum Achilles unum percurrit milliare, testudo milliaris partem unam centesimam conficiet, ideoque Achilles testudinem nondum est assecutus. Rursus dum Achilles partem illam milliaris centesimam percurrit, testudo interim per milliaris partem decemmillesimam reptabit, ideoque nec adhuc testudinem erit assecutus Achilles. Eodem modò dum Achilles partem illam milliaris decemmillesimam decurrit, testudo per milliaris partem millionesimam promovebitur, ideoque nec testudinem potest attingere; atque sic progredi licebit in infinitum, nec Achilles umquam poterit testudinem captare.

En celebre Zenonis sophisma, quod *Achillem* ob vim ipsius, quam existimabat insuperabilem, appellitabat. Hanc cavillationem scriptis tractatibus integris solverunt aliqui, deambulando autem solvebat Diogenes. Sophismatis fallaciam statim demonstrant Arithmetici; hoc enim in Arithmetica demonstratum, summam seriei cujusvis quantitatum in quavis proportione geometrica in infinitum decrescentium æqualem esse quantitati finitæ; sed milliaris pars $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$, $\frac{1}{100000000}$, et sic in infinitum, est series quantitatum in progressione geometrica decrescentium; ideoque illius summa cum sit æqualis quantitati finitæ, à mobili tempore finito percurri potest. Ponamus, Achillem spatio unius horæ milliare peragrasse; ergo et partem milliaris centesimam in parte horæ centesima conficiet, et partem milliaris decemmillesimam in horæ parte decemmillesima percurret, et ita in infinitum. Si hujus seriei in infinitum continuatæ summa infinito temporis spatio responderet; jam Achilles testudinem numquam assequeretur tempore finito. Verùm, ut dictum est, horæ pars $\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000}$ cet. quantitati finitæ æqualis est, uni scilicet parti nonagesimæ nonæ unius horæ, ut facilè demonstratur in Arithmetica. Igitur Achilles testudinem assequetur post elapsam horam unam, et partem horæ nonagesimam nonam. Itaque evanescit argumentum, cujus vim insuperabilem toties jactaverunt illius patroni; et quidem absurde omnino, sibique parum consentientes; cum testudinem, et Achillem, etsi numquam se invicem attingerent, magis tamen ac magis ad se mutuo accedere, ac proindè et moveri concedant. Hæc de motu generatim dicta sint, quibus, adjungendum essent alia nonnulla; sed hæc ex primo Physices articulo repetenda, ubi ea tractari doctrinæ necessitas postulabat.

ARTICULUS II.

De rectilineo corporum descensu.

I.

Motum *variabilem* jam in primo Physices capita definivimus, is nempè est, cujus velocitas continuo crescit, aut decrescit. Dicitur autem *uniformiter acceleratus*, si temporibus æqualibus æqualia accedant velocitatis incrementa; contra *uniformiter retardatus* appellatur, si velocitas tem-

poribus æqualibus ad quietem usque æqualiter decrescat. Uniformiter acceleratum esse motum vi gravitatis constantis productum, ex ipsa definitione facilè colligitur. Et quidem 1. descensum perpendicularem consideremus. Ponatur tempus, quo grave aliquod descendit, divisum esse in particulas æquales et valde exiguas, primaque temporis particula agat gravitas, et corpus perpendiculariter impellat. Si jam post primum illud tempus omnis gravitatis actio cessare fingatur, nihilominus per vim inertiæ, acquisitam velocitatem corpus perpetuo servaret. At cum gravitas desinenter agat, etiam in secunda temporis particula corpus alium gravitatis impulsum priori æqualem accipiet, ac proindè velocitas elapso secundo tempore dupla erit. Simili ratiocinatione patet velocitatem esse triplo majorem, elapso tertio tempore; et ita deinceps: ergo velocitas crescit, ut tempus, seu æqualibus temporibus æqualia accedant velocitatis incrementa, ac proindè motus est uniformiter acceleratus. 2. Si corpus descendat per planum inclinatum, res eadem facilè demonstratur: etenim corpus C (*fig.* 10.) incumbat plano inclinato F. Ex centro C ducta intelligatur CG ad basim horizontalem D B perpendicularis, quæ exhibeat gravitatem totam absolutam corporis C, et dividatur in vires duas, quarum una CF sit plano inclinato perpendicularis, altera verò eidem plano parallela. Vis quæ est, ut CF, nihil confert, ad descensum corporis per planum inclinatum, sed tota impenditur in premendo plano; superest ergo dumtaxat vis FG: sed ob triangula rectangula DAB, CFG similia erit FG : CG = = AB: AD. Hæc autem ratio eadem manet in quocumque loco plani inclinati positum sit corpus, ac proindè et eadem est ratio gravitatis absolutæ CG ad gravitatem relativam FG; igitur gravitas relativa constans est, ideoque eadem est demonstratio, quæ pro gravitate absoluta; quare motus est uniformiter acceleratus. Contraria ratione intelligitur, motum corporum in eadem recta sursum tendentem esse uniformiter retardatum; cum scilicet vis gravitatis contra motus impressi directionem perpetuo, et uniformiter agens æqualibus temporibus æqualiter motum minuat, usque dum velocitas omnis sursum extincta sit.

II. Recta AB (*fig.* 11.) exhibeat tempus, quo corpus aliquod per datum quodlibet spatium descendit. Divisum intelligatur tempus in particulas innumeras, *e i*, *i m*, cet. Jam velocitas temporis particula infinite parva *ei* erit uniformis, hæc autem repræsentetur per *e f*; recta *i k* exhibebit velocitatem particula temporis infinite parva *i m*, et ita deinceps; sed ex demonstratis in primo articulo, spatium motu uniformi percursum est, ut rectangulum sub tempore, et celeritate; quare erit spatium percursum tempore *e i* velocitate *c f*, ut rectangulum *i f*; eodem modo spatium percursum tempore *i m*, et celeritate *i k* erit ut rectangulum *m k*; et sic de ceteris: quare erit spatium his omnibus temporibus percursum, ut omnia hæc rectangula. Cum autem temporis particulæ sint infinite parvæ, rectangulum *i f* non differt à trapezio *e i f k*, ac proindè rectangulorum omnium summa æqualis est triangulo A B C. Jam verò ob motum uniformiter acceleratum tempora A *o* A B, sunt ut velocitates *or*, BC, ac proindè similia sunt triangula A *or*, ABC; ideoque sunt ut quadrata laterum A *o*, AB, vel *o r*, BC, hoc est, ut quadrata velocitatum, aut temporum; ac proindè etiam, quod idem est, velocitates, aut tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum. Ex hac uniformis accelerationis lege statim evidens est, spatium dimidio tempore A B percursum velocitate CB tempore AB acquisita æquale esse spatio tempore AB descripto motu uniformiter accelerato: etenim spatium velocitate uniformi BC tempore AB percursum repræsentatur per rectangulum A B C D duplum trianguli A B C: ac proindè dimidium spatium, quod est, ut triangulum ABC, velocitate uniformi BC dimidio tempore percurritur.

III. Si corpus aliquod vi gravitatis constantis tempore quolibet dato datum spatium percurrat, tempore duplo describet spatium quadruplum, tempore triplo spatium noncuplum cet. Nempè si tempora fuerint in proportione arithmetica 1. 2. 3. 4. cet. spatia percursa se habent in proportione 1. 4. 9. 16. cet. hoc est si corpus minuto uno secundo describat pedes 15, duobus secundis percurret pedes 15 × 4 tribus secundis 15 × 9, et ita deinceps. Igitur spatia singulis temporibus seorsim descripta sunt, ut numeri impares 1, 3, 5, 7. cet. ut patet. Si enim ex spatio 4 duobus primis temporibus percurso auferatur 1, spatium scilicet primo tempore descriptum, remanet 3, spatium descriptum secundo tempore, et ita dicendum de aliis quibuslibet temporibus. Ceterum patet, hæc omnia convenire etiam corporibus, quæ per plana inclinata descendunt. Demonstravimus enim, hunc esse plani inclinati effectum, ut corporis gravitatem absolutam minuat, manente tamen constante gravitatis parte reliqua.

Hinc merito inter machinas recensetur planum inclinatum; cum enim *machina* appellatur, quidquid ad motum faciliorem confert, evidens est, machinis annumerandum esse planum inclinatum cum aliquam gravitatis absolutæ partem sublevet, eam tantum superandam relinquens gravitatis partem, quæ plano inclinato parallela est.

IV. Constantem esse gravitatem terrestrem, jam antea ostendimus; itaque quidquid demonstratum est hactenus, ad gravium descensum transferri debet; ac proindè dato quolibet tempore potest spatium vi gravitatis cadendo descriptum, et viceversa dato spatio definitur tempus. Sit altitudo quælibet data, vel spatium cadendo percursum a, tempus, t, spatium data aliqua temporis parte 1 descriptum dicatur s: erit $1 : s = t^2 : a$, ideoque $s = \frac{a}{t^2}$, et $t^2 = \frac{a}{s}$ quarè $t = \frac{a}{\sqrt{s}}$ ex. gr. Si corpus pedes 60 percurrat temppre minutorum duorum secundorum, spatium quatuor minutis secundis percurrendum erit 16. 10; 4 = 4. 60 = 240. Viceversa si tempore secundorum quatuor corpus percurrat 240 pedes; tempus, quo percurritur spatium pedum 135, erit $\sqrt{135.\ \overline{16}:\ \overline{240}} = \sqrt{135 : \overline{15}} = \sqrt{9} = 3$. At observandum est, demonstratam accelerationis legem valere dumtaxat in vacuo, sublata aeris resistentia, seclusisque aliis quibuslibet impedimentis; attamen si experimenta fiant in globis, qui pondus satis magnum sub exiguo volumine continent, demonstratam accelerationis legem satis accurate servat globorum illorum descensus; hac lege descendunt globi plumbei in angustum volumen redacti; at si iidem globi in sphæram cavam mag-

næ diametri extenderentur, jam turbaretur maximè lex illa; imò eo tenuitatis reduci posset globus, ut aeri mollioris plumæ instar innataret. At de aeris, fluidorumque resistentia sermo erit deinceps. Neque etiam hìc consideramus gravitatem in magis à terra distantiis; hanc enim in ratione distantiarum duplicata decrescere jam demonstravimus. Verùm cum in distantiis à terra mille, et mille ducentum exapedarum gravitatem constantem demonstrent experimenta, talem gravitatis legem nunc explicasse satis sit. Hæc autem gravitatis doctrina debetur *Galilæo*, qui motus uniformiter accelerati leges primus omnium invenit, atque demonstravit.

V. Ex demonstratis facilè comparantur inter se corporum descensus per diversa plana inclinata. 1. Si ex puncto B ad planum inclinatum AD demittatur perpendicularis BK (*fig.* 10.) iisdem temporibus percurruntur spatia AB, AK: etenim gravitas absoluta CG est ad gravitatem relativam FG, ut longitudo plani inclinati AD ad illiùs altitudinem AB: ac proindè cum vires illæ sint constantes, erunt inter se, ut velocitates dato tempore genitæ ex sepius demonstratis. Jam ob angulum rectum in B erit AK: AB = AB : AD; quarè AK erit ad AB, ut velocitas per planum AK ad velocitatem per planum AB eodem tempore genitam. Igitur spatia AK, AB eodem tempore percurruntur. Indè autem statim patet, æqualia esse in circulo descensuum tempora per chordam quamlibet, et per diametrum verticalem; ac proindè æqualia descensuum tempora per chordas singulas. Et quidem cum angulus K sit rectus, per puncta tria A, B describi poterit circulus, cujus diameter erit AB, chordæ autem erunt AK, BK; ac proindè diameter verticalis, et chorda AK, vel BK eodem tempore describentur. Hæc autem ratiocinatio valet in circumferentiæ puncto quolibet, cum angulus semidiametro insistens sit semper rectus: quarè chordæ singulæ eodèm tempore percurruntur. 2. Tempus, quo corpus C descendit ex A in D, est ad tempus, quo cadit ex altitudine perpendiculari, ut AD ad AB. Nam ob motum uniformiter acceleratum AD est ad AK, ut quadratum temporis per AD ad quadratum temporis per AK, vel AB. Sed (ex elementis Geometriæ) AD est ad AB, ut AD ad AK, et $AD^2 : AB^2 = AD : AK$. Igitur quadratum temporis per AD est ad quadratum temporis per AK, ut AD^2 ad AB^2: ergo tempus descensus per AD est ad tempus descensus per AK hoc est per AB, ut AD ad AB. 3. Tempora descensuum per plana quotlibet inclinata ejusdem altitudinis sunt inter se, ut planorum longitudines. Nam tempus per AD est ad tempus per AB, ut AD ad AB; simili modo tempus per AM est ad tempus per AB, ut AM ad AB; ac proindè tempus per AD est ad tempus per AM, ut AD ad AM. 4. Si corpus descendat per plana quotlibet inclinata AD, AM ejusdem altitudinis, velocitates in punctis M et D acquisitæ æquales sunt inter se, ut velocitates acquisitæ in descensu perpendiculari per AB. Cum enim spatia AB, AK motu uniformiter accelerato percurrantur, velocitas acquisita in B erit ad velocitatem acquisitam in K, ut $\frac{2AB}{T}$ ad $\frac{2AK}{t}$, reducendo motum uniformiter accceleratum ad motum uniformem, quod fieri posse jam demonstravimus, sumpto scilicet spatio duplo motu uniformi eodem tempore percurso. Jam

verò ob tempora T, t æqualia, et numerum constantem 2, erit velocitas in B ad velocitetem in K, et AB ad AK, vel ut AD ad AB, ob triangula similia AKB, ABD. Sed quadratum velocitatis in D est ad quadratum velocitatis in K, ut AD ad AK, et præterea (ex elementis Geometriæ) $AD : AB = AB : AK$; quarè $AD : AK = AB^2 : AB^2$: ergo quadratum velocitatis in D est ad quadratum velocitatis in K, ut AD^2 ad AB^2; ac proindè velocitas acquisita in D est ad velocitatem acquisitam in K, ut AD ad AB, vel ut velocitas acquisita in B ad velocitatem acquisitam in K: ergo velocitas in D æqualis est velocitati in B. Simili ratiocinatione velocitas in M æqualis demonstratur velocitati in B, ac proindè et velocitati in D; atque demonstratio valet de alio quolibet planorum numero. His quatuor numeris comprehendimus præcipuas corporum per plana inclinata descendentium leges, eas scilicet, quæ ad sequentem articulum intelligendum necessariæ omninò sunt.

ARTICULUS III.

De motu curvilineo.

I.

Demonstratum est jam, ubi virium compositionem, et resolutionem explicavimus; nullam curvam vi unicam describi posse, sed requiri saltem vires duas diversæ naturæ, quæ scilicet rationem perpetuo variabilem inter se habeant. Evidens est, infinitum à Geometris considerari posse virium ordinem, ac proindè, et curvas numero infinitas; at Physicis considerare satis est illas virium rationes, quæ in rerum natura generatim obtinent. Itaque duas in hoc articulo distinguemus motuum species; alii sunt motus *liberi*, corporum scilicet, quæ semel mota sibi deinde libere permittuntur; alii autem sunt motus *non liberi*, corporum nempè, quæ impedimento aliquo retinentur. Ad primam motuum speciem pertinet corporum projectilium motus; ad alteram autem pertinet motus pendulorum. De hac duplici motuum specie ex ordine tractabimus, præmisso principio, ex quo universa pendet curvilineorum motuum doctrina.

Consideretur latus infinitesimum curvæ AB, per quod labatur corpus B velocitate qualibet finita expressa per BC. (*fig.* 12.) Jam ubi corpus pervenit in C, viam flectit per CD, ita ut producto latere BC, angulus externus BCM sit infinite parvus. Potest enim curva quælibet considerari tamquam composita ex planis inclinatis numero infinitis, et infinite parvis, quorum proindè inclinatio debet esse infinite parva, ut planorum inclinatorum series abeat in curvam continuam. Jam verò latus CD se habet tamquam obstaculum uniformem corporis motum secundum directionem BC retardans: quarè vis finita BC dividi debet in vires duas, unam secundum directionem BN, vel CD lateri CD parallelam, et alteram BM vel NC perpendicularem ad CD. Sola infinita expressa per BN corpus describit latus CD eodem tempore, quod describeret latus BC, ideoque æquales sunt CD, et BN motu uniformi eodem tempore percursæ; quæ quidem omnia manifesta sunt, si revocentur in memoriam, quæ de virium compositione, et resolutione demonstrata sunt. Porrò in hac demonstratione ponitur, abesse vim omnem elasticam, et resistentiam quamlibet. Est au-

tem vis expressa per NC, vel BM quantitas infinitesima primi ordinis, cum sit sinus anguli infinitesimi BCM, cujus radius est BC exprimens vim finitam; vis autem NC tota consumitur in premendo latere CD, nihilque confert ad velocitatem per curvam. Igitur velocitas corporis B per latus CD est ad illius velocitatem per latus BC, ut BN ad BC. Jam centro B radio BN describatur arcus NI, erit BI = BN, ac proindè CI exhibebit velocitatem amissam. Sed arcus NI considerari potest tamquam recta infinite parva ex angulo recto N in hypothenusam BC perpendiculariter demissa: ergo NC est media proportionalis inter CB, et CI; sed CB est quantitas finita; NC infinitesima primi ordinis; ergo CI est infinitesima ordinis secundi, ac proindè corpus curvam describens ex latere infinitesimo in aliud contiguum transiens, non admittit nisi velocitatis partem infinitesimam ordinis secundi, ac proindè per finitum curvæ arcum descendens amittet dumtaxat velocitatis partem infinitesimam ordinis primi, hoc est, nullam, atque hoc est universalissimum curvilinei motus principium. Jam primam motuum speciem consideremus.

II. Ex præalti montis vertice explosus intelligatur globus missilis secundum directionem horizontalem, alia quælibet directio considerari posset, sed directionem hanc omnium simplicissimam, et commodissimam nunc adhibere satis sit. Jam si vis globo missili impressa fingatur infinite parva, vi gravitatis in terram globus perpendiculariter recideret; si autem vis impressa ponatur infinite magna, secundum directionem horizontalem globus perpetuo movebitur. Hæ sunt duæ extremæ hypotheses, inter quas infiniti alii casus esse possunt, sed eos dumtaxat exponemus, qui ad Pysicam pertinent. I. Globus missilis projiciatur per rectam horizontalem AB (*fig.* 13.) et interea vi gravitatis constanti perpendiculariter urgeatur secundum directionem AR. Jam recta AB divisa intelligatur in partes innumeras æquales, ut AE vi semel impressa temporibus æqualibus descriptas, rectæ illæ repræsentare poterunt tempora, sunt enim tempora inter se, ut spatia motu uniformi descripta; si autem ad singula divisionum puncta ducantur rectæ ad horizontem perpendiculares, ut QE, ita ut rectæ illæ sint, ut quadrata rectarum AE; spatia singulis temporibus motu uniformiter accelerato descripta per easdem rectas exhibentur. Itaque corpus motu composito describet diagonalem virium AE, EQ, cujus hæc erit natura, ut nempè rectæ EQ, vel AH semper sint, ut quadrata rectarum AE vel QH, ductis scilicet AE, HQ; et AH, EQ parallelis; sed hæc est natura curvæ, quam *Parabolam Apollonianam* vocant Geometræ, ut nempè *abscissæ* semper sint ut quadrata *ordinatarum*; ergo gravia projecta in hac gravitatis lege Parabolam describunt. Evidens autem est, eamdem manere demonstrationem, etiamsi projectionis directio fuerit ab horizonte utcumque obliqua; tota enim demonstratio pendet ex duorum motuum compositione, quorum unus est uniformis, alter autem uniformiter acceleratus. Porrò quæcumque sit projectionis ad horizontem inclinatio, eadem manet motuum illorum natura, ac proindè et eadem natura curvæ. II. Luna revolvitur circa terram, ideoque globi missilis instar projecta intelligi potest secundum directionem tangentis orbitæ, et interim vi centripeta tendens in terram. Verùm in primo casu

ob exiguas à tellure distantias gravitatem tamquam constantem fingere, illiusque directiones velut parallelas habere licet, quæ quidem hypothesis ad corpora cælestia transferri non potest; cum ob magnas distantias, neque constantem gravitatem, neque illius directiones velut parallelas considerare liceat. Jam evidens est, globum juxta telluris tangentem minori velocitate emissum describere arcum minorem, majore autem velocitate arcum majorem, atque aucta adhuc velocitate longius pergere, ita ut prætergredi possit totum telluris ambitum, et ad montem, unde projectus fuerat, redire. Fingamus jam corpora quælibet de regionibus altioribus projici, et ad terram, vel solem, aut quodlibet punctum vi centripeta tendere, pro varia corporum velocitate, et vi gravitatis describentur arcus vel concentrici, vel excentrici; atque in suis orbitis pergent corpora admodum Planetarum per cælos vagari. Sed hæc breviter annotata sint; de hoc argumento jam aliqua diximus attractionis doctrinam explicantes, atque rursus dicendi recurret locus in Astronomia; de motu pendulorum jam paulo fusius disserendum.

III. Pendulum vel *simplex* est, vel *compositum*; pendulum simplex appellatur filum puncto aliquo suspensum, quod tamquam inflexibile, et gravitatis expers considaratur, altera autem extrimitate pondere onustum: si filum plura habeat annexa pondera, pendulum compositum appellatur: penduli *oscillatio*, aut *vibratio* appellatur motus alternus, quo virga penduli circa fixum suspensionis punctum itum, et reditum absolvit: si autem pendula duo suas vibrationes eodem tempore absolvant, pendula illa dicentur *isochona*. Si pendulum aliquod simplex CP. (*fig.* 14.) in linea vertili constituatur, in puncto infimo P quiescit, ideoque punctum illud vocatur punctum *quietis*. At si pendulum attollatur ad punctum A, et deinde sibi permittatur, motu accelerato relabetur in P. Et quidem penduli motum consideremus in puncto aliquo N, atque ponderis gravitas absoluta repræsentetur per NG; hæc dividi poterit in vires NH, NI, quarum prima cum tota dirigatur ad punctum suspensionis C, ipsius puncti resistentia omninò extinguitur; altera autem, quæ est secundum directionem tangentis, exprimit gravitatem relativam, atque vi illa corpus motu accelerato descendit ad punctum P, ubi vis NI omninò evanescit. In hoc tamen puncto quiescere non potest pendulum; sed per vim inertiæ acquisitam servans velocitatem ascendit versus B; ita ut æquales sint arcus AP, PK, descendendo et ascendendo descripti, atque etiam æqualia descensus et ascensus tempora Verùm dum corpus ex P versus K ascendit, perpetuo agit vis relativa gravitatis secundum directionem oppositam NI, ac proindè in puncto b extinguit omnes velocitatis gradus acquisitos; quarè corpus propria gravitate relabitur, non secus, ac ex puncto A primum descendit. Hæc autem omnia manifesta sunt ex articulo præcedenti et ex numero primo articuli hujus.

IV. Tempora descensuum per curvas similes, et ad horizontem similiter inclinatas, esse in ratione subduplicata laterum homologorum, ex locis citatis facilè etiam colligitur: etenim latera minima HG, GF, FD, (*fig.* 15.) itemque hg, gf, fd; exhibeant infinitesimas curvarum partes similes, et ad horizontem similiter inclinatas; jam tempus per GH est ad tempus per hg, ut $\sqrt{HG}$

ad $\sqrt{hg}$. Similiter tempus per GF est ad tempus per gf, ut $\sqrt{GF}$ ad $\sqrt{gf}$, sed (per hipothesim) HG : hg. $==$ GE : gf; ergo $\sqrt{HG} : \sqrt{hg} == \sqrt{GF} : \sqrt{gf}$; ac proindè tempus per GF est ad tempus per gf, ut $\sqrt{HG} ; \sqrt{hg}$. Simili ratione tempus per FD est ad tempus per fd, ut $\sqrt{HG} : \sqrt{hg}$; ergo tempus totum per HG + GF + FD est ad tempus totum per hg + gf + fd, ut $\sqrt{HG} : \sqrt{hg}$, hoc est, in ratione subduplicata laterum homologorum. Inde autem pendet universa pendulorum per circulares arcus excurrentium doctrina. I. Velocitas penduli CB in puncto infimo B, est ut chorda BK (*fig.* 16.) arcus KDB ex puncto K descripti: etenim ducatur KF ad CB perpendicularis: erit velocitas penduli in descensu per arcum KDB acquisita æqualis velocitati, quam corpus acquireret cadendo ex altitudine FB, ac proindè ut $\sqrt{FB}$; sed (ex elementis Geometriæ) BF: BK $=$ BK : BA, ideoque BF×BA $==$ BK^2; ergo cum sit BA constans, erit BF, ut BK^2; ideoque $\sqrt{BF}$ est, ut BK: quare velocitas acquisita in B, quæ est ut BF, erit etiam ut BK, nempè ut, chorda quæ quidem proprietas circuli eximiæ est utilitatis, præsertìm ubi ad experientiam revocandæ sunt conflictuum leges in proximo articulo demonstrandæ. 2. Si pendula duo arcus similes describant, erunt vibrationum tempora in ratione subduplicata longitudinum pendulorum, ut ex præcedenti demonstratione patet; sed numerus vibrationum eo major est, dato tempore, quo minus est, vibrationis unius tempus; seu quod idem est, numeri vibrationum sunt in ratione subduplicata inversa longitudinum pendulorum: quare datis duorum pendulorum longitudinibus, datoque vibrationum numero tempore aliquo ab alterutro pendulo peractarum, invenietur numerus vibrationum eodem dato tempore ab altero pendulo confectarum dicendo, longitudo penduli unius est ad longitudinem penduli alterius, ut quadratum numeri vibrationum dati ad quadratum numeri vibrationum quæsiti; et viceversa invenietur penduli longitudo talis, ut datum quemlibet vibrationum numerum dato tempore perficiat. 3. Si pendula duo fuerint isochrona, erunt vires gravitatis acceleratrices ut pendulorum longitudines. Sunt enim vires constantes, ut spatia iisdem temporibus descripta, spatia autem in hoc casu sunt similes pendulorum arcus, qui proindè sunt, ut longitudines pendulorum; quare et vires gravitatis in eadem sunt longitudinum ratione: quod quidem maxime valet ad definiendum gravitatis incrementum, vel decrementum in variis terræ locis, ut deindè explicavimus.

V. Hactenus consideravimus pendulum simplex, quale nullum existere potest in rerum natura; nulla enim est virga, quæ gravitate omni careat, ac proindè pendula omnia sunt composita. Rem breviter exponemus, quantum difficultas patitur. Si bina pondera filo suspensa in diversa à puncto suspensionis distantia suas oscillationes

peragant, virgaque ipsa concipiatur inflexibilis, sine pondere, et sine vi inertiæ; pondus, quod puncto suspensionis proprius est, suas oscillationes citius absolvere debet; contra autem tardius, quo à puncto suspensionis remotius est, in ratione scilicet subduplicata distantiarum. Id quidem contingeret, si pondera oscillationes suas seorsim peragerent; verum quia penduli virga omninò rigida, et inflexibilis ponitur, suas oscillationes eodem tempore pondera absolvent, atque ita componentur inter se velociores, et tardiores ponderum motus, ut medio quodam tempore suas vibrationes perficere debeant. Jam si inveniatur punctum aliquod, in quod bina pondera collecta suas vibrationes eodem tempore perficerent, illud punctum dicitur *centrum oscillationis*, ejusque à puncto suspensionis distantia erit longitudo penduli simplicis pendulo composito isocrhoni. Quod autem diximus de binis ponderibus, idem quoque intelligi potest de alio quolibet ponderum numero, ac proindè et de infinitis pondusculis per virgam penduli dispersis, in quo quidem casu gravitatis fili ratio habetur. At si filum sit subtilissimum, ita ut illius pondus cum ipso globi appensi pondere comparatum sit valde exiguum, et præterea si valde ixigua sit globi diameter cum fili longitudine comparata, jam pendulum velut simplex considerari potest Quia vero sublimior Geometria exhibet generales formulas, quarum ope invenitur oscillationis, ideoque pendulum compositum ad simplex reducitur, satis nobis fuit penduli simplicis doctrinam explicasse; alia autem plurima, quæ in hoc articulo brevius diximus, ex secuenti conclusione magis fient manifesta.

CONCLUSIO.

Gravitatis terrestris inæqualitatem demonstrant accuratissimè instituta pendulorum experimenta.

Demonstratur: si observetur longitudo peduli isochroni in duobus locis, erunt vires in iis locis, ut pendulorum longitudines, ex antea demonstratis. Licebit ergo gravitatis incrementum perspicere, diligenter observata in variis terræ locis penduli isochroni longitudine. Quanta autem in capiendis hujusmodi experimentis adhiberi habeat diligentia, repetendum est ex monumentis Parisiensibus anno 1735. nihil enim accuratius, ac religiosius tradi potest, quam quod ibidem hac in re præscripsit vir clarissimus Dominus de Mairan. Hæc autem præcipue curanda monet. 1. accurata habenda est mensura pedis Parisiensis, vel altera quælibet mensura, cujus ad pedem Parisiensem nota sit ratio, ita ut decima, et si fieri potest, centesima lineæ parte non aberret: 2. parari debet globus exacte rotundus, diametro circiter unius pollicis, ex materia bene compacta. 3. adhibendum est filum flexibile, nec ita complicatum; ut oscillationes laterales mutet in conicas, quas quidem diligenter evitari multis de causis expedit. Optimum omnium, et jam ferè ab omnibus adhiberi solitum est filum, quod paratur ex foliis *aleos*. Fili autem pondus si fuerit millesima pars ponderis globi, in pendulo pedum 3. linearum 8. attollit centrum oscillationis, una quartadecima parte lineæ unius; in aliis casibus ea elevatio erit quam proximè, ut longitudo fili directa, et ut pondus globi inverse, quod demonstrat vir prælaudatus.

4. summa utendum est diligentia in capienda distantia puncti suspensionis à centro globi, vel ab imo globi puncto; habita autem distantia puncti suspensionis à centro, si ei addantur $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis post ipsam, et globi semidiametrum, habebitur penduli longitudo; 5. demum paratum sit oportet horologium accuratum, quod dirigatur per appulsum stellæ alicujus ad telescopium immotum, vel Solis ad lineam meridianam; oscillationes autem maxima cura, ea sine ullo erroris periculo numerandæ sunt.

Tanta autem adhibita diligentia, quæ in re subtilissima omninò quidem necessaria est, jam certò definitum habemus penduli isochroni mensuram breviorem fieri pergendo à Polis ad Æquatorem, contra verò longiorem ab Æquatore ad Polos. Ita ergo comperta est gravitatis inæqualitas in diversis terræ locis, ut nemo sit, qui de ea dubitet. Non defuerunt quidem doctissimi etiam viri, qui observationibus per Europam institutis, gravitatem ubique æqualem se invenisse, profiterentur; verum quod minus feliciter successerit observatio, summo consensu nunc tribuunt Physici iis methodis, quæ tum in usu erant minus perfectæ, et perpolitæ, ita ut exiguum gravitatis discrimen tam exiguis locorum intervallis debitum deprehendere nequaquam licuerit. Hinc observationes multo accuratioribus instrumentis institutæ sunt in plurimis, et admodum dissitis terræ locis; omnium autem observationum fide certo constat gravitatis inæqualitas. Hic autem longius esset describere varias pendulorum longitudines, quarum tabulas videre est in eximiis operibus, quæ de telluris figura paucis abhinc annis in lucem prodiere

Quamvis ad determinandam gravitatis inæqualitatem solius penduli isochroni mentionem fecerimus, evidens tamen est, pari successu adhiberi posse pendulum non isocrhonum: etenim ex doctrina motus uniformiter accelerati in præcedenti articulo explicata, spatia crescunt, ut quadrata temporum, eadem manente vi acceleratrice; si autem vires acceleratrices diversæ fuerint, seorsim tamen consideratæ uniformes maneant; quo major est vis acceleratrix eo majus est spatium dato tempore percursum, ac proindè spatia sunt, ut quadrata temporum, et vires acceleratrices conjunctim; ideoque vires acceleratrices sunt, ut spatia descripta directe, et quadrata temporum inverse. Jam verò in casu pendulorum spatia sunt, ut longitudines pendulorum; erunt ergo vires gravitatis, ut longitudines pendulorum directe, et quadrata temporum oscillationum inverse. Igitur manente penduli longitudine, vires gravitatis sunt, ut quadrata temporum oscillationum reciproce. Itaque patet, ejusdem penduli ope gravitatis comparationem in diversis terræ locis institui posse; tanta enim diligentia numerus oscillationum dato tempore determinatur, ut ne dimidiæ quidem oscillationis error committi possit. Hac methodo gravitatis inæqualitas primum detecta est à *Richero*, cujus observationes jam antea commemorabimus.

Ut tota hæc quæstio maximi sane momenti in bono lumine collocetur, meminisse oportet, duplicem considerari posse gravitatem: aliam nempè *primitivam* nulla vi centrifuga perturbatam, aliam autem vi centrifuga imminutam, quam gravitatem *actualem* appellare licet; totam rem

breviter explicabimus, ut facere solent, qui telluris circa axem rotationem admittunt. Sit AB diameter Æquatoris, cujus P, p Poli, sitque DE (*fig.* 17.) semidiameter paralleli cujusvis. Quoniam in circulari motu vis centrifuga dirigitur ad partes circuli descripti centro oppositas, in æquatore A dirigetur ad partes oppositas centro terræ C per CA; in parallelo D ad partes oppositas centro paralleli E per ED. Jam vero gravitas ubique dirigitur ad centrum terræ C, saltem quoad sensum, nimirum in A per AC, in D per DC. Præterea directio CA est penitus contraria directioni AC; at patet ex motuum compositione, et resolutione directionem vis centrifugæ per ED referendam esse ad directionem vis gravitatis per CD, nempè vim centrifugam in D exprimat recta DO, hæc resolvatur in ON ipsi CD normalem, et in DN secundum directionem ipsius CD. Hæc sola pars vis centrifugæ opponitur directioni gravitatis in D. Jam facilè invenitur ratio vis centrifugæ in D secundum directionem DN ad vim centrifugam in A: etenim exprimat AI vim centrifugam in A, erit ex demonstratis de vi centrifuga AI ad DO, ut AC vel DC ad DE. Præterea ob triangulorum DCE, ODN similitudinem, erit iterum CD ad DE, ut DO ad DN, ideoque compositis rationibus CA^2 ad DE^2, ut AI ad DN. Ex hac demonstratione æstimàri potest effectus vis centrifugæ in quolibet terræ loco, patet autem, vis centrifugæ effectum talem esse, ut gravitati primitivæ minus detrahat pergendo ab Æquatore ad Polos, et quidem duplici de causa: tum quia decrescit ipsa vis centrifuga, quæ in Polo evadit nulla, tum quia ejus directio gravitatis directioni minus directe opponitur. Ex his etiam facilè determinatur: