ratio vis centrifugæ ad gravitatem primitivam. Si fingamus corporis alicujus sub Æquatore gravitatem omnem sublatam, jam posito rotationis motu corpus illud per telluris tangentem elaberetur, ideoque minuti unius secundi intervallo supra ipsum telluris globum attolleretur tota illa altitudine, quæ est inter tangentem, et arcum minuti unius secundi tempore descriptum, quæ quidem lineola tangente, et arcu comprehensa ex elementis Geometriæ facilè invenitur. Hæc exprimet vim centrifugam sub Æquatore; addi autem debet spatio, quod corpora sub Æquatore minuti unius secundi tempori libere descendendo percurrunt, atque habebitur gravitas primitiva sub Æquatore, quæ proinde conferri poterit cum vi centrifuga data, atque ita dicendum de aliis quibuslibet terræ locis. Sed hæc paucis indicasse sufficiat; convenientius enim explicabuntur, ubi de figura telluris; in hac conclusione solam gravitatis variationem demonstrandam suscepimus

Objic.: doctrina pendulorum hactenus explicata omnem excludit medii resistentiam; at certissimum est pendula impedimentis plurimis obnoxia esse. Et quidem aeris resistentia maximè retardantur; in ipso suspensionis puncto mutuus fit attritus, atque hinc oritur aliud omninò inevitabile impedimentum. Itaque sic argumentari licet: gravitatis variationem non demonstrant experimenta illa, quæ nulla sufficienti diligentia institui possunt; atqui. cet.: ergo cet.

Resp. C. maj. N. min. Aeris, aut mutui attritus impedimento tribui non potest differentia, quæ in pendulorum longitudine observata est. Et quidem iisdem impedimentis afficiuntur pendula tum sub Æquatore, tum versus Polos. Neque est,

quod dicant, aliqua fortasse de causa majorem esse aeris resistentiam versus Æquatorem, ac proindè et majorem penduli retardationem. Et certè in tam exigua velocitate exigua omninò esse debet, et ferè nulla aeris resistentia, quæ si qui agit, ubique eodem ferè modo mutum retardat, et potius minus sub Æquatore ob minorem aeris densitatem, majori scilicet calore vigente. Præterea etiam diligentissimi viri, qui pendulorum longitudinem observarunt, nullam prætermisere diligentiam, ut penduli retardationem ex aeris resistentia oriundam cognoscerent, adhibitis quoque accuratissimis barometris, quæ atmosphæræ variationem indicarent; sed tanta diligentia necessaria quidem fuit, ut accurate, et adamussim definiretur vera penduli longitudo, mediocris autem diligentia satis fuit, ut variatio penduli innotesceret; tanta enim est, ut observationibus etiam sine maxima subtilitate institutis sese conspicuam præbeat. Præterea omni caret verisimilitudine, observationes omnes in eumdem errorem perpetuo conspirare, quod nempè penduli isochroni longitudinem per gradus minorem faciant, pergendo à Polis ad Æquatorem. Porrò in præsenti conclusione generatim dumtaxat agimus de gravitatis inæqualitate; rem verò accuratius determinare pertinet ad Geographiam, ubi telluris figuram investigabimus.

Instabis 1.: in pendulorum observationibus non apparet summus ille consensus, qui tamen ad fidem faciendam necessarius omninò est. Circumferuntur plurime observationum tabulæ, quæ quidem à se invicem non parum discrepant. Imò Picardus per totam Galliam, et *Vranoburgi* eamdem invenit penduli longitudinem. Unde sic concludi potest; gravitatis variationem non demonstrant observationes illæ, quas erroris suspectas reddit earum dissensus; atqui cet.: ergo cet.

Resp. Dist. maj.: erroris suspectæ sunt observationes, quoad veram, et accuratam pendulorum longitudinem, transeat, quoad longitudinem penduli generatim consideratam, N.: quarè distincta min. N. cons. Re quidem vera plurimos observationum catalogos inter se minime conspirantes exhibuerunt doctissimi viri, sed quamvis ob rei difficultatem in eadem non consentiant penduli longitudine, in id tamen conspirant omnes, ut in præcedenti responsione observavimus, quod nempè pendulum ostendant brevius sub *Æquatore*, longius versus Polos. Quod autem *Completus* eamdem in universa Galia inveniret penduli longitudinem, referri debet nimis exigue locorum distantiæ, atque etiam instrumentis minus accuratis pro ea, quam tales observationes postulant, subtilitate. Dixi autem *transeat*: tanta enim diligentia his nuperrimis annis iterata fuerunt experimenta, ut miranda omninò sit tanta consensio; tantillas enim habent differentias, quas nulla diligentissimorum virorum industria vitare potest.

Instabis 2.: durissima quæque metalla vi caloris extendi, frigore autem contrahi, certissimum est. Notissimum est Physicis instrumentum, quod *Pyrometrum* dicitur: hæc est illius structura. Constat ex lamella metallica, cujus extremitas una in denticulos desinit: hi autem denticuli axis perpendicularis cavitatibus; seu canaliculis inseruntur; axis autem rotæ horizontalis dentes ingreditur. Subtus lamellam metallicam aptata sunt ellichnia, quæ admoto igne flammam concipiunt. Rebus ita dispositis, lamella distenditur, illiusque

proindè denticuli axis cavitates per vices subeunt et eumdem axem convertunt; revolvi autem non potest axis, nisi moveatur quoque rota superior horizontalis huic contigua: quarè si centro rotæ aptatus fuerit indiculus, qui circumferentiam in gradus, graduumque partes divisam libere percurrat, ipsam lamellæ dilationem ex graduum percursorum numero æstimare licebit. Tanta autem est dilatio, ut circumferentiam integram indiculus aliquando describere videatur. Si verò ad calorem extinguendum aqua lamellam perfundas, ad pristinum locum retrogrado motu redibit indiculus, ideoque et lamella justum contractionis statum recuperabit. Eamdem dilatationem accuratissimis observationibus expertus est Clarissimus *de Mairan*, soli igni, et aquæ ebullienti expositis metallorum virgis. Igitur probabile est, caloris vi sub Zona torrida crevisse longitudinem penduli, quod idcirco lentius moveri debuit; idem verò pendulum Parisios translatum rursus contrahebatur. Unde sic gravitatis inæqualitati referri non debent experimenta illa, quæ in alternam pendulorum dilatationem, et contractionem refundi possunt; atqui cet.: ergo cet.

Resp. N. min. Observatam penduli variationem caloris vi tribuendam non esse, indubitatum omninò est. Virga ferrea pedum sex æstivo Soli meridiano diu exposita, experimentis diligenter institutis inventa est major, per duas tertias partes lineæ, ideoque per decimam octavam partem pollicis Parisiensis. Virga pedis unius ad ignem candefecta per dimidiam excrevit lineam. Primus calor ex Sole æstivo meridiano conceptus satis quidem vehemens in virga penduli pedum trium induceret unam tertiam lineæ partem. Alter autem calor vehementissimus, igne scilicet excitatus, lineæ unius cum dimidia variationem exhiberet. At pendulum, quo utebantur diligentissimi viri, multo minorem calorem debuit concipere, nec igni expositum, nec solaribus radiis; imò caloris effectus summa diligentia impediebatur, vel redacto conclavi, in quod experimenta instituebantur, ad calidioris loci temperiem, quod igne admoto, et adhibito Thermometro in Laponia præstitit Dominus *de Maupertuis*, vel notando oscillationum discrimen singulis gradibus caloris debitum, quod Thermometri ope diligenter perfecit *Grahamus*; hac enim adhibita diligentia variatio calori debita à tota penduli inæqualitate tuto detrahebatur. His autem præsidiis exercitatissimi viri in plurimis locis plures observationes habuerant. *Torneæ* in Laponia inventa est longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis pedum 3, linearum $9\frac{1}{100}$ Parisiis pedum 3, linearum $8, \frac{67}{100}$, sub Æquatore pedum 3, linearum $7\frac{21}{100}$. Hanc autem tantam differentiam vi caloris tribuendam non esse, ex hactenus dictis facilè patet.

Instabis 3. quamvis gravitatem minorem sub Æquatore ostendant pendulorum observationes, inde tamen minime colligi potest gravitatis inæqualitas, ab Æquatore ad Polos certam servans legem: etenim fingamus gravitatem, qualem requirit Newtoniana hypothesis, in ratione reciproca duplicata distantiarum à singulis materiæ particulis, fingatur quoque terra sphærica homogenea, ac dematur sub Æquatore B sphæra materiæ, cujus radius BI (*fig.* 18.) contineat milliaria quatuor; jam detrahetur in B pars circiter millesima gravitatis. Nam terræ semidiameter CB est milliarium circiter 4000. et attractio in sphæram CB est ad attractionem in BI, ut BC ad BI, sive ut 1000. ad 1, quod antea demonstravimus; at in B nullum observari poterit decrementum gravitatis. Est enim attractio puncti F in sphæram IB, ad attractionem puncti B in eadem, ut BI^2, ad FI, sive proximè ut IB^2, ad $2BC^2$, sive ut 16. ad 32000000; nimirum decrementum gravitatis in F, erit $\frac{1}{2000000}$ decrementi in B, et $\frac{1}{2000000000}$ gravitatis totius. Si jam sphæra BI transferatur in F, eodem argumento ibi crescet pars millesima gravitatis, nihil in B, eritque differentia inter B et F pars quingentesima gravitatis. Si dupla sphæræ diameter adhibita fuisset, prodisset differentia dupla, nimirum pars ducentesima, et quinquagesima-quarta, qualis ferè per observationes pendulorum invenitur; quamvis autem gratis omninò fingatur sub Æquatore in B existere cavernam ingentem, cujus diameter sit milliarium octo: certum tamen est multo minus materiæ sub Æquatore, quam sub Polis contineri; nam ob ingentem calorem perpetuum corpora omnia rariora sunt versus Æquatorem; at versus Polos perpetuis nivibus, et glacie rigent omnia. Præterea observationes pleræque in America factæ sunt in locis maritimis, immenso Oceano cunctis, cujus et magna est profunditas et ingens extensio; reliquæ in Europa observationes institutæ sunt in locis à mari remotioribus, et supra maris superficiem ita elatis, ut illa major à centro distantia minus detrahat gravitati, quam addat tanta materiæ quantitas late circumfusa. Ex his omnibus sic aliqui solent argumentari. Certum gravitatis incrementum, vel decrementum non ostendunt inæqualitates illæ, quæ recensitis causis tribui possunt; atqui cet. : ergo cet.

Resp. transeat maj. N. min. ; ad majorem dico *transeat*, in præsenti enim quæstione sermo est dumtaxat de gravitatis inæqualitate, non verò de hujus inæqualitatis lege et causa; at pro mero figmento certè haberi debent in locis quibusdam cavernæ, in locis aliis montes; ecquis enim facilè crediderit per universam tellurem tali ordine montium, cavernarumque seriem distributam fuisse, ut certis pendulorum legibus accurate respondeat? Et quidem observationes non tantum sub Æquatore et prope polos, sed etiam in locis aliis plurimis, et longius à montibus fuerunt institutæ. Tandèm versus Æquatorem eminent altissimi montes quorum ea fuit vis attractiva, ut pendulum à perpendiculari directione septem secundorum intervallo dimovere potuerit, ut antea observavimus. Verùm juxta objectionis hypothesim tellus sub Æquatore montibus iminere non debet, sed contra cavernis ingentibus hiare. Hic autem data iterum occasione de mentium attractione pauca revocabimus, ex quibus intelligatur, altioribus quoque montibus exiguam omninò vim tribuendam esse, illosque minimam continere materiæ quantitatem, si cum massa telluris conferantur. Ponamus montem tria milliaria altum, qualia est circiter altitudo montis *Chimboraco*. Hunc montem exhibeat sphæra D in superficie telluris, quam tangat recta CLD, (*fig.* 19.) erit gravitas in L in

tellurem ad gravitatem in D in sphæram, ut sphærarum radii (ex demonstratis) gravitas autem in L in tellurem ad gravitatem in D in eamdèm in ratione reciproca duplicata distantiarum LC, DC, à centro ejusdem, ac proindè si DH exprimat gravitatem in terram in D, erit DC: LC2. = = LC: DH: et completo rectangulo ODHA, dirigetur gravitas per HO ex motuum compositione. Jam verò in triangulo rectangulo DHA dicatur: ut DH est ad HA, ita radius ad tangentem anguli DHA; quia autem data est semidiameter telluris, quæ minor est milliariis parisiensibus 3940, ac proindè et ipsa DH, dabitur angulus HDA qui invenitur 1''. 18'''. Talis ergo esse deberet aberratio penduli prope montem *Chimboraco*; quæ tamen aberratio per observationem prodiit dumtaxat 7''. Hic afferre placuit demonstrationem antea omissam, principiis necessariis nondum constitutis. Hinc patet ingentes etiam montes minimam habere densitatem pro ratione voluminis: quarè certum est, montes illos cavitatibus seu cavernis hiare. Illæ autem telluris inæqualitates, quæ tantæ nobis videntur, et minimæ tamen sunt cum tota telluris massa comparatæ, probabilissime referendæ sunt in vehementiores aliquas telluris confusiones, quarum effectum ultra superiores telluris partes propagatum non fuisse, verisimillimum est. Itaque ex his omnibus colligitur ad explicandam gravitatis inæqualitatem sine ulla ratione fingi montes et hiatus certa lege per universam terram dispersos. Ceterum quamvis sæpe diximus, gravitatis legem per observationes pendulorum hìc à nobis non determinari, nemo tamen putet, id contrarium esse constitutæ antea attractionis legi in ratione distantiarum duplicata decrescentis: etenim hanc attractionis legem demonstravimus inter corpora cælestia magnis intervallis à se invicem remotissima, in quibus proindè diversam densitatem negligere licuit. Gravitatem terrestrem in eadem quoque ratione decrescere ostendimus, sed gravitatem consideravimus in eodem dumtaxat telluris loco; nullam verò rationem habuimus illarum inæqualitatum quæ ex varia telluris densitate aliisque causis originem habere possunt. Tandèm inæqualitates illæ nihil repugnant demonstratæ attractionii legi, cum oriantur ex ipsa attractionis lege in ratione directa massarum et duplicata inversa distantiarum. Sed ut jam sæpe monuimus, fusior explicatio ad alium locum pertinet, ubi de figura telluris.

Instabis 4. : pendulorum observationes haberi non possunt nisi facta comparatione cum horologii motu. At horologia constant ex variis partibus, quæ singulæ impedimentis plurimis afficiuntur: humido vel arido cælo magis vel minus lubricæ fiunt rotæ, modo velociores, modo tardiores; hinc fit ut pendulum horologii in longiores vel breviores arcus excurrat, ac proindè idem non servetur singularum oscillationum tempus. Tandèm vitium aliud, quod in pendulo simplici jam notavimus, in horologiorum pendulis multo magis crescit ob partium multitudinem et varietatem, nempè pro varia cæli temperie mutantur, varieque extenduntur et contrahuntur plurimæ horologiorum partes; hinc mutatur centri oscillationis situs. Ex his omnibus ita concludi potest: incertis causis, et sine ulla lege variis tribui potest diversa penduli longitudo, si incertus omninò sit horologiorum usus, quantum in re tam subtili desideratur; atqui cet. : ergo cet.

Resp. C. maj. N. min. Re quidem vera horologiorum partes singulæ variis mutationibus sunt obnoxiæ: at comparatione diligenter instituta inter horologii Solisque aut stellarum motum, innotescere facilè potest an horologium errorem aliquem admittat. Præterea ad vitandam mutationem ex cæli temperie oriundam adhiberi debent artificia, de quibus jam supra mentionem fecimus. His horologiorum incommodis plurima parata sunt remedia. Grahamus celeberrimus instrumentorum artifex utilissimum sane tantis malis remedium excogitavit. In extrema penduli virga suspendit tubum mercurio plenum ita ut tamen in tubo spatioli aliquid superest, per quod mercurius ipse caloris vi dilatatus cum virga intra tubum ascenderet, descendente interim tubo ipso, atque ita centrum oscillationis suo loco maneret. Est et alia ejusdem erroris corrigendi ratio: suspenditur pondus diversorum metallorum lamellis ita inter se connexis, ut dum altera lamella magis distenta ultra alteram itidem distentam pondusque deprimentem excurrit, ipsa pondus sursum attollat, et priori altitudini restituat, imò etiam non nihil majori, ita ut ipsius virgæ centri oscillationis descensus compensetur, totiusque penduli centrum oscillationis suo pertet loco. Neque hic prætermittendum est aliud artificium non minus ingeniosum, quod paucis ab hinc diebus excogitavit peritissimus horologiorum artifex Parisiensis *Lepautius*. Accuratissimis observationibus notum sit oportet, quantum dilatetur virga metallica pro dato quolibet thermometri gradu; hos autem dilatationis gradus cepit *Lepautius* ex *Bougueri* et *Ellicotii* virorum diligentissimorum experimentis. Deindè curvam dalineavit cujus radii inæquales virgæ dilatationibus semper forent proportionales, ita ut anguli quos radii singuli cum ipso divisionis initio continent, semper crescant, ut gradus thermometri. Id verò obtineri posse, evidens est descripto circulo et in suos gradus diviso, non secus ac dividitur thermometrum, hoc est, in partes 40; nam Parisiis intra hos limites consistit altitudo liquoris in thermometro; patet autem hanc curvam imitari spiralem quam *archimedeam* à suo inventore dicunt Geometræ. Tandèm compertum est, partem centesimam lineæ in dilatatione virgæ per horas 24 id efficere, ut pendulum retardet minuto uno secundo. Jam si radii centesima parte lineæ pro singulis divisionibus minuantur, manifestum est, punctum curvæ, quod quadragesimæ divisioni respondet, centro proprius esse quadraginta centesimis partibus lineæ, seu duabus quintis lineæ, quam sit ipsum curvæ initium. Quæ cum ita sint, in descriptam curvam flectatur lamella metallica, eaque sub ipsa horologii suspensione collocetur: aptata etiam acu, quæ thermometri gradibus respondeat. Totum ergo negotium huc redit, ut pro tempore aliquo dato observetur gradus thermometri, curandumque ut acus eidem gradui respondeat. Hoc idem instrumentum alteri quoque graviori malo remedium affert. Rotarum cardines in horologiis oleo imbui solent; olei autem particulæ æstivo tempore vi caloris solutæ fluunt, tempore autem hiberno frigoris vi constringuntur et indurescunt. Hinc liberiores vel difficiliores sunt oscillationes. Verùm cum malum istud ex eadèm causa pendeat, nempè, ex gradu thermometri, idem quoque adhibetur remedium, augenda nempè est radiorum inæqualitas. Igitur non solum minui debet spiralis radius centesima parte lineæ, seu quadragesima parte circumferentiæ totius circuli, sed mulctari etiam debet quantitate huic alteri effectui debita, et per observationes cognita.

Superest tandèm ut de vibrationum inæqualitate aliquid adjungam. Re quidem vera horologiorum pendula in breviores longioresque arcus variis de causis sæpe excurrunt; verùm arcus illos licet inæquales iisdem quam proximè temporibus describi demonstrant Geometræ; quod ut intelligatur, brevis sermo haberi debet de celeberrima quadam curva, quam *cycloidem* appellant. Cyclois est curva linea, quam describit punctum aliquod in circuli circumferentia pro lubitu assumptum, interea dum circulus totus super lineam rectam revolvitur. Hujus curvæ genesis repræsentari solet per imaginem clavi in rotæ superficie defixi; dum nempè rota per planum circumvolvitur, clavus in aere cycloidem percurrit: de prima cycloidis inventione acerrime certatum est circa annum 1643. inter *Torricellium* et *Robervallium*, illo primam cycloidis considerationem tribuente in Italia *Galilæo*, hoc autem in Gallia *Merseno* nostro. Sed quidquid sit de illa concertatione quæ in rixas apertasque inimicitias deindè exarsit, solam rei utilitatem, minime verò gloriam considerabimus. Plurimas inter et quidem elegantissimas cycloidis proprietates unam præ aliis afferemus, quæ ad præsentem casum pertinet; si nempè cyclois ita invertatur, ut crura sursum tendant, punctum autem infimum horizontem tangat, tum è quavis distantia demittatur grave per ipsam cycloidem, eodem omninò tempore per arcum utcumque magnum vel parvum descendet. Itaque patet hanc cycloidis proprietatem ad pendulorum usum transferri posse; si nempè efficiatur ut virga penduli in cycloide suas vibrationes absolvat; hac enim arte servatur temporis æqualitas, mutata utcumque arcuum descriptorum longitudine. Illud autem commodum sequenti artificio obtineri potest. Si curvæ cuilibet ex ejus parte convexa advolvatur filum, tum evolvatur ita ut pars evoluta semper tensa maneat, punctum fili quodcumque curvam quamdam lineam delineabit motu illo per aerem. Curva quam filum complectitur, dicitur *evoluta*; curva autem quam filum in aere describit, curva *evolutione genita* appellatur. Curva genita ferè semper admodum diversa est ab evoluta. At ceteris proprietatibus cycloidis hæc addenda est sane elegans; si nempè à summo vertice cyclois evolvatur, se ipsam generat sibi prorsus æqualem, ita ut binæ semicloidies in situ erecto positæ, et è parte convexa in ima sui parte sibi conjunctæ integram cycloidem generent. Quamobrem si binæ lamellæ semicyclojales in ima parte convexæ invertantur deorsum, ita ut ima pars evedat summa, ex ipso lamellarum angulo appendatur filum quod semicycloidis perimetro æquale sit, pondus imò filo suspensum oscillationes suas in cycloide peraget, isochronas prorsus; sive in ampliores arcus excurrant, sive brevioribus arcubus se contineant, tempore semper æquali. Hanc cycloidis proprietatem ad horologiorum usum primus omnium traduxit *Hugenius*. In horologiis vel pondus appensum, vel lamina chalibea elastica per vim contorta, motum primæ rotæ imprimit à qua in totam machinam derivatur. Jamdiu in usu erat id machinarum genus, sed *Hugenius* eidem machinæ pendulum adjecit, ita ut cum illius oscillationibus celerioris rotæ motus connecteretur, dentesque

singuli post singulas oscillationes procurrerent. Verùm jam diximus, Geometris demonstratum esse, descensus per arcus circuli minimos etiam inæquales esse quam proximè isochronos: quarè cum minimi sint circulorum arcus à pendulis descripti, tanta non est hac in re cycloidis utilitas. Præterea in pendulis simplicibus sola gravitate sollicitatis valere quidem potest cycloidis usus; sed minus felici successu horologiis aptatur. Et quidem ad penduli vibrationes præter gravitatem concurrunt quoque motrices horologii vires quæ penduli isochronismum turbare maximè possunt: quarè minimos circulorum arcus præferendus esse, ipsa quoque experientia edocti sunt horologiorum artifices. Sed hæc pauca dicta sint quantum patitur nobis imposita doctrinæ facilitas.

ARTICULUS III.

De corporum conflictu.

I.

Tria distingui debent corporum genera; *dura, mollia et elastica*. Dura dicuntur quæ ad mutandam figuram nulla vi cogi possunt. Mollia, quæ figuram ita mutant, ut mutationi resistant: eam autem amissam recuperare non nitantur. Elastica tandem dicuntur ea quæ figuram amissam recuperare nituntur. Rursus autem corpora vel sunt perfecte elastica, si nempè restituantur eadèm vi, qua fuerunt compressa; vel imperfecte elastica, si restituantur vi minori. Corporum perfecte elasticorum restitutionem ita exprimere solent Physici. Dicunt nempè, in corporibus perfècte elasticis, *vim restitutivam æqualem esse vi compres-*

sivæ. Has definitiones exemplo illustrabimus. Globi duo elastici sibi mutuo occurrant; primum quidem in puncto sese contingunt, sed partes contingentes et sese mutuo prementes cedunt magis ac magis ad certos usque limites, ac proindè augetur per gradus contactus magnitudo, donec partes compressæ per eosdem gradus, sed velocitatis ordine inverso, sese restituant, et ad pristinum statum redeant. Jam ut inter corpora elastica et non elastica comparatio instituatur, fingamus corpora dura AB (*fig.* 20.) longa elasticorum serie connexa esse; si A moveatur versus B, id fieri non potest nisi comprimantur elastra, ac proindè corpus A, agit in B per elastra interposita, atque magis ac magis hæc elastra comprimentur, donec corpora duo æquales secundum eamdèm directionem velocitates habeant: in hoc autem statu nulla vis aget in elastra; ac proindè vim elasticam exerent, et laxari incipient, sed inverso velocitatis ordine. Itaque in corporum elasticorum conflictu considerandæ sunt actiones duæ. In prima scilicet actione res se habet non secus ac si corpora essent omni elasticitate destituta, at cessante prima actione statim altera incipit, elastra nempè restituentur eadem vi, qua fuerunt compressa, si perfecta sit elasticitas. Igitur in prima actione extinguitur velocitas qua corpora ad se invicem accedebant, seu, ut vocant, velocitas *respectiva*; in altera autem actione corpora à se invicem recedunt eadem velocitate respectiva, qua nempè ad se mutuo accedebant in prima actione. Unde patet, motus quantitatem ab unoquoque corpore acquisitam vel amissam in prima actione æqualem esse quantitati motus acquisitæ vel amissæ in actione altera; ita ut quantitas motus per conflictum

acquisita vel amissa in corporibus perfecte elasticis duplo major sit, quam in corporibus perfecte duris. Quod spectat corpora imperfecte elastica, idem est in prima actione effectus ac in corporibus perfecte elasticis; verùm quia vis restitutiva minor est vi compressiva, minor quantitas motus in secunda actione acquiritur vel amittitur. At quia ex data corporum elasticitate, data etiam est ratio vis compressivæ ad vim restitutivam, seu ratio velocitatis respectivæ ante conflictum ad velocitatem respectivam post conflictum; evidens est, quantitatem motus in prima actione acquisitam vel amissam in eadem ratione augendam esse post conflictum. Tandèm quod spectat corpora mollia, quorum partes cedunt, sed ad pristinam non redeunt figuram, prima actio eadem est ac in corporibus perfecte elasticis vel perfecte duris; illorum velocitas respectiva per conflictum extinguitur, et unius corporis instar progrediuntur, cum nulla sit vis restitutiva. Illud autem discrimen inter omnia corpora probe notandum est. Corpora mollia tempore finito motum suum alteri communicaret, eo scilicet tempore; quo cedunt corporis partes, et ipsam corporis diametrum percurrunt; si corpus perfecte molle fingatur. At in corpore duro, cujus partes cedere non possunt, unico temporis puncto indivisibili communicatur motus. Tandèm in corpore perfecte elastico tempore finito motus producitur; cedunt nempè corporis partes, et crescente compressione, motu retardato ad se invicem accedunt; donec tandèm continuo agat vis restitutiva, qua fit ut partes motu accelerato ad pristinam properent figuram.

II. Omnes conflictuum leges hoc uno principio innituntur; in quavis scilicet binorum corporum collisione, quantum motus lucratur corpus unum secundum datam directionem, tantum quoque lucrari debet corpus alterum secundum directionem oppositam; quod quidem evidens est ex actionis et reactionis æqualitate. Porrò duplex casus contingere potest; vel enim corpora tendunt ad easdem partes, vel ad partes contrarias. Si primum, quidquid motus additur corpori fugienti, id detrahitur corpori incurrenti, ac proindè eadem manet tota motus quantitas post conflictum, quæ fuit ante conflictum. Si secundum, quidquid motus amittit corpus unum secundum propriam directionem, tantum quoque perit in corpore altero; illa enim corpora agunt in partes propriæ directioni oppositas. Igitur in hoc casu eadem manet differentia motuum post conflictum, quæ fuit ante conflictum. Duæ autem hujus principii partes ex duplici axiomate arithmetico facilè patent: si nempè duæ fingantur quantitates ex quarum una tantum detrahitur, quantum additur alteri, eadem manet quantitatum summa: si verò ex duabus quantitatibus æquales hinc inde partes detrahantur, eadem manet quantitatum differentia. Jam verò antequam collisionum leges ex demonstrato principio colligamus, observandum est corporum conflictum, vel *directum* esse, vel *indirectum*. Directus quidem dicitur, si corporum sibi occurrentium directio sit, in eadem linea recta; indirectus autem vel obliquus appellatur, si corporum directiones angulum inter se contineant. De corporum conflictu directo, deinde de indirecto agemus.

III. Si corpora duo non elastica sibi invicem occurrant ad easdem partes, vel ad partes contrarias, in utroque casu post conflictum instar unius

corporis progredientur: sed in primo casu velocitas communis post conflictum erit æqualis quantitate motus ante conflictum per summam massarum divisæ; in casu autem altero æqualis fiet differentiæ quantitatum motus ante conflictum divisæ per summam massarum; si nempè corporum massæ dicantur M, m, velocitates ante conflictum V, v, velocitas communis post conflictum erit 1. $\frac{MV + mv}{M + m}$ 2. $\frac{MV - mv}{M + m}$; et quidem communem esse velocitatem post conflictum, seu corpora duo post conflictum instar unius corporis progredi, evidens est. Cum enim corpora illa ponantur omni elasticitate destituta; nulla est ratio, cur à se invicem resiliant vel separentur. Facilè etiam patet in primo casu velocitatem communem æqualem esse quantitati motus ante conflictum per summam massarum divisæ: etenim quantitas motus eadem manet ante et post conflictum; est autem quantitas motus productum ex massa in velocitatem; habebitur ergo velocitas, dividendo quantitatem motus ante conflictum per summam massarum. Simili ratione patet, in casu altero velocitatem æqualem esse differentiæ quantitatum motus ante conflictum per summam massarum divisæ; cum enim eadem maneat motuum differentia ante et post conflictum, sitque quantitas motus ut factum ex massa in velocitatem, evidens est, ad habendam velocitatem id efficiendum esse, ut nempè differentia motuum à massis liberetur, quod fit dividendo per massas. Jam hujus secundi casus aliquas conditiones expendamus. Si massæ et velocitates fuerint æquales, erit $mv = MV$, ideoque $MV - mv = 0$; quarè velocitas nulla est, et ambo corpora post conflictum quiescunt. Si massæ fuerint æquales, quiescat autem massa m, erit

$$\frac{MV - mv}{M+m} = \frac{MV}{2M} = \frac{V}{2};$$

corpora nempè post conflictum dimidia velocitate progredientur. Si massa M quiescat, sitque valde magna et ferè immensa respectu massæ m, erit $MV = o$, ideoque velocitas post conflictum fieret $\frac{mv}{M+m}$, ac proindè physice nulla ob massam M valde magnam.

IV. Ex demonstratis conflictuum legibus in corporibus omni elasticitate destitutis, facilè colliguntur conflictuum leges in corporibus elasticis: etenim si corpora omni elasticitate careant, ex data velocitate communi post conflictuum, et ex data corporum massa invenitur quantitas motus in unoquoque corpore post conflictum, quæ si conferatur cum quantitate motus ante conflictum, habebitur quantitas motus per conflictum acquisita vel amissa. Jam verò in corporibus perfectè elasticis quantitas motus acquisita vel amissa duplo major est; in corporibus autem imperfecte elasticis mutatio motus augetur in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam, ex demonstratis: quarè corpora elastica considerentur primum tamquam omni elasticitate destituta, atque inveniatur quantitas motus acquisita vel amissa; utraque duplo major fiat, si elasticitas fuerit perfecta; augeatur autem ita ratione vis restitutivæ ad vim compressivam, si imperfecta fuerit elasticitas, atque ita conflictuum leges pro quacumque elasticitatis hypothesi determinare licebit. Has autem leges exemplis illustrabimus. Si corpora omni elas-

ticitate destituta et æqualia ponantur, illorumque unum quiescat, post conflictum dimidiata velocitate ad easdem partes velut unum corpus progredientur, ut patet ex demonstratis; quarè corpus quiescens dimidiam motus quantitatem acquirit, quam amisit corpus incurrens. Jam si corpora sint perfecte elastica, duplo major fiat mutatio motus in unoquoque corpore; ergo corpus quiescens totam acquiret motus quantitatem, quam amittet corpus incurrens, quod proindè quiescet.

Alterum consideremus casum, dum nempè corpora ad partes contrarias tendunt, et facilitatis causa ponamus corpora æqualia et eadem velocitate moveri. Si corpora non fuerint elastica, ambo post conflictum quiescunt, ac proindè totam et æqualem motus quantitatem amittunt; verum in corporibus perfecte elasticis duplo major est mutatio: quarè corpora perfecte elastica non solum amittere debent totam motus quantitatem secundum propriam directionem, sed contrariam et *negativam*, ut ita dicam, motus quantitatem acquirere; quarè corpora ad partes contrarias à se invicem resilient æquali motus quantitate. Simili modo ad calculum revocari possunt aliæ quælibet motuum conditiones. Tandèm si corpora fuerint imperfecte elastica, accuratissimis experimentis nota sit oportet ratio velocitatis respectivæ ante conflictum ad velocitatem respectivam post conflictum: atque in eadem ratione augeri debet mutatio motus. Observavit Newtonus, in globis vitreis velocitatem respectivam ante conflictum esse ad velocitatem respectivam post conflictum, ut 16. ad 15. quarè si in globis vitreis æstimari debeant conflictuum leges; hac proportione utendum est. Ceterum in præcedentibus demonstrationibus corpora omni elasticitate destituta, et perfecte dura consideravimus; qualia fortasse nulla existunt in rerum natura. Verùm hanc quæstionem ad alium articulum in Physices progressu rejicimus. Interim patet, hanc hypothesim, falsam an veram, à nobis fingi potuisse, ut in corporibus elasticis conflictuum leges eruere liceret.

V. Demonstratæ hactenus conflictum leges pendulorum ope ad experientiam revocari solent. Globus A vibrationes suas perficiat in circulo EAF, itemque B in circulo æquali GBH (*fig.* 21.) moveatur, et arcum RA descendendo, vel arcum ascendendo percurrat. Demonstravimus jam velocitates in puncto infimo A fore, ut sunt arcuum ascendendo, vel descendendo descriptorum chordæ. Itaque effici facilè potest, ut corpora, datis quibuslibet velocitatibus, inter se congrediantur; atque ex arcuum descriptorum chordis post conflictum invenitur velocitas acquisita vel amissa; atque ita per experientiam probari posunt conflictuum regulæ. Verùm in instituendis hujusmodi experimentis calculo subduci debet aeris resistentia, quæ rem maximè turbat; in causa enim est, ut globus A descendens per arcum EA ex R, ascendendo per AF non percurrat arcum æqualem, nec iterum revertatur ad R; ut contingeret in vacuo, sed deveniat ad punctum aliquod V. Newtonus ad habendam velocitatem globi A descendentis in aere per arcum datum præscribit, ut sublato altero globo B, demittatur libere globus A ex aliquo puncto R, noteturque punctum V, ad quod post duas oscillationes regreditur; tum pars quarta arcus RV collocetur in medio in ST, ut RS et TV æquentur inter se, nimirum ut VT ad VR sit in ratione 3 ad 8. Quod quidem ita se habere

ex constructione patet; nam $VR = 2TV + \frac{1}{4} VR = \frac{8TV + VR}{4}$; ideoque $4VR = 8TV + VR$, et $3VR = 8TV$. His positis affirmat Newtonus, velocitatem in A globi decidentis ex S in aere eamdem esse, quæ foret in vacuo, si globus caderet ex T. Eodem modo si globus post collisionem ascendit ad S, inveniendum est punctum V, ex quo libere demissus globus ipse A post itum et reditum ita ascenderet usque ad r, Vt esset rs = tv, et st quarta pars totius rv, sive quod idem est, vt rs sit ad rv in ratione 3 ad 8; affirmatque, velocitatem in A fore illam ipsam, qua in vacuo ascenderet ad t.

Hujus correctionis ratio facile patet. Nam RV est effectus resistentiæ aeris, qui in duplici illa oscillatione debetur binis descensibus et binis ascensibus, ideoque ejus pars quarta ST debetur soli descensui; hanc partem in medio collocat ad habendum medium quemdam effectum; cum nimirum bini illi descensus et ascensus non sint inter se æquales, sed primus ascensus ac secundus discensus, æquales inter se, medii sint inter primum descensum et secundum ascensum. Hæc correctio exhibet velocitatem proxime solum, non accurate, quæ nimirum in exigua aeris resistentia parum à vera ab ludere possit; nam ad veram velocitatem determinandam multo sublimior et adhuc inserta resistentiarum doctrina requiritur; sed in re præsenti tantæ subtilitates sub sensum non cadunt. Testatur autem Newtonus, se plurimis experimentis diligenter institutis invenisse experimenta ipsa doctrinæ hacteuus explicatæ omninò consentanea.

De corporum conflictu directo hæc pauca demonstrare satis sit, ex quibus omnes conflictuum casus facilè derivari possunt. Ceterum quæstionem metaphysicam de motus communicati causa paucis verbis hic iterum revocabimus. Affirmat Malebranchius motuum communicationem cum principiis physicis, aut cum aliqua corporum proprietate necessario conjunctam non esse, ita ut inter corporum duorum motum seu quietem nulla major sit connexio, quam inter corporum figuram, colorem cet. Hinc concludit celeberrimus metaphysicus, corporis incurrentis motum causam physicam non esse, cur corpus percussum moveatur, sed totam motuum communicationem divinæ voluntati, illiusque immediatæ actioni referendam esse. Certum quidem est, voluntatem Creatoris, omnium naturæ effectum ac proindè et motus communicati primam et supremam esse causam; verum quod asserit Malebranchius, inter mutuos corporum conflictus nullam majorem esse conjunctionem, quam inter illorum figuram, et colorem, id quidem parum accurate dictum est. Et certè corporis alicujus figura et color ad corporis alterius figuram coloremque nihil omninò conferre possunt; at si corpus aliquod in aliud incurrat, necessum est aliquam status mutationem contingere vel in corpore alterutro, vel in utroque corpore: etenim cum partes corporum, ob illorum impenetrabilitatem ex eodem loco sese excludant, corpus aliquod incurrens motus directionem persequi non potest, nisi corpus percussum moveatur; quod si corpus incurrens post conflictum quiescat, jam idem corpus statum mutat, transiens scilicet ex motu ad quietem: quare oportet, ut in corporibus aliqua fiat status mutatio. Res alio

exemplo confirmatur. Si corpora duo æqualia elasticitate destituta sese mutuo in partes directe oppositas æquali velocitate percutiant, ambo post conflictum quiescere ex illorum impenetrabilitate colligitur; ob eam rationem quiescere etiam debent corpora, si massæ fuerint in ratione reciproca velocitatum. Quæ cum ita sint, ex ipsis corporum proprietatibus fluere videntur conflictuum regulæ. Et re quidem ipsa ex vi inertiæ atque ex actionis et reactionis æqualitate pendent omnes, quas tradidimus, conflictuum leges. Itaque nos quidem latet, qua vi aut virtute corpora motum inter se dividant; motus enim nihil in se reale est, sed tantum aliquis existendi modus, nec facilius intelligitur motus quamquietis communicatio; *virium actionum* nomina adhibent plerique Phylosophi, sed obscuris vocabulis rem implicant non explicant. Concludendum ergo est, motuum communicationis principium metaphysicum ignotum nobis esse, ex corporum tamen proprietatibus pendere conflictuum leges, quas infinita sapientia ad fines in hujusmodi creatione propositos dixerit et ordinavit omnipotens rerum omnium Auctor et Gubernator. Quamvis autem ex proprietatibus corporum pendere videantur percussionis regulæ, nemo tamen temerario inferat, leges illas omninò necessarias esse, et ab omnipotentis Creatoris voluntate nequaquam pendere: etenim Deus corpora omnia totumque universum libere creavit et conservat, eadem pro arbitrio destruere, annihilare, ubi voluerit, iterum creare potest; ac proindè corpora omnia omnesque naturæ leges infinitæ Dei omnipotentiæ subordinantur. Sed hæc conferantur cum iis, quæ de miraculis diximus in

Metaphysica, atque etiam cum dicendis deinceps de essentialibus corporum proprietatibus.

VI. Indirectus corporum conflictus ad directum revocari potest. Sint corpora duo sphærica A, et B, quæ ex locis A, et B eodem tempore exeant secundum directiones A G, et B G (*fig.* 22.) sitque velocitas corporis A ad velocitatem corporis B, ut AG ad BG. Describatur parallelogrammum ABHG, ducaturque DH. Centro G, et radio corporum A, B semidiametris æquali describatur arcus circuli, rectæ DH occurrens in L, I, agaturque LN parallela rectæ GA, itemque NR parallela rectæ GL: corporum duorum contra eodem tempore perveniunt ad puncta N, R, tumque corpora se mutuo tangent; nam ex triangulorum similitudine DN est ad NL, vel GR, ut DB ad BH vel AG, vel etiam ut velocitas corporis B ad velocitatem corporis A: quare spatia BN, et AR, eodem tempore describentur, et corporum centra eodem tempore puncta N, et R attingent. Quia verò recta NR æqualis est semidiametrorum summæ NR; evidens est, corpora sese contingere, sibique occurrere. Jam ducantur BM, AQ perpendiculares ad NR, erunt corporum conflictus iidem, ac si corpus A velocitate RQ occurreret corpori B velocitate MN secundum directionem NR: etenim velocitates corporum A, et B sunt, ut rectæ AR, et BN. Præterea motus AR resolvi debet in duos AQ et RQ itemque motus BN resolvitur in duos BM, et MN; sed motus AQ, et BM secundum directiones parallelas nihil conferunt ad conflictum; quare corpora ambo in se invicem agunt non secus, ac si occurrerent sibi mutuo secundum directionem NR, cum

velocitatibus RQ, MN. Itaque ex demonstratis patet, motus indirectos ad directos revocari, ideòque invenietur, ut ante, corporum velocitas post conflictum secundum hanc directionem; quo facto reperietur directio composita in hunc modum. Ponatur velocitas corporis A post conflictum = = Rg (*fig.* 23.) velocitas corporis B = = Nm, sitque Rq æqualis et parallela rectæ AQ, itemque Nl æqualis et parallela rectæ BM, compleanturque parallelogramma Rq ag, Nl bm, moveri pergent corpora A, et B post conflictum per diagonales Ra, et Nb cum velocitatibus Ra, Nb. Quoniam ergo motus indirectus ad directum revocatur, facile patet qua ratione conflictuum leges ac corpora utcumque elastica indirectis motibus in se invicem incurrentia transferri possint; varios casus percurrere longius foret atque superfluum.

VII. Ad conflictuum leges referuntur etiam quæ de corporum reflectione tractari solent. Sit MN (*fig.* 24.) planum immobile, in quod perpendiculariter incidat globus F omni elasticitate destitutus; is post conflictum totam velocitatem amittet, ut ex dictis evidens est; cum nec in plano nec in globo quidquam sit, quod globum determinet ad regressum; et præterea corporis progressum ipsa plani immobilitas non permittit. Adveniat globus oblique per AC, et ducta AD perpendiculari ad MN, complectoque rectangulo ADCF, motus per AC compositus intelligatur ex motibus AD et AF, quorum alter AD vel FC elidetur à plano MN, manebit autem alter AF vel DC, ac proindè globus excurret versus N, et æquali tempore percurreret CE = = DC, quæ erit ad AC, ut cosinus angulus ACD ad radium. At si globus fuerit perfecte elasticus, in primo