

APPENDIX. <i>De aequationibus.</i>	86
<i>De quantitatibus imaginariis.</i>	92

GEOMETRIA.

PROOEM. <i>De definitione et divisione geometriae.</i>	101
SECTIO I. <i>De geometria linearum.</i>	109
CAPVT I. <i>De lineis rectis, quod ad mutuam positionem consideratis, nullum tamen spatium, seu nullam figuram terminantibus.</i>	ibid.
CAPVT II. <i>De linearum rectarum respectu circuli positione.</i>	113
CAPVT III. <i>De lineis rectis, quae spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.</i>	123
CAPVT IV. <i>De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.</i>	134
APPENDIX. <i>De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.</i>	145
SECTIO II. <i>De Geometria superficierum.</i>	157
CAPVT I. <i>De praecipuis planarum superficierum proprietatibus.</i>	ibid.
CAPVT II. <i>De superficierum mensura.</i>	161
SECTIO III. <i>De geometria solidorum.</i>	169
CAPVT I. <i>De solidorum genesi et proprietatibus.</i>	ibid.
CAPVT II. <i>De solidorum mensura.</i>	176
APPENDIX. <i>De lineis curvis.</i>	187

ELEMENTA

ARITHMETICAE

TVM VVLGARIS TVM SPECIOSAE.

CAPVT I.

De praecipuis utriusque arithmeticae operationibus generatim consideratis.

DEFINITIO I.

Arithmetica generatim definitur: scientia computandi. Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde ei determinatos 1, 2, 3, cet. vel per alphabeti litteras a, b, c, cet. quae numerum quemlibet aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio arithmetica simpliciter dicitur: altera autem vocatur arithmetica speciosa vel algebra, et convenientius a Newtono arithmetica universalis appellatur.

Scholion. Has quidem definitiones secundum vulgarem docendi consuetudinem praemittimus. Monendum tamen est, scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens praecedat analysis atque accurata explica-

Tom. III.

A

tio. Ita in praesenti casu, explicatis arithmeticae et algebrae operationibus, recte iam dicere liceat: hanc, quam vobis explicavimus, scientiam esse, quae *arithmetica* vel *algebra* vocatur.

Def. II. Per numerum arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem*. At accuratius a Newtono definitur numerus: *relatio seu ratio quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem.*

Scholion. Quae quidem definitio, ut in bono lumine collocetur, observandum est, quantitatem quamlibet cum alia eiusdem generis quantitate comparatam vel ea minorem esse, vel maiorem, vel tandem ipsi aequalem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel aliam certo modo continere. Hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. g. numerus 3 exprimit rationem magnitudinis alicuius ad aliam minorem, quae pro unitate adsumitur, et in maiori ter continetur. Contra autem si quantitas maior 3 pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1 tertia pars quantitatis maioris, quae tamquam unitas consideratur, sive 1 ter in quantitate maiori continetur.

Def. III. Inde autem intelligitur, quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur, quem *unitas metitur*. Fractus, qui est pars *unitatis*. Ita 1, 2, 3, cet. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta, cet. pars unitatis sunt numeri fracti. Ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, cet. Ratio, quam modo definivimus, si nempe consideretur, quomodo quantitas una alteram contineat, dicitur *geometrica*.

Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus. Duarum rationum aequalitas *proportio* dicitur vel *geometrica* vel *arithmetica*, pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur; et prima ad secundam esse dicitur, ut tertia ad quartam.

Scholion I. Numeri omnes in vulgari arithmetica decem notis sive characteribus designantur. Sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum ultimus *cyphra* sive *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso, quem occupant, loco. Quae ad dexteram postrimae occurrunt, designant unitates; quae proxime praecedunt, unitatum decades; exinde centenarii sequuntur, millenarii; et sic deinceps per decades et centenarios progrediendo. Huic autem usui potissimum *cyphra* destinatur. Quum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo in dextera numero versus sinistram removens. Sic unitatis nota, quae sola unicam designaret unitatem, beneficio unius vel duplicis *cyphrae* in secundum aut tertium locum reiecta, denas unitates aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur. Ita 247 expriment ducentas quadraginta septem unitates. At in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio. Ita si legere oporteat longiorem numerum:

$\begin{array}{cccccccc} & & 3 & & 2 & & 1 & & \\ 3 & 242 & 578 & 562 & 914 & 020 & 467 & 212. & \end{array}$

Hunc ita
A 2

divides a postremis dexterioribus numeris exorsus. Nempe tres postremos divides a praecedentibus puncto superius appposito, tribus sequentibus adscribes I, et sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim opponens vel numerum; ita tamen, ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum heic factum vides. His peractis, quamlibet notarum classem perinde leges, ac si sola esset; et ubi punctum invenies, dic mille; ubi I, dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, *millionem*; ubi 2, dic *milliones* millionum sive *billiones*; ubi 3, dic *trilliones*, et sic deinceps. Sic itaque legendus est numerus praecedens: ter mille ac ducenti quadraginta duo trilliones, quingenta septuaginta octo millia ac quingenti sexaginta duo billiones, nongenta quatuordecim millia ac viginti milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum ac duodecim.

Scholion II. Vulgares explicavimus arithmeticae characteres, quorum auctores feruntur astronomi arabes. Aliquid iam dicendum est de notis, quae *romanae* appellantur. Notae illae, quarum in physicis institutionibus usus recurret, maiusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *romanorum* nomen factum fuisse creditur, quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres romani. Litterae, quae numeros romanos componunt, sunt septem sequentes I, V, X, L, C, D, M. Harum notarum haec est significatio. I, unitas: V, quinque: X, decem: L, quingenta: C, centum: D, quingenta: M, mille. Si duo I, scribuntur in hunc modum II, aequiva-

lent binario; si tria scribantur III, significant ternarium; numerus quaternarius ita exprimitur IV; et numerus novenarius hoc modo IX: nempe unitas numeris V, X praefixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6, 7, 8, scribi solet VI, VII, VIII. Si numero L vel C premittatur X; numeri illi decade minuantur; ita XL significant 40, et XC 90. Contra autem si numerum L sequatur X in hunc modum LX; numerus praecedens augetur decade, significans 60 cet. Aliquando numerus 400 expressus fuit litteris CD, sed raro. Praeter litteram D, quae exprimit 500, idem numerus significatur etiam hoc modo IO. Ita etiam loco M, aliquando scribitur CIO. Eodem modo exprimi potest 600 per IOO: et 700 per IOOO cet. Si litterae C, et C ante et post addantur, numerus CIO augetur in ratione decupla. Ita CCIO significat 10000, CCCIOOO 100000, cet. Hi erant communes arithmeticae characteres apud veteres romanos, qui etiam numerum millenarium designare solebant adscripta numeris millenario minoribus lineola; hoc modo \overline{V} , et significat 5000; \overline{LX} , et designat 60000

Similiter \overline{M} aequivalet 1000000, et \overline{MM} designat 2000000. A recentioribus nonnullis scriptoribus variationes aliquae fuerunt adhibitae; ita litteris IIX designant 8, litteris XXCIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas iniverint veteres romani, nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt arithmeticae, quam quidem invenire, aut aliam non mul-

tum dissimilem substituere, problema est a viris arithmeticae et antiquitatis studiosis solvendum.

Scholion III. Quoniam numeri nihil aliud sunt, quam magnitudinum rationes quaedam certis signis distinctae; evidens est, arithmeticae sive scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi, illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur arithmeticae operationes praecipuae. Etenim diversae numerorum combinationes hac revocari possunt, ut nempe mutuus eorum excessus vel modus, quo se invicem continent, expendatur et adsignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandae quattuor vulgares arithmeticae operationes: *additio, subtractio, multiplicatio, divisio.*

Def. IV. Additio vocatur illa arithmeticae operatio, qua plures numeri simul colliguntur. Subtractio autem dicitur operatio, qua numeri a se invicem subtrahuntur. Ita si addantur 2 et 3, ut efficiantur 5; vel minor numerus 2 a maiori 3 subtrahatur, ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio.

Scholion. Patet, in additione et subtractione considerari mutuum numerorum excessum. Etenim in additione excessus summae ab alterutro numero innotescit; in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur.

Def. V. Multiplicatio appellatur illa arithmeticae operatio, qua idem numerus sibimetipsi pluries additur. Ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est, ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 3 sibi ipsi quater adiungatur; prodibitque 12. Divi-

sio est arithmeticae operatio, in qua numerus unus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest; ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest.

Scholion I. Itaque patet, in multiplicatione et divisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in praecedenti multiplicatione innotescit, numerum 12 ter continere numerum 4; per divisionem autem demonstratur, numerum 4 ter contineri in 12.

Scholion II. Ex his evidens est, multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam divisionem nihil aliud esse, quam compositam subtractionem. Quare ad duas dumtaxat revocari possunt quattuor vulgares arithmeticae operationes. Hinc arithmeticae operationes accurate omnino definivit Newtonus: *compositionem et resolutionem arithmeticae*; quae quidem definitio ex ipsa arithmeticarum operationum natura derivat. Quamvis autem numeri sint rationes geometricae, ex dictis tamen evidens est, additionem et subtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticae; multiplicationem vero et divisionem ad rationem geometricam referri. Ceterum praeter vulgares quattuor enumeratas operationes aliae sunt plurimae; sed haec omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Haec autem regulas arithmeticae generatim considerasse satis sit. Patet autem, hanc, quam tradimus arithmeticae notionem, arithmeticae speciosae communem esse. Itaque licet arithmeticae nomen generatim usurpemus; illud tamen de arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Iam ve-

ro universam arithmeticae utriusque doctrinam breviter et distincte explicemus, quantum postulant nostrarum institutionum necessitas atque inuncta brevitatis.

CAPVT II.

De quattuor primis arithmeticae operationibus in numeris integris.

I.

Prima arithmeticae operatio dicitur *additio*, quae ex praecedentibus satis intelligitur. Totam huius operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PROBLEMA I.

NUMEROS INTEGROS ADDERE, SIVE IN VNAM SUMMAM COLLIGERE.

II. Addendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quattuor numerorum series ita alias aliis subscribe, ut unitates unitatibus subiiciantur, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, et a dextera columna ex-

23561	<i>Exempl.</i>
392	
8768	
49321	
82042	

orsus dic: 1 et 2 efficiunt 3: 3 et 8 efficiunt 11: 11 et 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum, ac praeterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, et decadem reice in sequentem decadam columnam

dicens; 1 et 6 efficiunt 7: 7 et 9 efficiunt 16: 16 et 6 efficiunt 22: 22 et 2 efficiunt 24, hoc est; duas decadas decadam, sive duo centenaria, et 4 decadas. Scribe ergo 4 in loco decadam, et duo centenaria in sequentem columnam reice: eodemque pacto in hac et reliquis operare; et tandem inuenies summam quaesitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem reiciuntur, quot decades collectae sunt. Quod quidem faciendum esse evidens est, quum nota quaelibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo maiorem, quam in praecedente. Igitur in hac operatione adduntur singulae unitates, singulae decades, singula centenaria. Quare patet huius operationis ratio, quae quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomaticum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perfecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quae antea per spicua credebantur.

PROBLEMA II.

NUMEROS INTEGROS SVBTRAHERE.

III. Secunda arithmeticae operatio dicitur *sub-*