ro universam arithmeticae utriusque doctrinam breviter et distincte explicemus, quantum postulant nostrarum institutionum necessitas atque iniuncta brevitas.

CAPVT II.

De quattuor primis arithmeticae operationibus in numeris integris.

I.

Prima arithmeticae operatio dicitur *additio*, quae ex praecedentibus satis intelligitur. Totam huius operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PROBLEMA I.

Nvmeros integros addere, sive in vnam svmmam colligere.

II. Addendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quattuor numerorum series ita alias aliis subscribe, ut unitates unitatibus subiiciantur, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, et a dextera columna exorsus dic: 1 et 2 efficiunt 3: 3 et 8 efficiunt 11: 11 et 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum, ac praeterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, et decadem reiice in sequentem decadum columnam

Exempl.
23561
392
8768
49321
82042

dicens; 1 et 6 efficiunt 7: 7 et 9 efficiunt 16: 16 et 6 efficiunt 22: 22 et 2 efficiunt 24, hoc est; duas decadas decadum, sive duo centenaria, et 4 decadas. Scribe ergo 4 in loco decadum, et duo centenaria in sequentem columnam reiice: eodemque pacto in hac et reliquis operare; et tandem invenies summam quaesitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem reiiciuntur, quot decades collectae sunt. Quod quidem faciendum esse evidens est, quum nota quaelibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo maiorem, quam in praecedente. Igitur in hac operatione adduntur singulae unitates, singulae decades, singula centenaria. Quare patet huius operationis ratio, quae quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perlecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quae antea perspicua credebantur.

PROBLEMA II.

Nvmeros integros svbtrahere.

III. Secunda arithmeticae operatio dicitur *sub-*

tractio, cuius totum hoc est artificium. Vt numerum datum a dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri, a quo subtrahi debet, ita subiicies, ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus, quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe, et residuum scribe infra lineolam, habebis numerum, qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat, inferiorem notam superiori maiorem esse, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies a sinisteriori nota, quam proinde deinceps habebis tamquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2. Auferendo 4 ex 9 relinquitur 5: 2 ex 8 remanet 6. At quum numerus 4 ex 3 subtrahi nequeat; adiice huic denas unitates, et auferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam sinisteriorem proxime sequentum unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti, ut denis unitatibus dexteriorem augeres; habebis ergo residuum 1; ideoque residuum totum 19652.

Exempl.

$$\begin{array}{r} 23897 \\ 4245 \\ \hline 19652 \end{array}$$

Demonstratio satis per se constat: quum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus, cet. Nam, quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur unitatibus, et numerus sequens 2 unitate mulctetur, ratio patet. Haec nempe unitas in numero 3 decadi unitatum aequalis est, earum scilicet, quibus constat idem numerus 3. Quare etiamsi unitatem dumtaxat ille amittat, huic

tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphrae, ex quibus eadem de causa nulla fieri potest subtractio; ex numero proxime sinisteriori mutua accipienda est unitas, quae in cyphram dexteram translata decem unitatibus aequivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur, atque ita deinceps. Quare patet, cyphram dexteriorem decem unitatibus aequalem esse, ceteras vero sinisteriores aequari novenario. Itaque evidens est huius operationis ratio, nec vulgarium axiomatum ope facilius intelligitur.

Scholion. Ex additionis et subtractionis natura manifestum est, duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre, et sese invicem confirmare. Etenim quum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia; patet, minorem numerum residuo sive differentiae additum maiori numero aequalem esse. Item quum additio sit plurium numerorum adgregatum, si ex adgregato alteruter numerus auferatur; numerum alterum remanere, necessum est. Si igitur explorare velis, utrum additio rere peracta sic necne, subtractione utendum est: contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBLEMA III.

NVMEROS INTEGROS MVLTIPLICARE.

IV. Tertia arithmeticae operatio vocatur *multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite praecedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulae notae in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt, 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumtum 12 efficere *.

At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita, ut unitates unitatibus subiiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a dextris facto. Decades, quae inter multiplicandum colliguntur, sepone adiiciendas producto ex eadem nu-

* *Producta nihilominus maiora adiuncta tabella scribimus. Signum multiplicationis est* ×.

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$
$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$

$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$
$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$
$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$
$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$
$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$
$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$

meri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta, quae emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsum notentur ita, ut uniuscuiusque unitates subiiciantur numero, per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quaesitum.

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43, sub 235; tum ducta lineola, dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe; 5 sub numero multiplicante 3, et unam decadem sepone adiiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1 habebis unam decadem, et nullas praeterea unitates, scribe igitur 0: et facto et 3 in 2, quod est 6, adiiciens 1 scribe 7. Rursus dic 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0 ita, ut multiplicatori 4 subiaceat, et facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adiiciens 2 habebis 14; scribe igitur 4: et seponens 1, dic, 2 in 4 efficiunt 8, et adiecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quaesitum.

Exempl.

$$\begin{array}{r} 235 \\ 43 \\ \hline 705 \\ 940 \\ \hline 10105 \end{array}$$

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura, si nempe in memoriam revocetur, numerorum characteres decuplo plus valere in locis sinisterioribus, quam in dexterioribus. Illico enim manifestum fiet, toties sumi in productu numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero, per quem fit multiplicatio.

PROBLEMA IV.

NVMEROS INTEGROS DIVIDERE.

V. Quarta arithmeticae operatio vocatur *divisio*. Quum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quaestio, ut inveniatur, quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur: atque totidem unitates scribantur in numero, qui iccirco *quotus* dicitur. Haec ergo genuina est divisionis notio: nempe dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem; vel dividendus est ad quotum, ut divisor est ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105, per 43. Numero dividendo divisorem postpone lineola interiecta; tum operationem instituens in primis notis dividendi, quae exhibeant quantitatem divisorem aequalem vel proxime maiorem; dic, quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo 2 infra lineolam divisoris ad partem dexteram, et factum ex 2 in 43, sive 86 aufer ex 101, et residuo 15 notam appone 0, quae in dividendo proxime sequitur quantitatem iam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continetur in 150, quotus est 3, quem scribe, ut antea; et factum ex 3 in 43, seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem no-

Exempl.

10105	43
86	235
150	
129	
215	
215	
000	

tam dividendi 5: et dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit 5, quem scribe cum aliis quoti notis, et aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Quum nihil ex ea divisione supersit; patet, numerum 235 illum accurate esse, qui oritur ex divisione 10105 per 43.

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus, in huiusmodi operatione rem perinde se habere, ac si quaereretur, quota pars quantitatis alicuius singulis hominibus obveniret, si eam ex aequo tot hominibus distribui oporteret, quot unitates continet divisor. Nam in tota operationis serie inquirimus, quot unitates, decades, cet. singulis dari possint; iisque datis, quae dari possunt, quot adhuc distribuendae supersint. Facile autem intelligitur, post quamlibet subtractionem peractam id, quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adiicias, divisione minorem esse oporteret, nam si residuum aequale foret vel maius, divisor in quantitate iam divisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris longioribus statim non pateat, quoties divisor in dividendi notis contineatur, et tentamine utendum est. Divisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, et explorandum est, quinam ex illis numeris sit proxime minor. Pones in quoto numerum, in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Ceterum qui in arithmetica satis fuerit exercitatus, facile coniiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet et divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis arithmeticae operationibus iam antea monuimus. At in praesenti operatione, quae est omnium difficillima, rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendos proponatur numerus 416 per 2, statim patet, in quoto contineri centenarios, decadas et unitates. Dividatur iam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2, multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit o. Patet ergo, divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est, dividi debet 10 per 2. Statim autem video, 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur o in quoto: tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primae quoti notae 2 suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero praecedenti 1 apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208.

Exempl.

```
416 | 2
    |----
4     208
--
016
 16
------
 00
```

Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, immo et plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adiicienda est fractio. Ita si in exemplo praecedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus ita, ut numerum 417 ex aequo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent numeros 208, et di-

midiam partem nummi, quae ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet, satis esse primam dividendo notam per primam divisoris dividi, si in divisore et dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persaepe necesse est, duas primas dividendi notas prima divisoris notae subiici; idque fieri debere evidens est, quoties datus notarum numerus in divisore maiorem habet valorem, quam habet aequalis notarum numerus in dividendo. Verum si duae adhibeantur dividendi notae, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, quod, sumtis in dividendo tot notis, quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una insuper adiecta, notarum numerus in quoto unitate excedat residuum notarum in dividendo. Inde autem facile colligitur, nullum in quoto numerum novenario maiorem esse posse. Etenim divisor decies sumtus aequalis esse non potest adsumtae dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur. At pars dividendi adsumta habet notarum numerum notarum divisoris numero aequalem vel unitate maiorem. In primo casu evidens est, dividendi partem adsumtam minorem esse divisore decies sumto, quum notarum numerum habeat unitate minorem: in secundo casu pars dividendi adsumta, si nota una versus dexteram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus hac nota iterum auctus minor est divisore decies sumto. *Quum nempe tam dividendi quam divisoris notae per additionem no-*

vae dexterioris decuplo maiores fiant, eadem, ac prius manebit invicem notarum dexteram praecedentium ratio. Ideoque si in priori hypothesi dividendus minor erat divisore, minor quoque manebit, postquam utrique addita fuit dextera nota.

Divisionis rite peractae argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum. Quod quidem patet ex ipsa divisionis natura; quum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto. Quare quum quotus exprimat, quoties divisor contineatur in dividendo, si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Ceterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est, multiplicationis rite peractae haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem: in primo casu quotus fit multiplicatur; in casu autem altero quotus est multiplicandus. Quum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur, quod in multiplicatione componitur, et contra. Ceterum in multiplicatione et divisione compendia plurima usus docebit. Heic monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendae compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphrae, quot occurrunt in multiplicando et multiplicatore si-

mul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas praedictas. Item in divisione, si divisor et dividendus cyphras contineant, in dividendo delendae sunt tot cyphrae, quod occurrunt in divisore, quae etiam in ipso divisore deleri debent, et reliqua operatio peragenda, ut antea. Notandum autem est, compendium illud valere dumtaxat, si cyphrae fuerint ultimae tum divisoris, tum dividendi notae; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholion. In praesenti capite sermonem habuimus dumtaxat de numeris homogeneis sive eiusdem speciei. At pari facilitate in numeris heterogeneis seu diversae speciei absolvuntur operationes arithmeticae. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est, quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes cet. At si numerum 3 generatim enunciaveris, nec rem aliquam designaveris, numerus vocatur abstractus. Iam in numeris diversae speciei additio et subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species. Ita si addi debeant lineae, pollices, pedes, hexapedae; sciendum est, 12 lineas pollicem unum componere, pollices 12 pedem unum, et hexapedam ex pedibus 6 constare. Vbi autem in linearum additione summa efficitur, quae 12 excedit; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet; et ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio, si quantitas subtrahenda, e. g. linearum numerus, iusto maior sit; iam ex quantitate praecedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas, quae duodenario numero aquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis atque in heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione vel subtractione unitas mutuo accepta decadi aequivaleat; at in numeris heterogeneis unitas, quae mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suae respondeat. Haec de additione et subtractione.

Quod ad multiplicationem spectat, improprie omnino a quibusdam arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quaerere productum ex nummis 3, iuliis, 3, assibus 3 in nummos 3, iulios 3, asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio, ut data quaedam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diversae speciei per numerum abstractum multiplicentur, facile patet, si e. g. productum ex lineis in numerum abstractum maius sit numero duodenario, iam inter pollicis reiici debent tot unitates, quot sunt numeri duodenarii, quod autem reliquum est, inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, res tamen aliter se habet in

divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, investigari potest, quoties 2 contineatur in 6: quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos 6 dividere possumus per 3, hoc est investigare possumus tertiam partem nummorum 6, et quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Iam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illae duae proportiones; licet una eademque videantur. Dividendus tamquam numerus concretus semper habetur, concretus autem vel abstractus esse potest numerus divisor. In primo casu quotus erit numerus aubstractus, et locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus, et locum habet proportio altera. Haec quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6 (*numerus concretus*) dividantur per nummos 2 (*numerum* itidem *concretum*); quoties erit numerus abstractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet, quotus divisor continetur in dividendo; erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus 3 est ad unitatem abstractam 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *dividendus* et *concretus*) sunt ad quotum 3 (*numerum* *abstractum*); ut nummi 2 (*numerus divisor* et *concretus*) ad 1 (*numerum abstractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem. Quum enim numerus concretus et numerus abstractus diversi sint generis; nulla inter eos comparatio et ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, et secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per *numerum abstractum* 3, quotus erit nummi 2 (*numerus* scilicet *concretus*); habebiturque haec proportio; numerus concretus, nempe 6 nummi, erit ad quotum nummos 2; ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest. Vel enim quaeritur, quoties quantitas una in altera eiusdem generis quantitate continetur, et hic est primus casus; vel quaeritur quantitas, quae certis vicibus in alia eiusdem generis quantitate contineatur, et hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diversae speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumto ab iis, qui maiorem habent valorem, divisio ex regulis praescriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. g. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversae speciei per concretos itidem diversae speciei dividi oporteat, iam numeri tum dividendi, tum divisoris ad minimam species deprimantur, quod per multiplicatione fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numerum abstractis. Ceterum in multiplicatione et divisione quantitatem diversae speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quae sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis iam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti ad maiorem operationum facilitatem. Verum ad formandum earumdem operationum ideam distictam, necesse est, ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CAPVT III.

De quattuor praecedentibus operationibus in arithmetica speciosa absolvendis.

PROBLEMA I.

Qvantitates litterales addere.

I.

Quantitatibus litteralibus praefiguntur signa, quorum significationem praemitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$, signum autem subtractionis est $-$, aequalitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita $a=a$, $a+a=2a$, $a-a=0$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali praefigatur numerus aliquis, hic *coëfficiens* vocatur, ita in quan.