abstractum); ut nummi 2 (*numerus divisor* et *concretus*) ad 1 (*numerum abstractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem. Quum enim numerus concretus et numerus abstractus diversi sint generis; nulla inter eos comparatio et ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, et secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per *numerum abstractum* 3, quotus erit nummi 2 (*numerus* scilicet *concretus*); habebiturque haec proportio; numerus concretus, nempe 6 nummi, erit ad quotum nummos 2; ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest. Vel enim quaeritur, quoties quantitas una in altera eiusdem generis quantitate continetur, et hic est primus casus; vel quaeritur quantitas, quae certis vicibus in alia eiusdem generis quantitate contineatur, et hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diversae speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumto ab iis, qui maiorem habent valorem, divisio ex regulis praescriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. g. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversae speciei per concretos itidem diversae speciei dividi oporteat, iam numeri tum dividendi, tum divisoris ad minimam species deprimantur, quod per multiplicatione fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numerum abstractis. Ceterum in multiplicatione et divisione quantitatem diversae speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quae sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis iam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti ad maiorem operationum facilitatem. Verum ad formandum earumdem operationum ideam distictam, necesse est, ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CAPVT III.

De quattuor praecedentibus operationibus in arithmetica speciosa absolvendis.

PROBLEMA I.

Qvantitates litterales addere.

I.

Quantitatibus litteralibus praefiguntur signa, quorum significationem praemitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$, signum autem subtractionis est $-$, aequalitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a + a = 2a$, $a - a = 0$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali praefigatur numerus aliquis, hic *coëfficiens* vocatur, ita in quan.

titate litterali $2a$ numerus 2 coëfficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum praefixum habeat, iam unitas tamquam illius coëfficiens censeri debet; ita $a = 1a$, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras et eumdem earumdem litterarum numerum, etiamsi diversis coëfficientibus notentur; ita $+2a$, et $-5a$ sunt quantitates similes. At *dissimiles* sunt quantitates a et b, atque etiam quantitates a et aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quae plures habet litteras signo $+$ vel $-$ connexas. Ita $a+b$ constat ex duobus terminis, et *binomium* dicitur; $a+b+c$ ex tribus terminis, et *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*: ita a, ab, abc sunt quantitates simplices.

His praemissis definitionibus, quantitatum litteralium additio iam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a et a addi debeant, habebitur $2a$; si addere oporteat a et $2a$, summa erit $3a$, et ita deinceps. Satis nempe est in hoc casu addi coëfficientes, et coëficiententium summam quantitatibus litteralibus praefigi, eodem servato signo $+$ vel $-$, si quantitates eodem signo adficiantur. At si diversa fuerint signa, iam coëfficiens minor a maiori subtrahi debet, et differentia cum maioris coëfficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum et positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivae quantitatibus negativis sunt directe con-

trariae. Quare si quantitates addendae similes sint, signisque contrariis adfectae, vel sese omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum. Nempe si quantitas una sit altera maior, destruitur si maiori quantitate pars minori aequalis, et residuum est quantitatis utriusque differentia, quae quidem differentia signo maiori quantitati praefixo adfici debet. Ita evidens est, quantitates $+5df$ et $-3df$ reduci ad $+2df$; nam $+5df$ est quantitas df quinquies sumta, et $-3df$ est quantitas df ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumta, et ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumtam. Similiter $+5fm$ et $-6fm$ reducitur ad $-1fm$, vel ad $-fm$. Nam $-6fm$ est quantitas fm sexies subtracta, et $+5fm$ est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas fm semel subtrahitur, et remanet negativa, seu fit $-fm$. Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendae ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulae partes seorsum considerantur ut simplices, et additio fit, ut modo praescriptum est; summa autem infra lineolam scribimur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula vel zero. Tota operatio patet ex praesenti exemplo. Si quantitates aliquae fuerint dissimiles, eas signo $+$ vel $-$ connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a et b, vel a et b, scribendum est $a+b$, $a-b$.

Exemplum.

$$\begin{array}{r} 3ab - 5cs - 4dr + 2s \\ -\ ab + 4cs + 4dr - s \\ \hline 2ab - cs \quad * \quad + s \end{array}$$

PROBLEMA II.

QVANTITATES LITTERALES SVBTRAHERE.

II. In subtractione considerantur quantitates singulae subtrahendae, tamquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, et fit summa ex legibus iam praescriptis. Nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum $+$ in $-$; et $-$ in $+$, et additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo $a - b$. Si $b - c$ ex $a + c$ subtrahi oporteat, scribitur $a + c - b + c = a - b + 2c$. Simili modo in quantitatibus utcumque compositis operandum est. Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex qua subtractio fieri debet, supra opponitur. Deinde mutatis signis, ut iam dictum est, tota quantitatum series scribitur, et postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda.

Exemplum.

$$\begin{array}{l} ab + abb - dd \\ ab - bc + dd. \\ \hline ab + abb - dd - ab + bc - dd \\ = abb + bc - 2dd. \end{array}$$

Quod autem in quantitate subtrahenda signum $-$ mutetur in $+$, ratio facile patet. Si ex a subtrahi debeat $b - d$, scribaturque primo $a - b$, subtractio iusto maior est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas b, sed b mulctata quantitate d; quare iusto maior est subtractio, et excessus est ipsa quantitas d, quae proinde cum signo positivo $+$ restitui debet,

et scribendum est $a - b + d$. Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex numero 6 subtrahendus proponatur numerus $5 - 3$, ex praescripta regula scribendum est $6 - 5 + 3$, hoc est, 4, reductione facta. Quod evidens est. Si enim scriberes $6 - 5 - 3$; subtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur. Quum enim sit $5 - 3 = 2$, ex numero 6 subtrahi debet dumtaxat numerus 2. Ceterum patet, in calculo litterali non secus ac in arithmetico additionem et subtractionem sibi mutuum probationem praebere; ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PROBLEMA III.

QVANTITATES LITTERALES MVLTIPLICARE.

III. Signum multiplicationis est $\times$, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti solet, et sola coniunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a = 2$, $b = 10$; erit $ab = 2 \times 10 = 20$. Si eadem quantitas per se ipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paullo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset. Ita $aa = a^2$, $aaa = a^3$. Numerus supra positus est *index* seu *exponens potentiae*, ut vocant, vel *potestatis* seu *dignitatis* quantitatis ipsius, et exprimit, *plures paucioresve vices, quibus quantitas in se ipsam ducitur. Ita* $a \times a = a^2$, $a \times a \times a = a^3$, cet. *Quum quantitas solitaria est, tunc ha-*

bere *intelligitur unitatem pro exponente.* E. g. $a = a^1$. (*Ceterum probe notandum est discrimen, quod inter coëfficientem et exponentem intercedit. Exponens enim indicat iteratam quantitatis multiplicationem; coëfficiens vero eiusdem iteratam summam.*) *Ita* $a^3 = a \times a \times a$; *at vero* $3a = a + a + a$. Sit $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$. Sit $b = 2$, erit $(a+b)^2 = \overline{a+b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parenthesis autem ( ), vel lineola — *supra polynomium* producta designat, totam quantitatem $a + b$ in se ipsam multiplicari.

In quantitatum compositarum multiplicatione, altera quantitas alteri subscribenda est. Tum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundae, scribendo productum in eadem serie, deinde tota prima quantitas per aliam; et ita porro scribendo singula producta in singulis seriebus, ac notando similes terminos diversorum huiusmodi productorum alios sub aliis; deinde omnium serierum colligenda summa. Omnium vero huiusmodi operationum patet ratio. Multiplicatio enim fit per partes non secus ac in quantitatibus simplicibus. (Porro in multiplicatione quattuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coëfficientes, litterae et exponentes. Hinc quattuor praescribuntur regulae. I.a Si signa fuerint eadem, positiva scilicet vel negativa, productum fit positivum: contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita $+ \times + = +$; $+ \times - = -$; $- \times + = -$; et $- \times - = +$. II.a Coëfficientes in se invi-

cem multiplicantur. III.a Litterae ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. IV.a Si quantitas aliqua exponente adficiatur, eaque multiplicari debeat per eadem litteram exponente itidem adfectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita tamen ut huius quantitatis exponens aequalis fiat exponentium summae. Operatio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, et producta singula infra lineolam scribuntur. Postea fit multiplicatio per $-b$, productaque infra apponuntur, et tandem productorum partes singulae, ut moris est in summam colliguntur. Id vero pro maiori additionis facilitate observandum est, ut scilicet similis productorum partes aliae sub aliis scribantur, et sibi invicem respondeant, ut in additione praescripsimus. Quod spectat ad tres ultimas leges, hae satis patent et antea demonstratis. Verum quod attinet ad signorum doctrinam, in bono lumine collocari debet.

Exemplum.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ac - bc \\ \qquad a - b \\ \hline a^3 + 2a^2c - abc \\ -a^2b - 2abc + b^3c \\ \hline a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c \end{array}$$

Signorum multiplicatio, quae tironibus difficultatem adferre solet, ex ipsa quantitatum negativarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiva $+a$ multiplicatur per aliquem numerum positivum $+n$, sensus est, quantitatem $+a$ toties sumi, quoties unitas continetur in n; atque proinde productum fit na. Si $-a$ multiplicari debeat per $+n$, sensus est, quantitatem negativam toties sumi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est $-na$. Simili modo si multiplicetur $+a$ per $-n$, sensus est, quantitatem a toties subtrahi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est negativum, seu $-na$. Si $-a$ multiplicari oporteat per $-n$, sensus est, $-a$ toties subtrahendum esse, quoties unites est in n; sed subtractio quantitatis negativae $-a$ aequivalet additioni $+a$; quare productum est $+na$. Nemo non valet, productum ex quantitate positiva in positivam, fieri positivum. Sed alii casus hoc modo rursus illustrari possunt. Quum sit $+a-a=0$, si multiplicetur $+a-a$ per n, productum debet esse o. Iam vero primus producti terminus est $+na$, ergo terminus alter debet esse $-na$, qui destruat primum terminum $+na$, ita ut productum sit $+na-na=0$. Quare $-a\times+n=-na$. Simili modo si multiplicetur $+a$, et $-a$ per $-n$, primus producti terminus est $-na$; quare terminus alter est $+na$; alioqui termini duo sese mutuo non destruerent, quod tamen fieri debet, quum sit $a-a=0$. Ergo $-a\times-n=+na$.

PROBLEMA IV.

Quantitates litterales dividere.

IV. Signum divisionis est lineola interposita,

dividendum separans a divisore; ita $\frac{a}{b}$ adsignat, a dividi per b. Divisio etiam designatur, interpositis binis punctis, hoc modo $a:b$. Verum his signis utendum est dumtaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum, quae unico constat termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c}=b$; ac proinde quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2bc}{2a^2c}=3b$. At $\frac{10a^2b}{6a^2c}=\frac{10b}{6c}$.

In hoc sita est tota divisionis operatio, ut ex dividendo et divisore expungatur litterae utrique communes: reliquae autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coëfficientibus adficiantur, evidens est, divisionem institui debere non secus ac in arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo et divisore deleantur litterae communes; non tamen putandum est, quotum ex quantitate per se ipsam divisa esse $=0$; ita $\frac{abc}{abc}$ non est $=0$. Deleantur quidem litterae omnes, sed quantitati litterali praefixus semper intelligitur coëfficiens 1; sic $\frac{abc}{abc}=\frac{1abc}{1abc}=\frac{1}{1}=1$. Et quidem dum dividitur *abc* per *abc* quaeritur, quoties *abc* continetur in *abc*. Sed quantitas quaelibet semel in se ipsa continetur. Quare in hoc casu quotus est semper unitas. Quod ad signorum leges spectat, eaedem omnino sunt, quae pro multiplicatione : nempe si + dividatur per +, et — per —, quotus signo + adficitur; contra autem si dividatur + per —, vel — per +, quotus adficitur signo —. Tota explicatae operationis ratio evidens est ex ipsa divisionis natura. Quum enim productum ex divisore in quotum dividendo aequale esse debeat; manifestum est, quotum ex divisione quantitatis negativae per negativam oportere esse positivum. Ponamus enim, esse negativum; iam productum ex quoto negativo in divisorem negativum, foret positivum; ac proinde non rediret quantitas dividenda, quae ponitur negativa. Simili ratione demonstrantur aliae signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcumque compositis. Ita si dividi oporteat $9ab^2 - 15a^3b + 6a^3$ per $-3ab + 2a^2$. Singuli termini ita disponi debent, ut sumatur divisionis initium ab illo termino, qui *tam in dividendo quam in divisore* ad maximam evectus est potestatem, et ita per gradus progre-

Exemplum.

$$
\begin{array}{l|l}
6a^3 - 15a^3b + 9ab^2 & 2a^2 - 3ab \\
\cline{2-2}
6a^3 - 9a^2b & 3a^1 - 3b \\
\hline
* - 6a^2b + 9ab^2 & \\
 - 6a^2b + 9ab^2 & \\
\hline
\quad * \qquad * & \\
\hline
\end{array}
$$

diendo, ut heic factum vides. Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$: prodit quotus $3a$; per quam divisor totus multiplicatur, productumque $6a^3 - 9a^2b$ subtrahas ex dividendo, residuum fit $-6a^2b$, cui addas $9ab^2$, et dividere pergas, ut antea : quotus est $-3b$; productumque ex hoc quoto et divisore, $-6a^2b + 9ab^2$ iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata est divisio. Si autem peracta operatione aliquid supersit ita, ut divisor et reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, iam divisio accurate fieri non potest, sed quoto invento iungenda est fractio; de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Saepe contingit, divisionem in infinitum continuari, et tunc quotus fit, ut vocant, *series infinita.* Exemplo sit unitas dividenda per $1 - a$. Operatio est huiusmodi.

$$
\begin{array}{c|l}
1 & 1 - a \\
\cline{2-2}
1 - a & 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \text{ cet.} \\
\hline
+a & \text{quotus est in infinitum.} \\
+a - aa & \\
\hline
+aa & \\
+aa - aaa & \\
+aaa \text{ cet.} &
\end{array}
$$

Haec pauca exempla satis sint. Ceterum patet, multiplicationem et divisionem in quantitatibus litteralibus non secus ac in numeris sibi mutuam probationem conferre ita, ut multiplicatio per divisionem, et versa vice divisio per multiplicationem confirmetur.

Scholion. In hoc capite frequens fit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duae quantitates magnitudine aequales ad partes directe oppositas simul et in eodem subiecto coniunctae intelligantur; sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo aequalis est. Ita si potentiae duae aequales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo, si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat; iam illi 100 nummi, si ad huius hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, et 200 alteri debeat, tam possesio huius hominis negativa est, et, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur, iam huius hominis iter tamquam negativum et minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negativam, et nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivae quantitati opponitur; iuncta scilicet quantitati positivae ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum et *relative*; non autem *absolute* nihilo minor dici-

tur. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tironibus facessere possit.

CAPVT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I.

Numeri fracti definitionem iam in primo capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem interposita lineola separantur ita, ut dividendus supra lineolam, et divisor infra eam scribantur, in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ cet. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, et divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duae quantitates: ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot eiusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur, ac proinde pars illa considerari potest tamquam unitas aliqua. E. g. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta, alicuius totius ter sumta; haec autem pars quarta, tamquam unitas alia haberi etiam potest. *Itaque inspe-*