tuam probationem conferre ita, ut multiplicatio per divisionem, et versa vice divisio per multiplicationem confirmetur.

Scholion. In hoc capite frequens fit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duae quantitates magnitudine aequales ad partes directe oppositas simul et in eodem subiecto coniunctae intelligantur; sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo aequalis est. Ita si potentiae duae aequales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo, si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat; iam illi 100 nummi, si ad huius hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, et 200 alteri debeat, tam possesio huius hominis negativa est, et, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur, iam huius hominis iter tamquam negativum et minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negativam, et nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivae quantitati opponitur; iuncta scilicet quantitati positivae ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum et *relative*; non autem *absolute* nihilo minor dici-

tur. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tironibus facessere possit.

CAPVT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I.

Numeri fracti definitionem iam in primo capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem interposita lineola separantur ita, ut dividendus supra lineolam, et divisor infra eam scribantur, in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ cet. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, et divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duae quantitates: ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot eiusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur, ac proinde pars illa considerari potest tamquam unitas aliqua. E. g. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta, alicuius totius ter sumta; haec autem pars quarta, tamquam unitas alia haberi etiam potest. *Itaque inspe-*

cta numeratoris et denominatoris natura, evidens est: fractionem maiorem esse, quae sub eodem denominatore maiorem habeat numeratorem; atque contra minorem esse, quae sub eodem numeratore maiorem habeat denominatorem. Ac proinde valor fractionis consistit in relatione seu ratione numeratoris ad denominatorem. Certum etiam est, quod si data quantitas alterius dupla sit, tripla vel centupla, etiam illius dimidia, tertia, quarta, vel millesima pars erit dupla, tripla, vel centupla huius dimidiae, tertiae, quartae, vel millesimae partis. Ex quibus liquet, in fractionibus valorem non mutari, si numerator et denominator per eamdem quantitatem multiplicentur aut dividantur.

II. Ex fractionum natura intelligitur, qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem, cuius denominator sit 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, eritque haec fractio aequivalens ternario, ut patet; quum numerus 3 multiplicetur, simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones, in quibus numerator maior est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* dumtaxat fractiones appellantur. Pari ratione si quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem, cuius denominator sit b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet, quomodo fractiones, quae diversum habent denominatorem, ad eumdem

redigantur. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: multiplicentur fractionis $\frac{a}{b}$ numerator et denominator per alterius denominatorem d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicentur fractionis $\frac{c}{d}$ numerator et denominator per alterius denominatorem b, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. (§. *I.*) Itaque generatim fractiones ad eumdem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius, et versa vice, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens est, hanc operationem eamdem esse pro quolibet fractionum numero. Multiplicentur scilicet numeratores singuli seorsum sumti per denominatores ceterarum fractionum; producta singula dabunt numeratores singulos quaesitos. Deinde denominatores singuli in se ipsos ducantur, habebitur denominator communis quaesitus. Ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet, rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis. Ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respective* aequales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ (§ *I.*)

III. Hinc facile adduntur et subtrahuntur fractiones. Reducantur scilicet ad denominatorem communem (§. *II.*): sumatur numeratorum summa vel differentia, et subscribatur denominator communis. In primo casu habebitur additio; in altero autem subtractio. Ita $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{d}{e}=\frac{ade+bce+bdd}{bde}$, et $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$. Sed $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}$. Fractiones ex integris et fractis compositae, qualis est $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtae. Ex his autem statim intelligitur, quomodo numeri integri et fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi. Integri ad fractos reducantur et ad denominatorem communem, atque operatio fiat, ut antea. Quamvis autem additionis et subtractiones operationes ex dictis sint manifestae, demonstrari tamen possunt hoc modo. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{b}$ ad eumdem denominatorem reductae, erit $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, et $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$. Etenim

ponatur $\frac{a}{b}=m$, et $\frac{c}{b}=n$; erit, facta multiplicatione per b, $a=mb$, $c=nb$, et $mb+nb=a+c$; ac proinde $m+n=\frac{a+c}{b}$, hoc est, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$. Simili modo patet, esse $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=m-n=\frac{a-c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus est, ubi fractiones multiplicare et dividere oportet. In multiplicatione satis est numeratores et denominatores invicem ducere: habebitur numerator et denominator fractionis quaesitae, quae erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, numerator dividendae per alterius denominatorem est multiplicandus, et illius denominator in huius numeratorem ducendus est, *seu quod idem est: fractio per quam divisio fieri debet, invertatur e. g. pro* $\frac{2}{3}$ *scribatur* $\frac{3}{2}$. *Atque fiat fractionum multiplicatio, ut in casu praecedenti.* Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$; $\frac{c}{d} = n$; erit $a = bm$, et $c = dn$. Iam demonstrandum superest, esse $\frac{ac}{bd} = mn$, et $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$. Quod quidem facile patet substituendo loco a et c illorum valores bm et dn; erit in primo casu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in casu autem altero, fiet $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonstratio generalis est, ac proinde in quibuslibet numeris fractis eadem est operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8} = \frac{8}{48}$. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifesta quoque est operandi ratio, si numerus fractus per integrum multiplicari aut dividi debeat. Considerari enim debet numerus integer tamquam fractio impropria, in qua denominator est unitas, et reliqua peragenda, ut antea. Quare patet, in multiplicatione numerum integrum per numeratorem esse multiplicandum; contra autem in divisione per denominatorem. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa, praebeat numerum integrum; quum revera una fractio bis, ter, quater cet. in alia contineri possit. Itaque fractionum valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem. Quod quidem paradoxum videtur iis, qui multiplicationis et divisionis naturam non satis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet, *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri. *Fractionem fractionis* appellant fractionis alicuius partem. Ita si sumantur $\frac{2}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, operatio illa ad divisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur dumtaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, multiplicandus esset denominator per 3
3 habereturque $\frac{1}{12}$. At sumi non debet dumtaxat pars tertia; sed duae tertiae partes sumendae proponuntur. Quare productum praecedens duplo maius fieri debet, hoc est, numerator multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliae quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos et singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variae speciei agatur. E. g. quaeritur, quanti constituerint 35 mensurae mercis alicuius, si mensurae unius pretium sit 24 nummorum et assium 15. Multiplicetur primo (35×24) erit productum 840. Quod ad alteram multiplicationis partem, considerari potest, esse $15 = 10 + 5$. Iam si asses 10 nummo aequivalerent, productum foret 35. At sunt 10 *asses* pars decima dumtaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10 *. Simili modo operandum est in ultima mul-

* *Monetae, de quibus heic Auctor, videntur, quae hodie num apud romanos in usu sunt.* As *est vilioris pretii moneta* quattrino, *quorum quinque componunt aliam* bayocco. *Ex quin-*

tiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis, nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes enim aliquotae quantitatis alicuius appellantur, quae ipsam quantitatem accurate dividunt; secus autem partes *aliquantae* vocantur. Ceterum exercitatio atque attentio multa docebunt: quae fusius explicare superfluum esset.

V. Explicatis arithmeticae operationibus in numeris fractis, iam superest, ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divisorem praeter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cuiusmodi sunt 1, 5, 7, 11, 19, quos sola unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos praeter unitatem alii quoque numeri metiuntur. Sic 12 componitur ex 2 in 6, itemque ex 3 in 4. Quare 2, 3, 4, 6 metiuntur 12, seu aliquoties sumti 12 adaequant. Illi autem numeri dicuntur *fractores* ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicuius denominator sit numerus compositus, et resolvi possit in alterius fractionis denominatorem, instituta divisione per hunc numerum, qui sit vel numerator vel etiam numeratoris divisor communis, iam licebit fractionem

que bayocci *conflatur alia* grosso. *Quattuor* grossi *componunt aliam, quae dicitur* pappetto, *quae nomine nummi ab Auctore intelligitur. Quapropter in hac computatione nummis seu* pappeto *componitur ex* 100 *assibus seu* quatrini.

hanc ad minimos terminos deprimere; quod sic praestari potest. Dividatur maior numerus per minorem; si nihil ex divisione supersit, iam minor numerus est divisor maximus communis. Si autem residuum aliquod fuerit, divisor datus per hoc residuum dividatur. Si divisio accurate fiat, primum residuum erit maximus divisor communis. Si autem divisio non sit accurata, sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum dividatur primum. Si autem nullum supersit tertium residuum, iam residuum secundum pro maximo divisore communi haberi debet. Atque ita progrediendum, donec nihil supersit. Atque ultimus divisor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inventa, fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur. Exemplo sit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91; neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, residuum est 7. Tandem residuum primum 21 per alterum 7 dividatur; habetur quotus 3, et divisio est accurata. Quare numerus 7 est maximus communis divisor, per quem divisis numeratore et denominatore, fractio praecedens in hanc simpliciorem abit $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$. AEquales autem esse fractiones illas, ex natura divisionis, *et ex his*, *quae* §. *I. dicta sunt*, omnino patet. At, si divisione instituta, ad unitatem tandem, ultimum residuum, perveniatur; iam nulla est mensura communis praeter unitatem.

Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus. Hoc solum observandum est, nempe quantitates residuas per earum simplices divisores esse dividendas, *seu quod idem est, per monomium aliquod, si forte omnibus residui terminis commune sit.* Quantitates item secundum eiusdem litterae dignitatem, *sicut in dividendo*, semper sunt ordinandae. Invenienda sit maxima communis mensura quantitatis $a^2 - b^2$, et $a^2 + 2ab + b^2$. Dividatur $a^2 + 2ab + b^2$ per $a - b^2$; residuum fit $2ab + 2b^2$. *Quum vero in hoc residuo sit monomium* 2b *utrique termino commune; deleatur utrinque:* ut reducatur residuum ad $a + b$. Iterum dividatur $a^2 - b^2$ per $a + b$; divisio accurate succedit, ac proinde maximus divisor communis est $a + b$.

Tota huius operationis ratio patet ex hoc divisionis principio: si nempe quantitas aliqua metiatur et divisorem et residuum, metiri quoque debet ipsum dividendum. Est enim dividendus aequalis producto ex divisore in quotum et ipsi residuo simul. Ita in exemplo praecedenti *sit dividendus* $a^2 + 2ab + b^2 = A$: *divisor* $a^2 - b^2 = B$: *residuum* $2ab + 2b = R$. *Si quotus certo quodam et integro numero exprimatur* v. g. 4, *erit* $A = 4B + R$, *seu* $A - R = 4B$. *Si igitur* B *et* R *habeant communem divisorem; erit* R *aliquoties sumtus*, v. g. *ter*, *aequalis* B, *adeoque* $B = 3R$. *Inde substituto valore* B *in superiori aequatione, erit* $A - R = 12R$, *seu* $A = 13R$. *Igitur* A *et* R *habent etiam communem divisorem, quum sit* A *multiplus ipsius* R.

Porro ubi residuum fit nullum, seu dum accurate succedit divisio; evidens est, divisorem

haberi maximum. Quum enim dividendus aequalis sit producto ex divisore in quotum, et ipsi residuo simul; ubi residuum fit divisor accuratus, iam patet, divisorem esse maximum. Nulla enim quantitas potest habere divisorem se ipsa maiorem. Ita in praecedenti aequatione $A = QB + R$, exprimat Q quotum. Iam dividatur B per R; et divisio succedat accurate, patet, esse R maximum divisorem communem. Dividit enim B (*ex hypoth.*) ac proinde et BQ: praeterea dividit R; fieri autem non potest, ut R habeat divisorem se ipso maiorem. Quamvis in numeris et quantitatibus litteralibus eadem sit operatio; tamen ut divisor per residuum possit dividi, saepe oportet, primos terminos ita praeparare, ut alter per alterum accurate dividi possit sine fractione. Id autem fit observando in novi divisoris primo termino quantitates, quae non habentur in primo termino dividendi. Si autem per eas dividi potest totus divisor, is totus dividatur; sin minus, multiplicetur totus dividendus per illas quantitates, quae non occurrunt in dividendo, atque ita faciendum in tota operationis serie, si necesse sit. Ita in praecedenti exemplo ubi perventum est ad residuum $2ab + 2b^2$, residuum illud dividi praescripsimus per $2b$. Haec autem praescripta praeparatio tota pendet ex hoc principio: nempe, quantitates A et B communem retinebunt maximum divisorem, si multiplicetur vel dividatur quantitas altera, puta A, per quantitatem, quae nullum cum quantitate B communem divisorem habeat. Illud autem principium ex ipsa divisoris communis notione est omnino evidens.

De fractionum communi divisore unum addendum est, quod deinde utilitatis maximae esse debet. Si numeri duo primi fuerint, aut eorum alteruter dumtaxat primus fuerit; evidens est ex ipsa numerorum primorum definitione et ex communium divisorum regula, numeros illos nullum praeter unitatem divisorem communem habere. Quare fractio ex duobus numeris primis composita, puta $\frac{a}{b}$, ad simpliciores terminos reduci non potest. Ergo productum ac ex duobus numeris primis ab ipso b diversis non potest accurate dividi per b. Nam ponatur $\frac{ac}{b} = m$ erit $\frac{a}{b} = \frac{m}{c}$, quod fieri non potest. Oportet enim b et c habere divisorem communem, quod est contra hypothesim. Similiter ostendetur, fractionem $\frac{ac}{bd}$, in qua d est numerus primus ad simpliciorem expressionem reduci non posse, atque ita deinceps. Nempe generatim productum ex numeris primis quibuscumque, divisum per productum ex aliis quibuscumque numeris itidem primis, ad simpliciores terminos reduci non potest. Quare si $\frac{a}{b}$ sit fractio ad minimos terminos redu-

cta erunt quoque $\frac{aa}{bb}$ $\frac{a^3}{b^3}$, et generatim $\frac{ba}{bn}$ fractiones ad simplicissimos terminos redactae. Ac proinde fractio quaelibet sive pura sive mixta ad potentiam quamlibet evecta semper manet fractio.

De fractionibus decimalibus.

Scholion. Praeter fractiones in hoc capite explicatas considerari etiam debent fractiones, quae *decimales* appellantur. Illae scilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot sequentibus cyphris, quot sunt numeri in numeratore: atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator dumtaxat, cuius numeris praefixa est virgula. Alii punctum praefigunt, quod fit, ut numerator a numeris integris distinguatur. Ita ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{10}$, scribi solet 19, 4. Ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{100}$, scribitur 19, 04; cyphra numero 4 praefixa iudicat, denominatorem esse 100. Fractio $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios, et ita deinceps per decadas semper progrediendo. Sic $4, 217 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas maxima est ad obtinendum quotum proxime verum, si divisio accurate fieri non possit. E. g. si dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum residuo 141, cui addatur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3 cum novo residuo 324, cui iterum addatur o, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur o; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratorem esse evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori 3 addatur o, dividaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur o, rursusque 20 per 4 dividatur, quotus est 5 sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = o, 75$. Et re quidem ipsa, quum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ eiusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit. Multiplicetur nempe numerator fractionis datae per 100 vel 1000 cet. productum illud divisum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis, cuius denominator est 100 vel 1000 cet. Saepe tamen contingit, fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcumque cyphrae eddantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perveniamus, vel si iidem numeri eodem ordine redeant. Ita si fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, invenies o, 5714285714285714 28 cet. nec umquam pervenies ad divisionem accuratam. Pari modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decima-

lem, invenies o, 416666 cet. In his autem casibus duas vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquae autem negliguntur. Ita poni possunt $\frac{4}{7} = o, 57$ et $\frac{5}{12} = o, 416$.

Haec quidem pauca satis esse possunt iis, qui demonstrationis severitatem non quaerunt. Sed rem utilissimam generatim et omnino accurate ostendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$, in qua n exprimit cyphrarum numerum, et r valorem notarum in numeratore, erit $r = \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed est $10^n = 2^n \times 5^n$; est igitur $r = \frac{p \times 2^n \times \overset{5}{\cancel{10^n}}}{q}$. Non potest autem $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$ seu r abire in numerum integrum, nisi q aequalis sit alicui potestati ipsius 2 vel 5 vel 2×5, vel tandem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potestatem ipsius 5, quae tamen potestates sunt minores, quam n. Ponitur enim, fractionem $\frac{p}{q}$ esse ad minimos terminos reductam, hoc est, p et q nullum habere divisorem communem. In alio quolibet casu fractio $\frac{p\times 10^n}{q}$ seu r numquam fieri poterit numerus integer. Attamen quo maior erit n, hoc est, quo plures erunt cyphrae in denominatore, eo magis fractio $\frac{r}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim $p\times 10^n$ per q dividatur, inventus r minor erit [*quum sit quotus in divisione non exacta*]. Iusto autem maior fiet, si unitate augeatur. Quare $\frac{r}{10^n}$ minor est, quam $\frac{p}{q}$, et $\frac{r+1}{10^n}$ maior. *Porro quum augetur* n, *maiori ratione crescit* r; *adeoque crescit valor fractionis* $\frac{r}{10^n}$. *Item aucta* r, *minuitur in numeratore fractionis* $\frac{r+1}{10^n}$ *ratio unitatis ad* r, *adeoque minuitur excessus iusto maior. Igitur quo maior fuerit* n, *eo magis fractio decimalis ad legitimum valorem accedet.* Hinc patet, utilissimum esse fractionum decimalium usum, quum earum ope valor fractionum accuratus quamproxime haberi possit.

Quattuor arithmeticae operationes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione, qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulae, qua fractiones ab integris dirimuntur. Haec virgula in eadem linea verti-

cali iacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendae sunt, vel invicem subtrahendae. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, ut totidem post se notas relinquat, quot erat in utraque fractione. Tandem si divisio peragitur numeri dividendi notae decimales probe observandae sunt; nam in quoto et divisore simul totidem esse debent post virgulam notae, quot erant in dividendo. Quattuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.	*Subtractio.*
23, 304	49, 638
3, 9567	17, 16
149, 86	
177, 1207	32, 478

Multiplicatio.	*Divisio.*	
12, 35	8, 445	3, 22
4, 2	6 44	2, 6
2470	2 005	
4940	1 932	
51,870	0 073	

Vnum autem in divisione notandum est. Si nempe in divisione plures occurrant notae decimales, quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adiunges, quot volueris cyphras, ita tamen ut notae decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquae decimales notae haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis praecedentis $8,445 = \frac{8445}{1000}$ et $3,22 = \frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam. Evidens autem est, cyphram unam dumtaxat in quoto adesse. Et hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper aequalem differentiae cyphrarum in divisore et dividendo. Generatim, quod ad multiplicationem spectat, si 10^n sit denominator fractionis unius decimalis, et 10^m alterius; denominator producti erit 10^{m+n}. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in $m+n$. Contraria ratione in divisione denominator quoti non erit 10^{m+n}, sed 10^{m-n} *exprimente* m *partes decimales in dividendo*, *et* n *partes decimales divisoris*; ideoque $m-n$ exprimet numerum cyphrarum, quae post virgulam in quoto scribi debent.

CAPVT V.

De radicum extractione.

I.

Explicavimus iam in capite II, quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicuius *potestas prima* vel *primi gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a est a. Productum ex quantitate aliqua in se ipsam dicitur *potestas secunda* vel etiam *quadratum*: ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quae vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia* vel *cubus*: ita a^3 est cubus ipsius a: quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim *quantitas ad datam potestatem elevatur, si eius exponens ducatur in exponentem potestatis.* Ita si quantitas a evehatur ad potestatem, cuius index est n, habebitur a^n gradus n.

Scholion 1. In hoc autem capite praesertim considerabimus radicum quadratae et cubicae extractionem. Quod ut clare fiat, ipsam quadrati et cubi formationem primum investigavimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis $a+b$ ad quadratum evehenda, prodit $aa+2ab+bb$. Iam vero quadrati huius formationem seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a+b$ continet: I.° Quadratum aa primae partis a: II.° Productum $2ab$ ex duplo primae partis in secundam: III.° Quadratum partis secundae, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a+b+c$ per $a+b+c$, orietur quadratum $a^2+2ab+b^2+\overline{2a+2b}\times c+c^2$. In hoc quadrato rursus considerandae sunt partes singulae. Continet I.° quadratum $a^2+2ab+b^2$ ex duobus primis terminis $a+b$: II.° Productum