notae decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquae decimales notae haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis praecedentis $8,445=\frac{8445}{1000}$ et $3,22=\frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam. Evidens autem est, cyphram unam dumtaxat in quoto adesse. Et hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper aequalem differentiae cyphrarum in divisore et dividendo. Generatim, quod ad multiplicationem spectat, si 10^n sit denominator fractionis unius decimalis, et 10^m alterius; denominator producti erit 10^{m+n}. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in $m+n$. Contraria ratione in divisione denominator quoti non erit 10^{m+n}, sed 10^{m-n} *exprimente* m *partes decimales in dividendo, et* n *partes decimales divisoris;* ideoque $m-n$ exprimet numerum cyphrarum, quae post virgulam in quoto scribi debent.

CAPVT V.

De radicum extractione.

I.

Explicavimus iam in capite II, quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicuius *potestas prima* vel *primi gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a est a. Productum ex quantitate aliqua in se ipsam dicitur *potestas secunda* vel etiam *quadratum:* ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quae vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia* vel *cubus:* ita a^3 est cubus ipsius a: quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim *quantitas ad datam potestatem elevatur, si eius exponens ducatur in exponentem potestatis.* Ita si quantitas a evehatur ad potestatem, cuius index est n, habebitur a^n gradus n.

Scholion 1. In hoc autem capite praesertim considerabimus radicum quadratae et cubicae extractionem. Quod ut clare fiat, ipsam quadrati et cubi formationem primum investigavimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis $a+b$ ad quadratum evehenda, prodit $aa+2ab+bb$. Iam vero quadrati huius formationem seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a+b$ continet: I.° Quadratum aa primae partis a: II.° Productum $2ab$ ex duplo primae partis in secundam: III.° Quadratum partis secundae, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a+b+c$ per $a+b+c$, orietur quadratum $a^2+2ab+b^2+\overline{2a+2b}\times c+c^2$. In hoc quadrato rursus considerandae sunt partes singulae. Continet 1.° quadratum $a^2+2ab+b^2$ ex duobus primis terminis $a+b$: II.° Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a + 2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2 tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus quam tribus terminis composita. Tales vero quantitates magis compositae appellari solent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a \times b$ ad tertiam potestatem evehatur: multiplicetur nempe quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Cubi huius partes singulae sunt. I.° Cubus primi termini, nempe a^3 II.° Productum ex triplo quadrato $3a^2$ primi termini in terminum secundum, scilicet $3a^2b$ III.° Productum ex primo termino a in triplum quadratum secundi termini; nempe $3ab^2$ IV.° Cubus secundi termini, scilicet b^3.

Simili modo operandum est pro trinomio $a + b + c$; invenieturque cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. In hoc autem cubo praeter cubum $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ duorum primorum terminorum, habetur I.° Factum ex triplo quadrato summae duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempe $3a^2c + 6abc + 3b^2c = \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3 \times c$. II.° Summa duorum primorum terminorum per tertii termini triplum quadratum multiplicata, scilicet $3ac^2 + 3bc^2 = a + b \times 3c^2$ III.° Tandem tertii termini cubus, nempe ccc.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio sive radicum extractio. Sit

quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix x, cuius quadrato subtracto, remanent termini duo $-ax + \frac{1}{4}a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x, per quod dividatur secundus terminus $-ax$, quotus fit $-\frac{1}{2}a$, qui multiplicetur per $2x$. Tandem fiat quadratum quoti $-\frac{1}{2}a$, atque producta illa ex residuo $-ax + \frac{1}{4}a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x - \frac{1}{2}a$. Tota operatio patet ex numero praecedenti. En typus calculi.

$$
\begin{array}{l}
x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 \quad (x - \frac{1}{2}a \\
x^2 \\
- \\
\hline
0 - ax + \frac{1}{4}a^2 \\
\quad 2x - \frac{1}{2}a \\
\hline
\quad - ax + \frac{1}{4}a^2 \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Ceterum, si radix plures habuerit quam duos terminos, iam duo primi termini post primam operationem velut unicus terminus considerari debent, et reliqua peragenda, ut antea, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica, quae est c, cuius c^3 ex primo termino auferatur: remanent termini $-3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Iam quia notum est, secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini c triplum quadratum, per quod dividatur secundus terminus $-3c^2y$, prodit quotus $-y$, qui erit secunda pars radicis. Tum divisor $3c^2$ ducatur in $-y$; ut habeatur triplum quadratum primae partis radicis ductum in secundam $-3c^2y$. Deinde fiat $3y^2 \times c$ aequale triplo quadrato secundae partis radicis ducto in primam. Tandem fiat $-y^3$: cubus secundae partis. Si haec producta ex reliquis terminis auferantur, nihil remanet; ac proinde radix accurata est $c-y$. En calculi typum.

$$
\begin{array}{l}
c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 \quad (c-y \\
c^3 \\
\hline
0 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 \\
\quad (3c^2) \\
\quad -3c^2y + 3cy^2 - y^3 \\
\hline
\quad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

III. Ex demonstrationibus praecedentibus facile patet radicum extractio in quantitatibus numericis. Extrahenda sit radix quadrata, ut in praesenti exemplo. Numerum datum in classes divide, quarum singulae duas notas contineant, initio a dextris facto. Nihil autem refert sive unica tantum nota constet prima classis, sive notis duabus. Quaere radicem veram aut proxime veram numeri 38, in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis, et eius quadratum 36 aufer ex 38. Residuo 2 adiunge notas classis pro-

Exemplum.

```
38.94.89. (624,09.
36
-------
 294
 122
 244
-------
 5089
 1244
 4976
-------
  11300
  12480
      0
-------
  1130000
  124809
  1123281
-------
     6719 cet.
```


xime sequentis 94, et huius novi numeri postrema nota neglecta, quaere, quoties duplum radicis hactenus inventae sive 12 contineatur in 29, invenietur 2; scribe ergo 2 in radice, eumdemque quotum 2 scribe etiam sub dexteriori nota 4 numeri 294. Ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50. Huic autem residuo adnecte notas classis proxime sequentis 89. Rursus contemta novi numeri dextera nota, quaere, quoties duplum radicis hactenus inventae, scilicet 124, contineatur in 508. Quotus erit 4, qui quidem ponatur etiam sub nota dextera numeri 5089, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4; nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624. Numerus autem ille foret perfecte quadratus, si numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphrae duae, ut heic fractum vides, ut habeatur numerus 624 tamquam prima pars radicis, cuius duplum sumatur, nempe 1248; dividaturque 1130 per 1248, quotus est o, quare scribe o in radice, et multiplica 12480 per o, productumque o aufer ex 11300, remanent 11300. Huic residuo iterum addantur cyphrae duae, sumaturque duplum radicis, nempe 12480, per quod dividatur 113000, scribaturque quotus 9 in radice, qui scribatur etiam sub dextera cyphra numeri 113000, et per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residuum fit 6719. Operatio rursus continuari posset. Sed satis patet methodus, cuius ope radicem proxime veram obtinere licet, et ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium natura.

Scholion II. In huius operationis serie idem notare oportet, quod in divisione observatum est, nempe, si post adiectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inventae non contineatur in numero, qui per illud duplum dividendus est, postrema huius dividendi nota neglecta; cyphra scribenda est in radice, et classis proximae notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est, hanc operationem esse divisioni simillimam, in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radicis postremo inventae auctum nota, quae deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, heic autem semper augetur: in divisione totus divisor cognoscitur, heic autem ignota est novi divisoris nota, quae inquiritur. Atque id in causa est, cur in hac divisione instituenda postrema dividendae quantitatis nota praetereatur. Si contingeret, divisorem esse maiorem: v. g. in praesenti exemplo, si productum ex 2 in 122 subtrahi non posset ex 294, iam in radice scribendus esset numerus proxime minor, et tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Vnum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventae scribatur radix nova, et deinde numerus to-

tus per radicem novam multiplicetur. Ita in praesenti exemplo post duplum primae radicis 12 scribitur 2, totusque numerus 122 multiplicatur per novam radicem 2. Operationis ratio manifesta est. Quum enim numerus 2 in radice duas exprimat decadas, huius numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicae extractionem iam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis, et iisdem innititur principiis. Extrahenda sit radix cubica, ut in praesenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas, incipiendo a dexteris notis; prima classis, quae poterat continere vel tres notas vel duas, in hoc casu unicam continet. Quaeratur radix cubica numeri 5 proxime minor, quae est 1. Huius cubus 1 subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut heic factum vides. Deinde ita

Exemplum.

5.305.473	(174, 4.
1	
4305	
(300)	
2100	
1470	
343	
3913	
392472	
(86700)	
346800	
8160	
64	
355024	
3744800	

dicendum, prima pars radicis 1 pro decade haberi debet, si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, et per illius triplum 300 dividatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret iusto maior, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Iam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100, *quod est triplum quadratum primae partis* 10 *ductum in secundam* 7. Dic praeterea $7 \times 7 = 49$, et $49 \times 10 = 490$, postea $490 \times 3 = 1470$, *quod est triplum quadratum secundae partis radicis* 7 *ductum in primam* 10, et illud scribe infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, *quod est cubus secundae partis radicis* 7, et scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470 et 343; et summa 3913 auferatur ex numero 4305; residuum est 392. Demittatur classis tertia 472, et duae primae partes radicis, velut pars una considerentur. Haec autem pars, quae est 17, aequivalet 170, si conferatur cum tertia parte quaesita. Sumatur huius numeri 170 triplum quadratum 86700: per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice. Multiplicetur divisor 86700 per 4 productum fit 346800, *quod est quadratum triplum primae partis radicis* 170 *ductum in secundam partem* 4, et infra scribitur. Dicas deinde $4 \times 4 = 16$; $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod productum, *quum sit triplum quadratum secundae partis radicis* 4, *ductum in primam partem* 170, scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4, nempe 64. Addantur tres illae quantitates; quarum summa

355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere, si residuo addantur tres cyphrae, ut in praesenti exemplo factum est; et si eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa. Illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratae et cubicae, diximus, tot esse radicis partes, quot sunt diversae numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quaelibet ex duobus constans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere potest. Consideretur numerus 99 omnium, qui duabus constent notis, maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10 consideremus: quadratum erit 100, quod numero 99 maius est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quae tres habeat notas, est 100, cuius radix quadrata est 10, quae proinde duas continet notas. Ac quantitas omnium maxima, quae tres habeat notas, est 999, cuius radix tres notas habere non potest. Nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cuius quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo, facile intelligitur praescripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata. Et huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere, evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Evidens est, extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore et ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione operationis rite peractae facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, haec in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, et restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur. Id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

DE QVANTITATIBVS SVRDIS SIVE IRRATIONALIBVS, ET INCOMMENSVRABILIBVS *.

IV. Saepe ab extrahenda radice supersedemus, ubi veram invenire non licet, ut quantitati propositae praefigitur signum $\sqrt{}$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii. Et hi sunt numeri, quos arithmetici vocant numeros *surdos* sive *irrationales*; aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum praefigitur, ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$ significant radicem quadratam ipsius ab: et radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$: ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$ significant radicem quadratam, cubicam et radicem quamlibet indeterminatam m. Vt autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet, quae antea de exponentibus breviter dicta sunt. Ponamus $a = bb$, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Praeterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat, quantitatem bb ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$ exponens $\frac{1}{2}$ designat litteram b dimidio minus scribendam esse, quam in bb; ac proinde semel tantum. Quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. *Brevius: quantitas* a *ad quamlibet potestatem*, v. g. *quadratum vel cubum elevatur, si exponens illius* 1 *per exponentem potestatis* 2 *vel* 3 *multiplicetur, seu fiat* $a^{1\times 2}$, $a^{1\times 3}$. (§. I. hui. cap.). *Igitur eiusdem operationis resolutio seu radicis extractio fiet, si exponens* 1, *per exponentem radicis* 2 *vel* 3 *dividatur, seu fiat* $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota ma-

* *Etsi quantitates surdae seu irrationales sint incommensurabiles relate ad unitatem vel eius aliquam determinatam partem; sunt tamen persaepe inter se commensurabiles, seu quod idem est, exprimitur plerumque numeris vera ratio, quae inter quantitates surdas vel irrationales intercedit.*

gis ac magis illustrabitur, explicatis quattuor arithmeticae operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdae adduntur vel subtrahuntur facillime, si eiusdem sint exponentis, et eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, saepissime contingit, quantitates surdas eiusdem ordinis ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, et $b\sqrt{75a}$; prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, alterna autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in *additione utriusque quantitatis*, habebitur $9b\sqrt{3a}$; in *subtractione autem primae quantitatis a secunda habebitur* $b, \sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit, ut numeri sub signo radicali positi quaerantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere eiusdem ordinis, cuius est surda quantitas. Si aliquem eiusmodi divisorem invenias, eius radicem praefige signo radicali, et sub hoc includatur tantummodo alter dati numeri factor seu divisor. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, iam quantitates radicales in additione signo $+$ connectendae, in subtractione autem signo — separandae.

Demum multiplicantur et dividuntur quantitates irrationales non secus ac rationales, dummodo exponentes radicum sint eiusdem ordinis; et producto vel quoto idem, quod prius erat, signum radicale praefigitur. Ita si multiplicari de-

beat $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$, quotus erit $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$. Patet autem, in multiplicatione delendum esse signum radicale, si aequales fuerint quantitatis signo inclusae. Sic $\sqrt{a^3c} \times \sqrt{a^3c} = a^3c$.

Quoniam saepe contingit, quantitates radicales ad eumdem exponentem reducendas esse, observandum est, id facile praestari posse ex hactenus demonstratis. Ita quantitates duae radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, et $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ et $\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d^n}}$ quod patet; nam quantitates illae *si repraesententur per radicum exponentes erunt* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{m}}$. *Si exponentes fracti ad eamdem denominationem reducantur, erunt* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{mn}}$ *et* $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{\overset{n}{\cancel{m}}}{mn}}$. *Adeoque* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ *et* $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ *in aequales permutantur* $\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ *et* $\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d_n}}$. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a^3 per a^2, productum fit $a^3+a^2=a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem evehi debeat, habetur $a^{3\times 2}=a^6$. Et generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta, fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *exponentium* additionem; potestas autem per multiplicationem *exponentis quantitatis per exponentem potestatis*. Contraria ratione divisio fit per *exponentium* subtractionem, et radicis extractio per exponentium divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2}=a^{6-2}=a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}}=a^3$, et generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. *Ex quibus liquet, quod si dividendus et divisor eumdem habeant exponentem, exponens quoti per subtractionem exponentium aequalium abibit in zero.* Ita $\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0$. *At quantitas* $\frac{a^3}{a^3}=1$. *Ergo* $a^0=1$. *Adeoque quaelibet quantitas elevata ad potestatem zero aequalis est unitati. Similiter si exponens di-*

visoris maior sit quam dividendi, exponens quoti fit negativus. Ita $\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}$. *Sed* $\frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2}$. *Ergo quantitas elevata ad potestatem negativam aequalis est fractioni, cuius numerator sit* 1; *denominator vero eadem quantitas cum suo exponente positivo.* Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales sive incommensurabiles saepe in hoc capite nominavimus. Re vera autem tales dari quantitates, evidens est ex capite praecedenti, in quo demonstravimus, fractionem sive puram sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer, cuius radix quadrata, cubica cet. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde huius numeri radix est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa quum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem; in omni ratione vel numero existere necessum est partem aliquotam, quae sit utrique quantitati communis; at quantitates incommensurabiles tali carent mensura. Ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus, quia talis quantitas, *seu numerica*, inveniri non potest. Immo fractiones proprie non dicuntur numeri, nisi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{3}{4}$, quae exprimit quartam partem totius alicuius ter sumtam, ipsa ad numeros integros refertur; haec enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Totam incommensurabilium doctrinam utilissimam quidem alio arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, haec invenitur minor quam 3; quum $3 \times 3 = 9$, et maior quam 2, quum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 et 3; ac proinde si posset determinari, ea foret aequalis numero 2, et alicui numero fracto; sed fieri non potest, ut fractio mixta per se ipsam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cuius radix non est numerus integer.

Scholion. Secundae dumtaxat et tertiae potestatis compositionem ac resolutionem in praesenti capite explicavimus. At rem generatim et breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate considerabimus. Ex hactenus explicatis manifestum est, eodem modo formari altiores cuiuslibet gradus potestates. Ita ad formandam quarti gradus potestatem multiplicari debet cubus per suam radicem, et sic deinceps. Iam in singulis terminis exponentes et coëfficientes diligenter observemus. In potestatis cuiuslibet compositione primus terminus a binomii cuiuslibet $a+b$, evehitur ad potestatem quaesitam, v. g. a^2, si potestas secunda fuerit. In aliis sequentibus terminis exponens quanti-

tatis a per unitatem decrescit, et in ultimo termino evanescit. Ita in secunda potestate habentur *secundus et tertius terminus* $2ab + a^0b^2 = 2ab + b^2$. Contra autem potestas termini b in primo termino non reperitur, seu est b^0, sed in 2° termino illius exponens est unitas, in 3° termino est 2, et ita crescit per gradus donec in ultimo termino exponenti potestatis quaesitae aequalis fiat. Quare iisdem gradibus, quibus decrescunt exponentes ipsius a, crescunt exponentes quantitatis b, atque in utraque quantitate exponentium summa semper eadem est, et maximus exponens est potestatis quaesitae exponenti aequalis; quod quidem in potestate qualibet experiri licet. Ita potestas sexta binomii $a+b$, invenitur $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. In qua observare licet, exponentes quantitatis a decrescere secundum seriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine crescere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; numerusque exponentius in utroque termino est semper 6. Iam superest, ut singulorum terminorum coëfficientes observemus. *Primi termini coëfficiens semper est unitas; in reliquis autem terminis ita invenitur:* dividatur coëfficiens praecedentis termini per exponentem ipsius b in termino dato, et quotum multiplica per exponentem ipsius a in eodem termino auctum unitate. Ita in praecedenti exemplo, ubi termini sunt a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, coëfficiens primi termini est unitas: coëfficiens secundi est *coëfficiens primi termini* 1 *divisus per exponentem* b, *seu per* 1,