autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur; quotus erit quaesitus radicis logarithmus.

APPENDIX.

De aequationibus.

I.

AEquatio dicitur: *propositio duarum quantitatum aequalitatem adfirmans, interposito aequalitatis signo* $=$ AEquatio valorem quantitatis alicuius repraesentat, si ex una aequationis parte habeatur quantitas sola quaesita, in parte autem altera occurrant quantitates, quae omnes sint cognitae. Ita si habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni resolvenda aequatione id curandum est, ut nempe quantitas, cuius valor quaeritur, in una aequationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat aequationum genus considerabimus, eas scilicet, in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem seu secundum gradum evehitur. Quod ad primi gradus aequationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus variisque numeris distinguemus. I.° Ex una aequationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc

exemplo: $5x + 50 = 4x + 56$; $5x - 4x = 56 - 50$, et $x = 6$. II.° Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut divisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per divisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$, et $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$ seu $\frac{x + 20}{5} = 10$; erit $x + 20 = 50$, et $x = 50 - 20 = 30$. III.° Proportio quaelibet geometrica converti potest in aequationem, facta extremorum et mediorum multiplicatione. Sit $12 - x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, et $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in aequationem per additionem mutari potest. IV.° Loco quantitatis cuiuslibet in aequatione alia eiusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 24$, et $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24 - 9}{3} = 5$.

V.° Si pars aequationis quantitatem quaesitam continens signo aliquo radicali adficiatur, delendum est signum radicale, et altera pars aequationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit $= \sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = d + c$, et $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$;

quare $x = \dfrac{d^2 + 2cd + c^2 - b^2}{a}$.

II. His praemissis permutationum regulis, quae ex antea demonstratis facile intelliguntur, iam problema aliquod unius dimensionis solvendum ponemus. Et primo quidem quaestionis propositae distincta habeatur notio, et singulae conditiones attente considerentur. Si alicuius problematis conditiones ita exprimantur, ut tot habeantur incognitae, quot aequationes; poterit semper deveniri ad unicam aequationem, quae unicam incognitam habeant. Nam sint e. g. 10 aequationes et totidem incognitae; poterit conferendo primam cum secunda eliminari per regulas praescriptas una ex iis incognitis inveniendo novam aequationem, quae illa careat: tum idem praestari poterit conferendo primam cum tertia, et ita porro, ac habebuntur iam novem aequationes cum novem incognitis; quae eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis; et ita porro, donec perveniatur ad unicam aequationem cum unica incognita. Hinc si habeantur tot aequationes, quot incognitae, problema dicitur *determinatum*; et unicam vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitae quam aequationes, problema dicitur *indeterminatum*, et solutiones habet infinitas. AEquatio $3x + \frac{1}{2}x = 20$ est aequatio determinata, sed $x + y = 12$ est indeterminata. Etenim si ponatur $x = 1$, et $y = 11$, vel $x = 2$, et $y = 10$, et ita porro, semper

invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti sint valores, qui pro x et y positi numerum datum restituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demtis 100 nummis; quos annuatim impendit in sumtus, et post tres annos sit duplo ditior, quaeruntur nummi, *quos ab initio habet indeque etiam innotescunt, quos habet post annos tres.* In hoc problemate plures latent conditiones sic evolvendae, et enuntiandae. Quantitates incognitae ultimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam; quae dicatur x. Anno primo expendit nummos 100. Quare residuum est $x - 100$, quod adauget triente, *seu tertia parte.* Ideoque *pecunia mercatoris sub fine primi anni* est, $x - 100 + \dfrac{x-100}{3} = \dfrac{4x-400}{3}$. Anno secundo expendit nummos 100, quare residuum $\dfrac{4x-400}{3} - 100 = \dfrac{4x-700}{3}$, quod adauget triente, *seu tertia parte.* Ideoque fit *pecunia mercatoris sub* fine secundi anni, $\dfrac{4x-700}{3} + \dfrac{4x-700}{9}$

$= \dfrac{16x-2800}{9}$. Anno tertio expendit nummos 100.

ideoque residuum est $\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$, quod adauget triente *seu tertia parte*. Quare fiunt *mercatoris nummi sub anni tertii fine* $\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$. Tandem ex conditione problematis post tres annos fit duplo ditior. Ergo $\frac{64x-14800}{27}=2x$. Quaestio itaque ad aequationem reducitur, ex qua erui debet x. Vtramque aequationis partem multiplica per 27, productum fit $64x-14800=54x$. Aufer ex utroque aequationis membro $54x$; residuum est $10x-14800=0$, seu $10x=14800$; dividas per 10, habetur $x=1480$. Quare habentur nummi sub initio, et ipsum lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad aequationem, quae ipsum quantitatis incognitae quadratum, et praeterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, haec aequatio dicitur *secundi gradus* vel *quadratica*. In talibus autem aequationibus hac regula utendum est. Singulos aequationis terminos, qui incognitam quantitatem continent, ad unam partem transferas ita, ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognite quadratum coëfficiente aliquo adficiatur, per hunc coëfficientem singuli aequationis termini dividantur. Tandem dimidii

coëfficientis quantitati incognitae praefixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Iam pars aequationis, quae incognitam quantitatem continet, ad perfectum quadratum reducta habebitur; ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, et deinde per regulas praescriptas quantitatis incognitae valor erueretur. Ponamus $y^2+ay=b^2$: addatur hinc et inde quadratum dimidii coëfficientis a; erit $y^2+ay+\frac{1}{4}a^2=b^2+\frac{1}{4}a^2$; extractaque radice fiet $y+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}$, et tandem $y=+\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}-\frac{a}{2}$. Diligenter observandum est, radici quadratae praefixum fuisse signum $\pm$, hoc est, $+$ vel $-$. Etenim radix quadrata cuiuslibet quantitatis, ut a^2 potest esse $+a$, vel $-a$, ideoque $y+\frac{a}{2}=+\sqrt{b^2+\frac{1}{4}aa}$ vel $-\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}$; quum $-\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}\times-\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$ restituat quadratum $b^2+\frac{a^2}{4}$, non secus ac facit $+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}\times+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$. Quare aequationes quadraticae duas admittunt solutiones. Sic in praesenti exemplo duo sunt valores radicis y, unus nempe $y = +\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$.

De quantitatibus imaginariis.

Scholion. At quoniam positiva sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet, quantitatis negativae radicem esse impossibilem, seu adsignari non posse, quae ideo dicitur *imaginaria.* Aliquando contingit, aequationes nullam solutionem admittere. Exemplo sit $y^2 - ay + 3a^2 = 0$, erit $y^2 - ay = -3a^2$, et $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$. Extractaque radice habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$, et $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifestum est, duos valoris radicis y esse imaginarios, quum adsignari non possit radix quantitatis $-\frac{11a^2}{4}$. Si ergo in solutione problematum deveniatur ad quantitates imaginarias,

signum est admodum manifestum, vel problema esse impossibile, vel adhibitam esse methodum, quae aliquid impossibile involvit, prorsus ut fit in argumentatione, dum res ad absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariae, quae eamdem sub signo radicali quantitatem habent, ut $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$, per multiplicationem efficere possunt productum reale, in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illae numero pari semper multiplicentur. Etenim evanescere non potest signum radicale, nisi terminus hoc signo, adfectus multiplicetur per alium terminum, qui idem signum radicale habeat, et eamdem quantitatem signo inclusam. Iam vero ita sublato signo radicali, si productum ex prima multiplicatione per idem signum radicale multiplicetur, novum productum adficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum evanescet signum radicale, et ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium $x-a-\sqrt{-b}$, evanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat tantum, quod ad signum vinculo radicali praefixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex $x-a-\sqrt{-b}$ in $x-a+\sqrt{-b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$. In hoc enim solo casu producta singula ex unoquoque termino reali in $\sqrt{-b}$ sese mutuo signis contrariis elidunt, atque hinc patet, et terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+\sqrt{-b}\times-\sqrt{-b}$, esse necessario positivum. Itaque quantitatum imaginariarum frequens usus occurrere potest; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatum, quae ex realibus et imaginariis sunt mixtae, realis esse potest. Ita quantitatum $3+\sqrt{-1}$, et $8-\sqrt{-1}$ summa est realis, nimirum 11, atque etiam realis est differentia, nempe 5, *si* $3+\sqrt{-1}$ *subtrahenda sit ex quantitate* $8+\sqrt{-1}$.

V. AEquationes omnes secundi gradus repraesentari solent hac formula $x^2-px=q$, in qua p et q designant quantitates quaslibet vel positivas vel negativas. Inde autem statim concluditur $x-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Hinc autem difficultates aliquae suboriri possent ex praecedentibus facile explicandae. Quaeri etenim potest, cur quantitas possitiva $x-\frac{p}{2}$ aequalis fiat negativae $-\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Re quidem vera duo quadrata ae-

qualia praebent aequales radices, sed radices illae eiusdem signi esse debent. Etenim ex eo, quod $4=4$, concludi non potest $2=-2$. Praeterea $\frac{p}{2}-x$ tam est radix ipsius $xx-px+\frac{pp}{4}$, quam $x-\frac{p}{2}$. Quare scribendum videretur $+x\pm\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Has difficultates facile solvemus, si observetur, hanc ultimam aequationem in quatuor sequentes resolvi posse, $x-\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. $x-\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$; $\frac{p}{2}-x=\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$; $\frac{p}{2}-x=-\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Ex his quatuor *aequationibus prima et quarta; secunda et tertia per transpositionem in eamdem recidunt*; quare satis est duplex signum $\pm$ in una aequationis generalis parte adhibere, ut fieri solet. Praeterea aequationis resolutio hoc modo institui posset. Radix quadrata aequationis $xx-px+\frac{pp}{4}$ est

$x - \frac{p}{2}$, si x sit maior quam $\frac{p}{2}$; fitque $\frac{p}{2} - x$, si x sit minor, quam $\frac{p}{2}$. In 1.° casu habetur

$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; in altero autem erit

$\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hi ergo sunt duo casus distincte expressi, qui duplici signo in formula generali *implicite* enuntiantur hoc modo

$x - \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem praecedentem invenitur $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, sola nempe radix positiva; tum vero inutilis est radix negativa, quum problematis solutionem non praebeat. Haec tamen radix haberetur quoque, mutata aequatione per regula explicatas: prodiret nempe $xx - px = q$, et $\frac{p}{2} - x$, vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hac igitur methodo radices positivas necessarias a superfluis, veras a falsis separare liceret.

AEquationum quadraticarum doctrina facili

exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, invenire scilicet in linea duo quaecumque luminaria coniungente, punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto aequali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur a, sitque illuminationis ratio, ut m ad n. Praeterea dicatur x distantia minoris luminaris a puncto quaesito; erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto $a-x$. Iam ponatur luminarium effectus seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata distantiarum a puncto lucido, ut vulgo statuitur a physicis. Sumtis distantiarum quadratis, erunt intensitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ et $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$.

Res ita se haberet, si aequalia forent luminaria. At quia (*ex hypoth.*) lucis quantitates absolutae sunt, ut m ad n; erunt luminarium effectus, ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$. Itaque ut habeatur punctum quaesitum, instituenda est aequatio inter $\frac{m}{xx}$ et $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$ ex qua per reductionem regulas eruitur $xx + \frac{2amx}{n-m} = \frac{aam}{n-m}$, et addito, ut moris est dimidii coëfficientis quadrato, habetur $x^2+\frac{2amx}{n-m}+\frac{aamm}{(n-m)^2}=\frac{aam}{n-m}+\frac{aamm}{(n-m)^2}$*. Huius aequationis radices duae sequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x=-\frac{am}{n-m}+\frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, vel $x=-\frac{am}{n-m}-\frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$. Ex his evidens est, unius radicis valorem esse negativum, alterius autem positivum. Etenim si quantitas radicalis signo $-$ adficiatur, iam quantitas tota fit negativa; si autem adficiatur signo positivo $+$, iam quantitas $-m+\sqrt{mn}$ erit positiva, quum sit (*ex hypoth.*) n maior, quam m; ideoque $\sqrt{mn}$ maior quam m.

Superest, ut radicis negativae usum explicemus. In memoriam revocanda sunt, quae de quantitatibus negativis iam dicta sunt, scilicet quantitates negativas secundum directionem positivis oppositam sumendas esse. In praesente problemate quantitatis x valor negativus facile intelligetur, si observemus, punctum quaesitum a nobis considerari tamquam inter duo luminaria constitutum. At si attendatur ad alterius casus possibilitatem, ponendo nempe punctum quaesitum in lineas producta ultra luminaria, iam valor radicis prodit positivus. Et quidem si distantia puncti a minori luminari dicatur x, ut antea; erit luminaris maioris distantia $a+x$; quadrata autem distantiarum erunt xx, et $aa+2ax+xx$, quae per conditiones problematis in aequationem reducta, praebent $maa+2amx+mxx=nxx$ resoluta aequatione, habetur $x=\frac{am}{n-m}\pm\frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$.

Valor $\frac{am}{n-m}+\frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$, erit positivus, hicque solus problemati satisfaciet in casu proposito. Alter autem valor negativus $\frac{am}{n-m}-\frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$ significat, sumendam esse directionem oppositam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, sed in ipsa linea iungente constituendum esse. Problema ad casum particularem transferamus. Ponatur $n=4m$ et $m=1$: praecedens formula $x=\frac{a}{n-m}\times(-m\pm\sqrt{mn})$ in hanc abit

* *In gratiam tironum lubet intermedias operationes extricare:* $x+\frac{am}{n-m}=\pm\sqrt{\frac{aam}{n-m}+\frac{a^2m^2}{(n-m)^2}}$. *Hinc* $x+\frac{am}{n-m}=\pm\sqrt{\frac{a^2nm-a^2m^2+a^2m^2}{(n-m)^2}}$, *et per reductionem:* $x=-\frac{am}{n-m}\pm\frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$.

$x = \frac{a}{3} \times (-1 \pm 2)$. Quare duplex valor radicis x erit $+\frac{1}{3}a$ et $-a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quae problemati aeque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo maior erit, quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia aequalis erit ipsi luminarium distantiae. Facile autem sine ullo algebrae auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; quum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quae vim habent quadruplo maiorem. Hoc exemplo illustrantur, quae de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Haec sunt arithmeticae et algebrae elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse iudicavimus.

FINIS ALGEBRAE.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

PROOEMIVM.

De definitione et divisione geometriae.

DEFINITIO I.

Geometria est: scientia magnitudinum; *solidorum* nempe, *superficierum* et *linearum*.

Def. II. Solidum est magnitudo in longum, latum et profundum extensa.

Schol. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat, illae tamen seorsum considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei et lineae.

Def. III. Superficies est: magnitudo tantum in longum et latum extensa. Linea autem est: magnitudo extensa tantum in longum.

Schol. Et re quidem ipsa itineris longitudinem nobis repraesentamus, non attenta eius latitudine; et planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes.